

Puntos críticos y simetrías en problemas elípticos

JAIME ARANGO^a, JUAN JIMÉNEZ^{a, b}, ANDRÉS SALAZAR^{b*}

^a Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, Cali, Colombia.

^b Universidad Javeriana Cali, Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas, Cali, Colombia.

Resumen. Se estima una cota superior para el número de puntos críticos de la solución de un problema semilineal elíptico con condición de Dirichlet nula en el borde de un dominio planar. El resultado se obtiene en dominios simétricos con respecto a una recta y convexos en la dirección ortogonal a la misma.

Palabras clave: Principio del máximo, puntos críticos, componentes conexas, simetría.

MSC2010: 35J25, 35J91, 74K15.

Critical points and symmetries in elliptic problems

Abstract. In this paper we estimate an upper bound for the number of critical points of the solution to a semilinear elliptic problem with vanishing Dirichlet condition on a bounded planar domain. The result is obtained assuming that the domain is symmetric with respect to a line and convex in the orthogonal direction to the line of symmetry.

Keywords: Maximum principle, critical points, connected component, symmetry.

1. Introducción

Un modelo conocido para la deflexión de una membrana elástica, sujeta en el borde, bajo la acción de una fuerza externa, está dado por la solución u del problema semilineal elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

*E-mail: andresmsalazar@javerianacali.edu.co

Recibido: 20 de septiembre de 2016, Aceptado: 05 de abril de 2017.

Para citar este artículo: J. Arango, J. Jiménez, A. Salazar, Puntos críticos y simetrías en problemas elípticos, *Rev. Integr. Temas Mat.* 35 (2017), No. 1, 1–9.

donde Ω es un dominio planar con borde $\partial\Omega$ suave a trozos y f es una función a valor real que satisface $f(0) > 0$. La existencia, unicidad y regularidad de las soluciones de (1) es un problema resuelto en muchas de las situaciones de interés práctico.

Por ejemplo, si Ω es un dominio abierto y acotado, y f es una función de Lipschitz continua y decreciente, entonces existe una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema (1), (véase [7, Teorema 11.2 y Observación 11.2]). La regularidad de la solución del problema (1) depende de la suavidad de $\partial\Omega$ y de la regularidad de f . En particular, si $\partial\Omega$ es analítica y f es real analítica, la solución u es real analítica (véase [13]). Si $f(0) > 0$, mediante la técnica del principio de comparación (véase [7, Teorema 11.1]) se tiene que la solución u de (1) es no negativa.

Por el contrario, poco se sabe sobre las propiedades geométricas de las soluciones del problema (1). Cuando u es una solución clásica de (1) se infiere que u debe tener al menos un punto crítico. Pero, ¿cuántos puntos críticos existen?, ¿cuál es su naturaleza?, ¿dónde están ubicados? No se conocen respuestas generales a estas preguntas, ni siquiera en el caso lineal (conocido como el problema de torsión)

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

En 1971 Makar–Limanov [12] demostró que, cuando $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio planar convexo, entonces la solución u del problema de torsión tiene un único punto crítico y sus conjuntos de nivel son también convexos. En razón a que el problema de torsión modela situaciones físicas de las que se tiene bastante información experimental, el resultado de Makar–Limanov era de esperarse. Lo que sorprende un poco es que tuvieran que transcurrir casi 200 años desde que Saint–Venant y Laplace en el siglo XVIII estudiaran el problema de torsión, hasta el resultado de Makar–Limanov en 1971.

Después del trabajo seminal de Makar–Limanov vendrían otros desarrollos, como los debidos a Caffarelli y Spruck [5], Kawohl [11], Alessandrini [1], Sakaguchi [15], Cabré y Chanillo [4], Finn [9], Greco [10], Arango y Gómez [2], que generalizan y amplían el hoy clásico Teorema de unicidad de puntos críticos y de convexidad de conjuntos de nivel de Makar–Limanov. En líneas generales, el estado del arte para conjuntos planares no convexos y con frontera suave se consigna en el trabajo de Arango y Gómez [3].

Dada la dificultad para hallar estimativos generales sobre el número de puntos críticos que puede tener la solución u de (1), nos limitaremos a dominios simétricos con respecto a una recta y que son convexos en la dirección ortogonal a la misma. En tales dominios probaremos en el Teorema 3.5, que si $\partial\Omega$ admite localmente una parametrización analítica, y si f es analítica, entonces el número de puntos críticos de u no supera la mitad del número de elementos de $\partial\Omega$ que tienen dirección tangente paralela a τ , donde τ es el vector director de la recta de simetría. Un dominio con las características de simetría y convexidad en una dirección no es necesariamente convexo, por lo que el Teorema 3.5 es un resultado no trivial y de alguna relevancia. Hasta donde los autores están informados se trata de un resultado nuevo.

2. Los conjuntos nodales N_θ

Supondremos en lo que sigue que $\partial\Omega$ admite localmente una parametrización analítica, y que el término no lineal f de (1) es una función analítica y decreciente definida en los números reales. Bajo tales hipótesis, la solución u del problema (1) es real analítica y admite una extensión real analítica a un dominio abierto que incluye $\bar{\Omega}$ (véase [13]). Escribiremos:

$$\mathbb{K} = \{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\}.$$

Sea $\theta \in \mathbb{S}^1$ y u una solución del problema (1). La derivada direccional de u en la dirección θ se denotará con u_θ y escribiremos N_θ para denotar el conjunto nodal de u_θ . De manera más precisa:

$$u_\theta(x) = \nabla u(x) \cdot \theta, \quad N_\theta = \{x \in \bar{\Omega} : u_\theta(x) = 0\}. \quad (3)$$

Es claro que para cualquier $\theta \in \mathbb{S}^1$ se tiene que $\mathbb{K} \subset N_\theta$. Además, si θ_1 y θ_2 son dos direcciones no colineales de \mathbb{S}^1 , entonces $\mathbb{K} = N_{\theta_1} \cap N_{\theta_2}$.

Determinar a qué conjunto nodal N_θ pertenece un punto de $\partial\Omega$ es un procedimiento sencillo. En efecto, la condición de borde $u = 0$ en $\partial\Omega$ en el problema (1) implica que un punto $p \in \partial\Omega$ está en N_θ si y sólo si la dirección θ es tangente a $\partial\Omega$ en p .

En lo que resta de esta sección mostraremos algunas propiedades de los conjuntos nodales N_θ . Para ello es conveniente introducir la notación $H_u(x)$ para referirse a la matriz Hessiana de la solución u de (1). Dado que

$$\nabla u_\theta(x) = H_u(x)\theta,$$

resulta claro que si $p \in N_\theta$ y $H_u(x)\theta \neq 0$, es decir, si p es un punto regular de u_θ , entonces el Teorema de la Función Implícita garantiza que N_θ es localmente una curva cerca de p . En el caso en que p sea un punto singular de u_θ , será preciso acudir a resultados más refinados para determinar la estructura local de N_θ cerca de p . El siguiente resultado se puede consultar en la referencia [6] en un contexto más general.

Teorema 2.1 ([6, Teorema 2.5]). *Sea $h \in C^\infty(\Omega)$. Si v es una solución no nula de*

$$(\Delta + h(x))v = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (4)$$

entonces los puntos singulares de v en el conjunto nodal son aislados. Más aún, en un punto singular p el conjunto nodal de v es localmente homeomorfo al conjunto nodal de un polinomio armónico de grado mayor o igual a 2 cerca del origen; además, el conjunto nodal de v divide a Ω en un número finito de subregiones conexas.

Recurriremos al Teorema de Cheng para describir la estructura global del conjunto nodal N_θ en todo $\bar{\Omega}$.

Lema 2.2. *Supongamos que f es analítica, Ω es acotado, y su borde $\partial\Omega$ es analítico. Entonces para cada $\theta \in \mathbb{S}^1$ el conjunto nodal N_θ tiene un número finito de componentes conexas. Cada componente conexa es, o bien un punto aislado en el borde $\partial\Omega$, o se puede descomponer en una unión finita de cadenas, con cada cadena compuesta por un número finito de arcos en $\bar{\Omega}$, tales que dos arcos consecutivos tienen un punto singular de u_θ como único punto en común. Más aún, cada cadena, o es una curva de Jordan o interseca el borde $\partial\Omega$ en dos puntos.*

Demostración. De (1) se sigue que u_θ satisface

$$(\Delta + h(x))u_\theta = 0 \quad \text{con} \quad h(x) = f'(u(x)), \quad x \in \Omega,$$

donde u es la solución del problema (1). Por otro lado, se sabe (véase por ejemplo [8, p. 19]) que la estructura local del conjunto nodal de un polinomio armónico de grado mayor o igual que 2 cerca del origen es un sistema equiangular de rayos que se cruzan en el origen (véase Figura 1). El Teorema de Cheng describe entonces la estructura local del conjunto nodal N_θ cerca de un punto singular $p \in \Omega$ de u_θ . Como ya se afirmó, cerca de puntos regulares N_θ es localmente una curva. En consecuencia, el conjunto nodal N_θ forma una red de arcos que se bifurca en puntos singulares de u_θ en conjuntos equianguulares de arcos. Por el Teorema de Cheng, los puntos de bifurcación son finitos; en consecuencia, el número de componentes conexas de N_θ es finito. Resulta claro entonces que cada componente conexa de N_θ está compuesta por una unión finita de cadenas de arcos. Dos arcos consecutivos tienen un punto singular de u_θ como único punto en común. Ninguna cadena puede terminar en un punto $p \in \Omega$, pues en tal caso p sería un punto singular de u_θ , y por el Teorema de Cheng se llegaría a una contradicción, dado que N_θ se bifurcaría en p y la cadena continuaría al menos con un arco más que empieza en p .

Por otro lado, si una componente conexa de N_θ es disjunta del interior Ω , entonces debe reducirse a un punto. De lo contrario habría infinitos puntos en el borde $\partial\Omega$ con recta tangente paralela a una misma dirección θ , lo que sería una contradicción a que $\partial\Omega$ es analítica y Ω es acotado. \square

Observación 2.3. Supongamos válidas las hipótesis del Lema 2.2. Si Ω es simplemente conexo y f es decreciente, entonces ninguna dirección $\theta \in \mathbb{S}^1$ tiene conjuntos nodales N_θ que contengan curvas de Jordan. En efecto, si $\gamma \subset N_\theta$ es una curva de Jordan, existe un dominio $D \subset \Omega$, con $\partial\Omega = \gamma$, tal que u_θ satisface el problema de contorno

$$\begin{cases} (\Delta + h(x))u_\theta = 0 & \text{en } D, \quad \text{con } h(x) = f'(u(x)), \\ u_\theta = 0 & \text{sobre } \partial D. \end{cases}$$

Como f es decreciente, $h(x) = f'(u(x)) \leq 0$ para todo $x \in D$. Como consecuencia inmediata del principio del máximo (véase [16, Teorema 2.1.1]) se tiene que $u_\theta(x) \equiv 0$, $x \in D$, es la única solución del problema de contorno en consideración. Como u es analítica, también lo es u_θ , y por eso $u_\theta(x) \equiv 0$, $x \in \bar{\Omega}$. Pero eso implica que todos los puntos de $\partial\Omega$ tienen un único θ como dirección tangente. Esto contradice el supuesto de que Ω es acotado y que tiene borde analítico.

Ejemplo 2.4. Considere la función $u = u(x_1, x_2)$ definida mediante

$$u(x_1, x_2) = -\frac{x_2^2}{2} - 3x_1^4 + x_1^3 x_2 + 18x_1^2 x_2^2 - x_1 x_2^3 - 3x_2^4 + \frac{1}{500},$$

y sea Ω la componente conexa del conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid u(x) > 0\}$ que contiene al origen (véase Figura 1). Por cálculo directo se tiene que $-\Delta u = 1$, con lo que u satisface el problema (2) en Ω . Sea $\theta = (1, 0)$ de manera que $N \equiv N_\theta$ es la curva nodal de u_{x_1} . La Figura 1 muestra la región Ω y el conjunto N . Se verifica sin dificultad que el gradiente de u_{x_1} se anula en el origen, por lo cual el origen es punto singular de u_{x_1} . La estructura

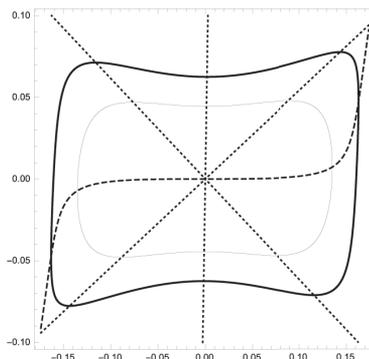


Figura 1. La frontera $\partial\Omega$ del ejemplo 2.4, en línea gruesa continua; la curva de nivel $u = 1/1000$, en línea continua delgada; el conjunto nodal $N \equiv N_\theta$ con $\theta = (1, 0)$, en línea punteada (nótese que N_θ forma localmente un sistema equiangular en el origen); y el conjunto nodal $N_{(0,1)}$, con línea interrumpida. El origen es el único punto singular de $u_\theta \equiv u_{x_1}$.

de N cerca del origen es ciertamente un conjunto equiangular de tres rayos que se cruzan en el origen. Los demás puntos de N son puntos regulares de u_{x_1} , y localmente N es una curva en los puntos distintos del origen. El conjunto $N \cap \partial\Omega$ es finito, y sus elementos son precisamente los puntos de $\partial\Omega$ que tienen tangente horizontal. En este ejemplo u tiene al origen como único punto crítico.

El siguiente resultado muestra la estructura general del conjunto crítico \mathbb{K} .

Teorema 2.5. *Suponga que Ω es un dominio planar acotado con frontera $\partial\Omega$ analítica, y que f es una función analítica decreciente con $f(0) > 0$. Si u es una solución de (1), entonces el conjunto crítico \mathbb{K} de u se compone de un número finito tanto de puntos aislados como de curvas de Jordan. Además, si existe alguna curva de Jordan en \mathbb{K} , esta es una curva analítica y Ω no es simplemente conexo.*

Demostración. Es en esencia la misma demostración del Teorema 3.1 de Arango y Gómez (véase [2]). No obstante, el Teorema 3.1 se refiere a $\Delta u = f(u)$ con la hipótesis de que f es creciente. Ahora bien, la ecuación (1) está dada por $-\Delta u = f(u)$. El signo menos conduce a la hipótesis de que f sea decreciente, tal cual se enuncia en el Teorema 2.5 de este trabajo. □

3. Simetría y convexidad en una dirección

En esta sección se precisan los resultados del Teorema 2.5 en dominios planares simétricos que son convexos en la dirección ortogonal a una recta de simetría. Tales dominios son simplemente conexos. Como consecuencia del Teorema 2.5 se tiene que el conjunto crítico \mathbb{K} está formado por un número finito de puntos. El resultado principal de este trabajo se consigna en el Teorema 3.5, y consiste en estimar una cota superior para la cardinalidad de \mathbb{K} en tales dominios.

Lema 3.1. *Con las hipótesis del Teorema 2.5, sea u una solución del problema (1) y $\theta \in \mathbb{S}^1$ una dirección arbitraria. Si Ω es simplemente conexo, entonces el número de componentes*

conexas de N_θ en Ω es no nulo y no supera la mitad del número de elementos de $\partial\Omega$ que tienen dirección tangente paralela a θ .

Demostración. Como se argumentó en la introducción, existe una única solución u del problema (1), y ella es analítica. Siguiendo los argumentos de [2], Lemma 2.2, se demuestra que $\Delta u < 0$. Se llama la atención al lector acerca de que en [2] el problema se plantea como $\Delta u = f(u)$ y f creciente, y lo que se demuestra en [2] es que $\Delta u > 0$. En el contexto de este trabajo se tiene $-\Delta u = f(u)$, con f decreciente.

Ahora bien, de $-\Delta u > 0$ se sigue del principio del máximo que $u > 0$ en Ω . Por el lema de punto de frontera de Hopf, los puntos críticos de u no pueden estar en el borde $\partial\Omega$. Sea pues $p \in \Omega$ un punto crítico de u , y $\theta \in \mathbb{S}^1$ una dirección arbitraria. Es claro que $p \in N_\theta$, por lo que existe al menos una componente conexa de N_θ que pasa por p ; de hecho, hay una única componente conexa de N_θ que pasa por p .

Por otro lado, por el Lema 2.2, a cada componente conexa de N_θ en Ω se le puede asociar una cadena finita de arcos $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ tal que cada arco de la cadena está en N_θ y la unión $\Gamma \equiv \cup_j \Gamma_j$ es conexa. Por la Observación 2.3, Γ no puede ser un curva de Jordan. En consecuencia Γ interseca $\partial\Omega$ en exactamente dos puntos. \square

Ejemplo 3.2. Como ilustración del Lema 3.1, consideremos el caso tratado en el Ejemplo 2.4. Como se mencionó, $N_{(1,0)} \cap \partial\Omega$ tiene 6 elementos. Entonces el Lema 3.1 establece que 3 es cota superior para el número de componentes conexas de $N_{(1,0)}$. En efecto, $N_{(1,0)}$ tiene una componente conexa. Por otro lado, tomando $\theta = (0, 1)$ se tiene que $N_{(0,1)} \cap \partial\Omega$ tiene dos elementos, y el Lema 3.1 suministra la cota óptima para el número de componentes conexas de $N_{(0,1)}$.

El siguiente resultado establece que en el problema (1) las simetrías del dominio Ω se traducen en simetrías de las soluciones u , y que la recta de simetría es esencialmente el conjunto nodal N_ν donde ν es una dirección normal a la recta de simetría.

Teorema 3.3. *Bajo las hipótesis del Teorema 2.5, sea Ω simétrico con respecto a una recta ℓ y convexo en la dirección ν normal a ℓ . Si u es una solución no negativa del problema (1), entonces u es simétrica con respecto a ℓ y $N_\nu \equiv \bar{\Omega} \cap \ell$.*

La demostración del Teorema 3.3, con hipótesis más generales, se puede consultar en [7, Teorema 18.1]. Este teorema permite establecer explícitamente la forma del conjunto nodal N_ν , donde ν es una dirección ortogonal a ℓ . Una implicación del Teorema 3.3 es que los puntos críticos de u se encuentran en el conjunto $\bar{\Omega} \cap \ell$, ya que $\mathbb{K} \subset N_\nu$.

Corolario 3.4. *Con las mismas hipótesis del Teorema 3.3, si θ es una dirección arbitraria y θ^* su dirección reflejada con respecto a la recta ℓ , entonces $p \in N_\theta$ si y sólo si $p^* \in N_{\theta^*}$, donde p^* es el punto reflejado de p con respecto a ℓ . En particular, si τ es una dirección paralela a ℓ , entonces N_τ es simétrico con respecto a ℓ .*

Demostración. Sea $\theta \in \mathbb{S}^1$ una dirección arbitraria y $p \in \Omega$, y denotemos con θ^* y p^* la dirección y el punto reflejado con respecto a ℓ . Por el Teorema 3.3, u es simétrica con respecto a ℓ . En consecuencia existen bolas en Ω con centro p y p^* y radio común $\epsilon > 0$,

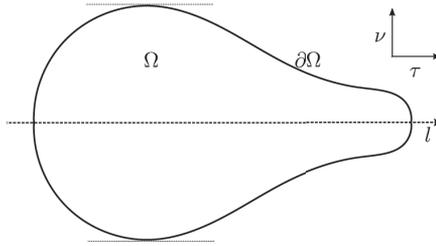


Figura 2. Dominio no convexo simétrico con respecto a la recta horizontal que pasa por el origen y convexo en dirección vertical.

tales que para todo $-\epsilon < t < \epsilon$, la función u coincide en los puntos $p + t\theta$ y $p^* + t\theta^*$. Resulta entonces claro que

$$\nabla u(x) \cdot \theta \Big|_{x=p} = \nabla u(x) \cdot \theta^* \Big|_{x=p^*},$$

de lo que se sigue el resultado. ☑

Teorema 3.5. *Bajo las hipótesis del Teorema 2.5, sea Ω un dominio simétrico con respecto a una recta ℓ y convexo en la dirección ν normal a ℓ . Si u resuelve el problema (1), entonces el número de puntos críticos de u no supera la mitad del número de elementos de $\partial\Omega$ que tienen dirección tangente paralela a τ , donde τ es el vector director de ℓ .*

Demostración. Afirmamos que cada componente conexa de N_τ en Ω tiene a lo más un punto crítico. En efecto, si p y q son puntos críticos de u que están en la misma componente conexa de N_τ , entonces existe una cadena finita de arcos $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ en $N_\tau \cap \Omega$ que tiene a p y a q como puntos extremos y tal que la unión Γ de los arcos es conexa. En virtud del Corolario 3.4, la reflexión Γ^* de Γ con respecto a ℓ también es subconjunto de N_τ . Por otra parte, $\Gamma \cup \Gamma^*$ es una curva de Jordan, lo que es contradictorio según la Observación 2.3.

A partir de la afirmación, la demostración del resultado es inmediata, dado que a cada componente conexa (Lema 2.2) de N_τ en Ω podemos asociar exactamente dos puntos del borde $\partial\Omega$. Y precisamente los elementos de $\partial\Omega \cap N_\tau$ se caracterizan por tener una recta tangente paralela a τ . ☑

Corolario 3.6. *Bajo las hipótesis del Teorema 3.5, si $\partial\Omega$ tiene exactamente dos puntos con tangente paralela a τ , entonces u tiene exactamente un punto crítico.*

Los dominios a los que hace referencia el Corolario 3.6 no son necesariamente convexos, de allí que el resultado es no trivial, y nuevo, hasta donde los autores están informados. La Figura 2 representa un dominio Ω no convexo que satisface las hipótesis del corolario. En consecuencia, si u es una solución no negativa del problema (1), entonces u tiene un único punto crítico en el dominio Ω .

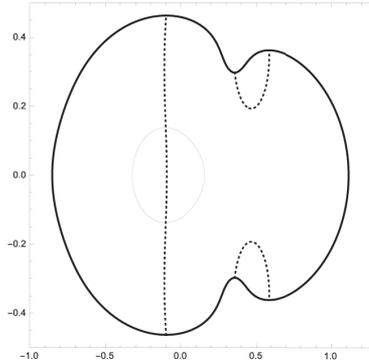


Figura 3. Dominio Ω del Ejemplo 3.7. Aquí se han representado con una línea delgada la curva de nivel $u = 7/100$, y con una línea gruesa la frontera $\partial\Omega$. El conjunto nodal N_τ con $\tau = (1, 0)$ se ha señalado con una línea punteada. El dominio es simétrico con respecto a la recta que pasa por el origen y es paralela a la dirección τ .

Ejemplo 3.7. Se define u mediante

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{10}(1 - x_1^2 - 4x_2^2) + \frac{1}{100} \sum_{i=1}^4 \ln [(x_1 + a_i)^2 + (x_2 + b_i)^2]. \quad (5)$$

con $a_1 = a_2 = 3k$, $a_3 = a_4 = -k$, $b_2 = b_4 = -k$, y el valor $k = 35/100$. Por cálculo directo se tiene $-\Delta u = 1$ en $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : u(x, y) > 0\}$ y $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. La Figura 3 muestra algunas curvas de nivel de u y el conjunto nodal N_τ con $\tau = (1, 0)$. Se tienen exactamente 6 puntos en $\partial\Omega$ con tangente horizontal. El Teorema 3.5 estima que u tiene a lo más 3 puntos críticos. Por cálculo directo se verifica que u tiene un único punto crítico en Ω . Nótese que este dominio es simétrico con respecto al eje x y convexo en la dirección $(0, 1)$; con esto se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.5. Este ejemplo muestra que pueden existir componentes conexas de N_τ sin puntos críticos de u . Los autores aún no saben cómo identificar tales componentes a partir de la geometría del borde $\partial\Omega$.

4. Conclusiones y perspectivas

En este artículo se estima el número de puntos críticos de la solución de un problema elíptico de contorno que modela la deflexión de una membrana con un eje de simetría, sujeta en el borde y sometida a una fuerza externa. El resultado más importante se consigna en el Teorema 3.5, cuya demostración supone que el borde $\partial\Omega$ satisface condiciones algo restrictivas. Los autores conjeturan que la condición de analiticidad del borde $\partial\Omega$ puede debilitarse sensiblemente. Por otro lado, los estimativos del Teorema 3.5 pueden mejorarse si se identifican las componentes conexas N_τ sin puntos críticos de u . Esto es el tema de una investigación en curso.

Agradecimientos: Los resultados de este artículo se inspiraron en el trabajo de investigación ([14]) del profesor A. M. Rivera de la Universidad Javeriana de Cali. Los autores

agradecen el aporte generoso de los revisores anónimos, quienes señalando errores e imprecisiones ayudaron a desarrollar la versión definitiva de este artículo. Igualmente dan las gracias a sus respectivas instituciones, la Universidad del Valle (Proyecto de Investigación 71021) y la Universidad Javeriana de Cali, por el apoyo brindado.

Referencias

- [1] Alessandrini G., “Critical points of solutions of elliptic equations in two variables”, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* 14 (1987), No. 2, 229–256.
- [2] Arango J. and Gómez A., “Critical points of solutions to elliptic problems in planar domains”, *Commun. Pure Appl. Anal.* 10 (2011), No. 1, 327–338.
- [3] Arango J. and Gómez A., “Critical points of solutions to quasilinear elliptic problems”, *Nonlinear Anal.* 75 (2012), No. 11, 4375–4381.
- [4] Cabré X. and Chanillo S., “Stable solutions of semilinear elliptic problems in convex domains”, *Selecta Math. (N.S.)* 4 (1998), No. 1, 1–10.
- [5] Caffarelli L. and Spruck J., “Convexity properties of solutions to some classical variational problems”, *Comm. Partial Differential Equations* 7 (1982), No. 11, 1337–1379.
- [6] Cheng S., “Eigenfunctions and nodal sets”, *Comment. Math. Helv.* 51 (1976), No. 1, 43–55.
- [7] Chipot M., *Elliptic equations: an introductory course*, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [8] Duren P., *Harmonic mappings in the plane*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [9] Finn D., “Convexity of level curves for solutions to semilinear elliptic equations”, *Commun. Pure Appl. Anal.* 7 (2008), No. 6, 1335–1343.
- [10] Greco A., “Extremality conditions for the quasi-concavity function and applications”, *Arch. Math. (Basel)* 93 (2009), No. 4, 389–398.
- [11] Kawohl B., “When are solutions to nonlinear elliptic boundary value problems convex?”, *Comm. Partial Differential Equations* 10 (1985), No. 10, 1213–1225.
- [12] Makar-Limanov L., “Solution of Dirichlet’s problem for the equation $\Delta u = -1$ in a convex region”, *Math. Notes* 9 (1971), No. 1, 52–53.
- [13] Müller F., “On the continuation of solutions for elliptic equations in two variables”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 19 (2002), No. 6, 745–776.
- [14] Rivera A., “Puntos críticos de soluciones de problemas elípticos con condición de Dirichlet”, Tesis de maestría, Universidad del Valle, Cali, 2006, 57 p.
- [15] Sakaguchi S., “Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems”, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* 14 (1987), No. 3, 403–421.
- [16] Pucci P. and Serrin J., *The maximum principle*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.