ANALISIS DE SIGNIFICADOS PERSONALES E INSTITUCIONALES: EL PROBLEMA DE SU COMPATIBILIZACIÓN

SILVIA C. ETCHEGARAY

Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina

QUINTO SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE
INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Almería, Septiembre 2001

ANALISIS DE SIGNIFICADOS PERSONALES E INSTITUCIONALES: EL PROBLEMA DE SU COMPATIBILIZACIÓN

❧

SILVIA C. ETCHEGARAY
Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina

RESUMEN

En este informe se trata de mostrar cierto grado de incompatibilidad entre significados institucionales y significados personales analizando si se tienen en cuenta las prácticas de los estudiantes en transposiciones didácticas realizadas en los libros de texto.

Este problema didáctico se investiga específicamente sobre el contenido: Divisibilidad en el conjunto de los números enteros. El mismo se realiza mediante el análisis de los libros de mayor circulación en la escuela media y de trabajos de alumnos de tres años diferentes, caracterizando los elementos estructurales y secundarios de significado de las nociones aritméticas involucradas.

ABSTRACT

In this report we have tried to show certain degree of incompatibility between institutional and personal meanings, analysing if the students'practices are considered in didactic transposition involved in the textbooks. This didactic problem is specifically investigated in the content: Divisibility in the set of integer numbers. This last problem is performed using the analysis of the most used textbooks in high school and in the works of students of three different years, characterising the structural and secondary elements of the meaning of the arithmetic notions involved.

PLANTEO DEL PROBLEMA

Es nuestro interés mostrar que la caracterización de los significados institucionales imperantes en una particular cultura, y el conocimiento de la existencia de significados personales producen ciertos fenómenos didácticos ligados a la transposición didáctica. Por ejemplo, la existencia o no de la compatibilización entre ambos tipos de significados lo cual es necesario tener conciencia para su posterior control. En consecuencia el problema que nos hemos planteado es investigar si se tienen en cuenta las prácticas de los estudiantes en las transposiciones didácticas que se realizan en los libros de textos, específicamente sobre el contenido matemático: *Divisibilidad en el conjunto de los números enteros (Z)*. La caracterización de los significados personales e institucionales de los objetos matemáticos, así como su interdependencia y desarrollo han sido propuestos por Godino y Batanero (1994) como tema de investigación prioritaria para la Didáctica de la Matemática.

MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA

Este trabajo se sitúa en la Teoría Antropológica de lo didáctico[1], y pretende aportar a la discusión de uno de sus modelos denominado *análisis ecológico de los saberes*. Este análisis se realizará dentro de la *Teoría de los Significados Institucionales y Personales de los Objetos Matemáticos* de Godino y Batanero (1994-1998), según la cual la noción de significado es la herramienta conceptual fundamental para analizar la actividad matemática. La noción de significado en esta Teoría acepta dos dimensiones, o sea se considera *significado personal o institucional* en tanto se refiera a *manifestaciones idiosincrásicas de un sujeto en particular o como producto de prácticas sociales compartidas que dependen del tiempo* (Godino y Batanero, 1994).

Además, es sabido que en este marco las acciones realizadas por el sujeto ante una tarea dada se describen mediante las siguientes entidades emergentes de las prácticas que se ponen en juego en la actividad matemática: o*stensivas, extensivas, actuativas, validativas e intensivas,* denominados *elementos estructurales de significado*. Además de estas entidades primarias este modelo contempla entidades secundarias - son combinaciones de las anteriores - las cuales han sido propuestas por Chevallard, Bosch y Gascón (1997) para analizar las organizaciones matemáticas, a saber: *tareas, técnicas, tecnologías y teorías*.

Es por todos compartido, que en general para describir la actividad matemática se deben tener en cuenta los diferentes problemas, las distintas representaciones y las teorías que los abarca. Con este modelo se aportan nuevos elementos que favorecen un análisis más profundo de dichas actividades constituyéndose así en un recurso de gran utilidad para comprender la génesis, el desarrollo y las funciones de los saberes matemáticos en las distintas instituciones.

METODOLOGÍA

Desde el punto de vista metodológico este enfoque semiótico–antropológico permite combinar diversos métodos y técnicas según el momento de la investigación y las características del problema planteado, aunque no deja de reconocer un papel relevante a los estudios de casos, tanto de experiencias de enseñanza, como de sujetos y episodios didácticos. Bajo este modelo, se puede afirmar que esencialmente este comienzo de investigación es de tipo cualitativo o en términos de Erickson (1986) interpretativo. Conjuntamente con el desarrollo de la investigación cualitativa se han desplegado múltiples clasificaciones para las técnicas de recogida de datos. Buendía y otros (1999) seleccionan una opción integradora ante tal múltiple oferta. Consideran por un lado, aquellas que exigen la presencia del investigador y una interacción con los agentes del contexto de investigación y las denominan directas o interactivas. Por otro lado, tienen en cuenta las indirectas o no interactivas que se basan en consultas de informaciones o documentos de carácter oficial o personal. Esta investigación pone en funcionamiento técnicas correspondientes a ambas categorías pues:

- Se recurre a la observación participante, ya que se observó directamente clases para obtener prácticas de alumnos y así analizar significados personales .
- Se ha utilizado el análisis de contenido de Teoría de Números en textos de enseñanza a nivel secundario de la divisibilidad en Z, a los fines de caracterizar significados institucionales en instituciones de enseñanza.

Encuadrados en esta metodología, una primera instancia de este trabajo es seleccionar los libros de textos del 8º año de la E.G.B más utilizados en el nivel medio. En ellos se presentan los temas de

[1] La problemática de lo didáctico se asume en términos “institucionales”, entendiendo a la noción de institución en sentido amplio siendo una institución tanto la escuela como un libro de texto, una clase, etc.

divisibilidad a través de situaciones problemáticas con las prácticas respectivas para su resolución de las cuales emergen los conceptos. En una segunda instancia se analizan distinguiendo los distintos elementos de significado que tales textos generan en el desarrollo de esta temática. Este análisis es contrastado con el que se realiza a trabajos de alumnos de 6º, 7º y 8º año (11, 12 y 13 años respectivamente) obtenidos en distintas observaciones de clases. De esta manera nos hemos iniciado en la compenetración tanto de las "obras"[2] de los alumnos como de particulares organizaciones matemáticas dentro de una institución escolar como es el libro de texto.

Por último, cabe aclarar que las relaciones que se detectan entre los distintos elementos de significado (institucionales y personales), han sido relativos a las instituciones o personas analizadas y constituyen un sentido no acabado del objeto de saber involucrado.

LA DIVISIBILIDAD COMO OBJETO DE ENSEÑANZA: ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTOS

En este apartado se trata de realizar un análisis de alguno de los momentos de transposición didáctica a la que es sometida la "Divisibilidad en el conjunto de los Números Enteros" para convertirse en un objeto de enseñanza. Según Chevallard (1989) en el proceso de transposición didáctica, el análisis ecológico del texto de enseñanza aparece como un segundo momento, que permite la exploración del alcance institucional determinado al saber enseñado.

El investigador en didáctica encuentra objetos que la institución de enseñanza (en este caso los libros de textos) no reconocen como tales y que pertenecen a la teoría didáctica. Tal es el caso de los "significados institucionales", "significados personales", "contrato didáctico", entre otros.

Los autores de los libros analizados, en general, demuestran la necesidad de poder determinar un saber, dividirlo en unidades elementales que el alumno pueda memorizar y que por lo tanto el profesor pueda rápidamente evaluar. Es decir, los elementos actuativos de los alumnos ante los objetos en cuestión deben ser rápidamente evaluados. Razón por la cual se proponen siempre gran cantidad de ejercicios de aplicación directa de los contenidos trabajados.

Asimismo las técnicas ocupan lugares privilegiados en la secuenciación del saber, hasta tal punto que se corre el riesgo de sólo enseñar técnicas normalizadas, debido a su más fácil comunicación y evaluación, en este caso: la factorización en primos y por ende la construcción del M.C.D y m.c.m a través de ella. El problema radica en la aplicación de estas técnicas sin tener en cuenta las nociones que subyacen en las mismas para lo que es muy importante la selección de los elementos extensionales que realmente le darán su razón de ser. Todos los textos analizados se adaptan a las exigencias de *la programabilidad de los saberes* organizándolos a éstos en forma lineal y secuenciada. También se puede observar que el modelo metodológico que se aplica es siempre *teoría - práctica*, aunque algunas definiciones son precedidas por alguna situación o ejemplo de cómo se debe aplicar. Siempre existe una presentación de las nociones o técnicas matemáticas que el alumno debe memorizar para luego aplicar en ejercicios sin llevar a cabo ninguna transformación.

Elementos estructurales de significado detectados en los libros de textos

Observación: se marcará con un asterisco (*) los elementos detectados sólo en alguno de los libros analizados, los restantes son comunes a todos los manuales seleccionados.

[2] Adherimos aquí a la posición de Chevallard y otros(1997), donde definen obra a toda producción que se obtiene como respuesta a una cuestión o a un conjunto de cuestiones problemáticas.

Elementos intensivos:
- Un número natural *a* es un múltiplo de otro número natural *b* si la división de *a* sobre *b* es exacta.
- El M.C.D es el mayor de todos los divisores comunes.
- El m.c.m es el menor de todos los múltiplos comunes.
- El M.C.D se utiliza para resolver situaciones cotidianas en donde hace falta repartir cierta cantidad de objetos en partes iguales.
- Los números naturales se clasifican en números primos y compuestos.
- Existen otras clasificaciones de números: amigos, perfectos, etc.(*)

Elementos ostensivos:
- Uso de diagramas de Venn graficando la intersección (*)
- Uso de árboles de factores
- Uso de dos columnas para la factorización.

Elementos extensivos:
- Problemas tipos de reparto de la vida cotidiana.
- Situaciones que caracterizan a los números amigos y perfectos. (*)
- Cálculo de M.C.D y m.c.m

Elementos actuativos:
- Técnicas aritméticas normalizadas: cálculo de divisores y múltiplos, factorización en primos.
- Aplicación del algoritmo de Euclides para el cálculo del M.C.D (*)

Elementos validativos:
- Aplicación de técnicas mostradas en los textos.
- Búsqueda de relaciones entre algunos números dados (*)

En resumen, se puede afirmar que las tareas propuestas a los alumnos por los diferentes textos, en torno a las nociones de divisibilidad, son claramente algoritmizables, estereotipadas, que permiten una *forma legítima* de actuar y que el profesor siempre espera para evaluar. O sea se configuran reglas implícitas a respetar entre alumno y profesor en función del saber involucrado, lo que determina indudablemente *un contrato didáctico común* a todos los libros analizados.

ANÁLISIS DE SIGNIFICADOS PERSONALES: UNA APROXIMACIÓN AL SABER ENSEÑADO

En este apartado se intentará realizar una aproximación al saber enseñado analizando trabajos de estudiantes de los distintos cursos. Vale observar que en todos los casos la tarea seleccionada fue dada sin sugerencia alguna, o sea sólo se plantea a los alumnos lo siguiente: *Mi terreno es rectangular y mide 65 metros por 91 metros. Quiero que coloque árboles en sus esquinas y luego plante otros en su contorno, de modo que la distancia entre dos consecutivos sea siempre la misma y la mayor posible.*

- Como no, la tarea es sencilla ¿Cuántos árboles colocará en total el jardinero? ¿Cuál será la distancia entre dos árboles consecutivos?

Dicha tarea es presentada en la introducción del primer libro analizado que en su encabezamiento dice textualmente: *Para pensar y resolver al finalizar el trabajo con divisibilidad.*. Cabe observar que en los dos libros restantes, se utiliza la misma lógica para avanzar en la temática. En otras palabras se parte de tareas tipos similar a la expuesta en este trabajo y se muestra que para obtener su solución se deben hacer evolucionar las técnicas de divisibilidad hasta la factorización en primos.

A continuación se caracterizan los elementos de significado del contenido matemático puesto en juego por los alumnos, cuyos trabajos se comparan con los elementos de significados institucionales detectados en el libro de texto.

Elementos ostensivos puestos en juego por lo alumnos:

- Figura geométrica para representar la situación
- Divisiones sucesivas por 2, por 3, luego por 4, hasta llegar al 5 que divide exactamente al 65. Análogamente con el 91. (O sea un trabajo puramente aritmético, haciendo uso de la noción de divisor)

Representaciones no usadas por los estudiantes (que conforman los significados institucionales emergentes del libro de texto):

- Diagramas de Venn que muestren claramente la intersección
- Construcción del árbol de factores, para la descomposición en primos.

Elementos extensivos:

La tarea escrita al iniciar este parágrafo.

Situaciones no planteadas:

- Ninguna, ya que los restantes problemas que conforman los elementos extensivos del significado institucional no permiten necesariamente la evolución de técnicas, es decir no aparecen en la práctica concreta de los alumnos.

Elementos actuativos puestos en juego por los alumnos:

- Cálculo del M.C.D por tanteo (la única diferencia planteada fue que algunos alumnos usaron el primer divisor del 65 para relacionarlo con el 91, mientras que otros alumnos trabajaron simultáneamente con los dos números buscando los divisores comunes.)
- Lectura diferenciada dada a los cocientes y divisores respectivos, ya que unos establecen distancias y los otros cantidad de árboles.

Técnicas no trabajadas por los alumnos:

- Cálculo del M.C.D como el producto de los primos comunes a ambos números con su menor exponente.

Elementos intensionales:

- Utilización en carácter de herramienta del M.C.D como el mayor divisor que es común a los dos números dados.

Propiedades no tenidas en cuenta por los estudiantes

- Ninguna, el significado institucional de la noción puesta en juego es exactamente el que se puede rescatar como objeto de saber ante el análisis de significados personales que se está realizando.

Elementos validativos utilizados por los alumnos:

- La validación es expuesta en la respuesta final y está estrechamente ligada a la situación específica planteada.

Validaciones no realizadas.

- Utilizar la noción de M.C.D descontextualizada del problema planteado.

Tecnologías usadas por los alumnos:

- Un número es divisor de otro si al realizar el algoritmo de la división entera el resto es 0.
- Existe al menos un divisor común a ambos.
- Se puede encontrar el mayor de todos los divisores comunes.

Tecnologías no usadas:

- El Teorema fundamental de la Aritmética.

En síntesis, todos los alumnos lograron construir la primera técnica trabajada en los textos y solucionar la tarea no teniendo necesidad de tener que avanzar en la evolución de la misma, tal como es consignado expresamente en el texto del cual se extrajo la tarea, como así también en los dos restantes.

Cuando la actividad es presentada en un 8º. año (2º de la E.G.B), curso al cual va dirigido el texto seleccionado, las prácticas son similares a las anteriores, y nuevamente no hay necesidad de tener que evolucionar la técnica para resolverla. Por esto y debido a que muy rápidamente resolvieron la tarea, se decidió trabajar también con magnitudes, en primer lugar más grandes y luego arbitrarias a los fines de construir las bases para un método general de solución a situaciones que involucren al máximo común divisor (M.C.D). Por lo tanto la nueva situación problemática (un rectángulo con medidas arbitrarias: mide *a* de ancho y *b* de largo) pertenece al entorno conceptual que permitió en sus orígenes (época griega) construir esta noción básica de la aritmética (M.C.D) como así también la posibilidad de un algoritmo que lo determine. Aquí sí se produce una evolución necesaria de la técnica primitiva promovida principalmente por la imposibilidad de trabajar en un contexto aritmético (por la existencia de letras en lugar de números). El tener que concentrarse en la figura geométrica provocó el establecimiento de las bases del algoritmo de Euclides para obtener el M.C.D mediante el funcionamiento del método de sustracción sucesiva o en términos de Euclides usando el método de la *anthiphairesis.* La evolución de la técnica primitiva hacia la construcción del algoritmo de Euclides se observa claramente a través de las justificaciones realizadas por los alumnos. Textualmente se transcribe una de ellas: *Me fijo cuantas veces entra a en b. Si entra justo la distancia mayor va a ser a. Si no entra justo me fijo en el pedacito que sobra de b cuantas veces entra a. Si entra justo la distancia mayor es b-a. Esta forma de trabajo seguro que va a terminar en algún momento porque la unidad que sería un metro entra en cualquier medida justa. Y si no llega hasta el uno, el resultado sería la medida que entra justo.*

En este caso se produce espontáneamente un *cambio de campos* que permitió desbloquear la situación. Vale destacar, que en ninguno de los libros de texto esta manera de hacer evolucionar la técnica primaria aparece registrada. Sólo en uno de ellos se muestra el algoritmo de Euclides para calcular el máximo entre 360 y 210 como otra técnica normalizada.

Con este grupo, nuevamente, a pesar de haber avanzado en las técnicas utilizadas, la unicidad del resultado es validada a través del trabajo en cada situación particular. Por lo que la tecnología mostrada en el texto, de factorizar las magnitudes en cuestión utilizando números primos que permite la evolución de la técnica primitiva y asegurar así la unicidad del resultado para la situación planteada, nuevamente resultó innecesaria.

CONCLUSIONES

Los libros de texto analizados tratan de imponer un único punto de vista, puntual, por lo que en primer lugar, y en relación al problema planteado, se puede sostener que los significados institucionales plasmados en los manuales escolares analizados son incompatibles con una cierta concepción de enseñanza y aprendizaje que tenga en cuenta las posibilidades cognitivas de los alumnos.

En segundo lugar esta investigación aporta datos experimentales para ayudar a sostener que las instituciones de enseñanza restringen fuertemente los elementos de significado de las nociones matemáticas. Pues no sólo presentan significados limitados, lo cual es inevitable, sino que presentan situaciones inadecuadas para describir elementos de significado relevantes de nociones neurales de la Divisibilidad en Z.

REFERENCIAS

Alonso, R., Carranza, S. y Almazan, M. (1998). *Matemática 7*. Madrid:Santillana.

Bindstein, M y Hanfling, M. (1993). *Matemática 1*. Buenos Aires: Aique.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática*. Tesis Doctoral. Dpto de Matemáticas. Universidad Autónoma de Barcelona.

Buendía,L., Gonzalez, D., Gutierrez, J. y Pegalar,M. (1999). *Modelos de Análisis de la investigación educativa*. Sevilla: Alfar.

Chevallard,Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rappport officiel. *Seminaire de Didactique des Mathematiques et de l'Informatique.*Université Joseph Fourier-Grenoble I.

Chevallard,Y. (1991). *La Transposición Didáctica.* Buenos Aires: Aique (Edición original, 1985).

Chevallard,Y , Bosch, M. y Gascón, J., (1997). *Estudiar Matemáticas, el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*.Barcelona: ICE Universidad Autónoma y Ed. Horsori.

Erickson, E. (1986). Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza. En M. C. Wittrock (Ed), *La investigación de la enseñanza II: Métodos cualitativos y de observación.* (p. 119-161). Barcelona: Paidos.

Godino, J. D. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante (Revista Teórica e de Investigacao),* 2 (2): 69-79.

Godino, J. D. y Batanero, C.(1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathemathiques,* 14(3): 325-355.

Godino, J.D. y Batanero, C.(1998). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas . En I. Vale y J. Portela (Eds.), *Actas del IX Seminario de Investigación en Educación Matemática (SIEM)* (pp. 25-45). Guimaraes.

Godino, J. D. (1999). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de las matemáticas. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III Simposio de la SEIEM* (pp. 196-212).Valladolid.

Semino, S., Englebert, S. y Pedemonti, S. (1997). *Matemática 7- 3er. ciclo de la EGB.* A-Z Editora.