Propuesta para seleccionar una solución en un problema de bancarrota

Martínez Panero, Miguel
Meneses Poncio, Luis Carlos
Departamento de Economía Aplicada
Grupo de Investigación PRESAD
Universidad de Valladolid

RESUMEN

Para solucionar un problema de bancarrota es necesario determinar las cantidades asignadas a cada agente teniendo en cuenta sus reclamaciones, que en conjunto superan la cantidad a repartir. Ahora bien, decantarse por una regla de reparto supone aceptar ciertos principios y rechazar otros. Así, en una situación concreta, una regla idónea sería aquella que cumpliera las propiedades que los agentes consideren más deseables. En este trabajo, seguimos un enfoque experimental y, a partir de cuatro reglas de reparto clásicas (proporcional, igual ganancia, igual pérdida y Talmud) diseñamos un procedimiento que permite seleccionar la que más se adecúa a las opiniones de los agentes sobre las propiedades que verifican dichas reglas. Posteriormente, agregamos la información obtenida sobre todas las propiedades para conseguir la opinión colectiva sobre cada una de ellas. Se obtiene entonces un orden social de propiedades del cual podemos inferir la regla de reparto a aplicar.

Palabras clave: Problema de bancarrota, regla de reparto, análisis experimental, agregación.

Área temática: Aspectos Cuantitativos del Fenómeno Económico

ABSTRACT

In order to solve a bankruptcy problem, it is necessary to take into account the claims for determining the sharing procedure to be used, provided that the amount of the claims is greater than the estate. However, the selection of the division rule entails to accept some principles and refuse others. Therefore, a suitable rule for a specific setting should fulfill the more desirable properties in agents' opinion. To this aim, with an experimental treatment, four classical division rules appearing in the literature (proportional, constrained equal-awards, constrained equal-losses and Talmud) are considered, and we devise a procedure to select the closest one to the agents' opinions on the properties fulfilled by such rules. Then the information of all the agents on all the properties is aggregated in order to obtain a collective opinion. This provides a social order of the properties which, finally, allow us to determine the division rule.

***Keywords*:** Bankruptcy problem, division rule, experimental analysis, aggregation

<u>Agradecimientos:</u>

Los autores desean agradecer la financiación de este trabajo a través del proyecto ECO2009-07332 del Ministerio de Ciencia e Innovación.

1. INTRODUCCIÓN

El tratamiento de las reglas de reparto se acomete usualmente dentro de la Teoría de la Elección Social (así, por ejemplo, en Brams, Conrad, Lucas y Taylor (1998) y Villar (2006)). En dicho contexto, el análisis de tales reglas se puede abordar desde dos perspectivas. La primera de ellas trata de la asignación de bienes infinitamente divisibles (caso continuo), encarando problemas de tipo bancarrota (véanse, por ejemplo, Aumann y Maschler (1985) y Marco, Gadea-Blanco y Jiménez-Gómez (mimeo)), *cake cutting* (Brams y Taylor (1996), Brams, Jones y Klamler (2006)), etc. En la segunda, los objetos a repartir no pueden ser divididos (caso discreto). Aquí quedarían englobados problemas de tipo *house allocation* (Ehlers y Klaus (2007)), distribución de escaños (Balinski y Young (1982)), asignación de bienes públicos (Rodríguez-Mínguez, Herrero y Pinto-Prades (2004), Herrero (2008)), reparto de herencias, etc.

El presente trabajo debe adscribirse a la primera línea de investigación de las anteriormente citadas, y más concretamente, al análisis de los problemas de tipo bancarrota. En estos problemas se desea repartir una cantidad limitada de un bien perfectamente divisible sobre el que distintos agentes realizan reclamaciones, de manera que la suma de sus peticiones supera la cantidad total a distribuir (una panorámica accesible sobre este tipo de problemas puede encontrarse en Espinel (2007) y Malkevitch (2010), mientras que un desarrollo más amplio y profundo se puede consultar en Thomson (2003)). Para resolver tal conflicto es necesario un mecanismo que determine qué cantidad se asigna a cada agente y que atienda las reclamaciones efectuadas por ellos. En este contexto, una fructífera vía de actuación ha sido la de caracterizar diferentes reglas de reparto mediante el método axiomático. Sin embargo, salvo los trabajos de Marco, Gadea-Blanco y Jiménez-Gómez (mimeo) y de Herrero, Moreno-Ternero y Ponti (2009), son escasos los experimentos que testen empíricamente la viabilidad de los axiomas propuestos. Como veremos, nosotros nos situamos en una doble vertiente: asumiremos el enfoque axiomático tan sólo como referencia para un tratamiento experimental del problema típico de bancarrota.

Para ello, nuestro punto de partida ha sido la consideración de que, ante diversas situaciones de división de bienes escasos, no se puede determinar monolíticamente la regla de reparto a aplicar. En otras palabras, pudiera darse el caso de que la que fuese deseable en una situación concreta, pudiera no serlo en otra. Y es que decantarse por un modo de asignación supone aceptar ciertos principios inherentes a la regla utilizada y rechazar otros. Así pues, en una determinada situación de reparto, una regla idónea sería aquella que se amoldara a las propiedades que los agentes, como colectivo, considerasen más deseables.

Para acotar nuestro trabajo, consideraremos cuatro reglas de reparto bien conocidas en la literatura (se han denominado "clásicas", véase Herrero y Villar (2001)): proporcional, igual pérdida, igual ganancia y Talmud. Basándonos en ellas (o, más bien, en las propiedades que las caracterizan) diseñaremos un procedimiento que permita seleccionar la que más se adecúa a las opiniones de los agentes sobre las propiedades que verifican tales reglas. Con este fin, como ya se ha apuntado, seguimos un enfoque experimental en el que, en primer lugar, los agentes se manifiestan, no sobre reglas en sí, sino sobre propiedades cuyo cumplimiento sería deseable para ellos en mayor o menor grado. Posteriormente, agregaremos la información de todos los agentes sobre tales propiedades para conseguir la opinión colectiva sobre cada una de ellas. Esto nos permite obtener un orden social de las propiedades consideradas a partir del cual podemos, finalmente, inferir la regla de reparto que se aplicará en el problema de bancarrota en concreto.

El trabajo se organiza como sigue. En la sección 2, tras ejemplificar diversos casos de bancarrota usuales en el mundo real, se planteará el problema general introduciendo la notación y simbología con que se formalizará el resto del trabajo. Además, se introducen las cuatro reglas clásicas de entre las que se determinará, en cada caso, la más adecuada. Aquí, aunque sin renunciar a la formalización, nuestro enfoque es claramente expositivo, ilustrando las asignaciones proporcionadas por las reglas citadas mediante un ejemplo común. En la sección 3 se fija un elenco de propiedades que, combinándose de distintas formas, sirven para caracterizar las reglas de reparto prefijadas. La sección 4 presenta el procedimiento de agregación de *Majority Judgment* que utilizaremos para agregar las opiniones de los agentes sobre las propiedades y que nos permitirá establecer un orden social de las mismas. La sección 5 presenta nuestra propuesta de selección de la regla de reparto idónea, ejemplificándola con diversos casos prácticos. Algunas consideraciones finales cierran el trabajo.

2. PROBLEMAS DE BANCARROTA

Supongamos que se dispone de una cantidad limitada de un bien perfectamente divisible (dinero, agua, etc.) que hay que distribuir entre varios agentes, cada uno de los cuales realiza una reclamación sobre ese bien que puede ser inferior, igual o superior a la cantidad disponible. Una vez formuladas todas las reclamaciones se observa que su suma supera la cantidad total a repartir. Surge así, de manera natural, un problema de bancarrota: el de dividir esa cantidad limitada del bien entre todos los agentes.

La situación anterior de asignación de recursos escasos, que según la clásica definición de Robbins (1932) constituye la esencia misma del quehacer económico, no es en absoluto inusual, y de hecho tiene una amplia tradición que se puede remontar al menos a la Biblia (recuérdese el célebre juicio de Salomón, véase Brams (2003)) o al Talmud hebreo (véanse O'Neill (1982), Aumann y Maschler (1985)). Como veremos posteriormente, estos autores utilizaron la última fuente (en su caso, una serie de casos de reparto de bienes y herencias) no como mera referencia histórica, sino como punto de partida para sus análisis teóricos.

Ya en el mundo actual, se pueden nombrar numerosos casos de problemas bancarrota que requieren el arbitrio de un reparto ulterior. Citaremos, sin ser exhaustivos, los siguientes.

- *Concursos de acreedores* de empresas en quiebra, donde se plantea cómo repartir los activos entre los distintos acreedores.
- *Recortes presupuestarios*, por ejemplo, de gasto público, en los que un Gobierno debe decidir que Ministerios u Organismos soportarán el ahorro consiguiente.
- *Financiación de medicamentos* por parte de las Comunidades Autónomas, que han de decidir el porcentaje del coste de cada medicamento que se subvenciona a los ciudadanos.

- *Asignación de recursos hídricos* regulados por las Confederaciones Hidrográficas para sus posibles usos (riego, consumo doméstico, consumo industrial, etc.).

Ante tal variedad de contextos, cabe considerar que el problema, no ya del reparto, sino de la selección de la regla que lo lleve a cabo, no es, unívoco. Es plausible pensar, pues, que en una de tales situaciones, la determinación de un elenco de propiedades exigibles determine de alguna manera la regla a utilizar. En nuestro trabajo, la idea clave es la de que son los agentes involucrados en el reparto (y no un decisor externo) quienes se manifiestan sobre el grado de cumplimiento de ciertas propiedades que determinan (o caracterizan) distintas reglas, y basándose en tales estimaciones se estipulará aquella que mejor se acomode a las opiniones emitidas por los agentes. Nuestro enfoque, por tanto, es intrínseco o endógeno: la asignación no viene dada externamente sino que de alguna manera se consensúa entre los reclamantes involucrados. Por otro lado, el tratamiento no es monolítico, sino que permite flexibilidad al amalgamar las consideraciones de los agentes.

Ahora bien, aunque de reciente tradición en el marco de la Teoría de la Elección Social (y tengamos en cuenta que esta disciplina nace a mediados del siglo XX), el estudio de las distintas reglas y sus propiedades es muy amplio y sistematizado (véase, por ejemplo, Thomson (2003)). Aunque tendremos presente este trabajo, nosotros nos hemos centrado en las cuatro reglas más recurrentes en la literatura, idea que también sigue Villar (2006) desde un enfoque axiomático en un trabajo que será referencial para nosotros en cuanto al espectro de propiedades a considerar. De este último autor también seguimos sustancialmente la misma terminología en la formalización del problema general de bancarrota que expondremos a continuación.

2.1. Planteamiento y notación

Denotaremos por $E > 0$ a la cantidad disponible para repartir o presupuesto (*estate*) entre un conjunto de agentes (*society*) $M = \{1,2,\dots,m\}$. Cada uno de estos agentes realiza una reclamación (*claim*) c_i, $i \in M$, de tal forma que $c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in \mathbb{R}_+^n$ es el vector de reclamaciones de los m agentes y $C = \sum_{i \in M} c_i$ representa la reclamación agregada de todos ellos. El problema de bancarrota surge cuando el presupuesto no es suficiente para satisfacer la reclamación agregada, es decir, $C > E$, existiendo de esta forma un déficit $C - E > 0$. El par (E, c) representará el *problema de bancarrota* que habrá que resolver.

La solución del problema de bancarrota consistirá en encontrar un criterio de reparto del presupuesto disponible que asigne a cada agente $i \in M$ una cantidad x_i^* de tal forma que satisfaga, al menos parcialmente, su reclamación. Dado que se trata de repartir un bien del que se dispone de una cantidad insuficiente para cubrir todas las reclamaciones, el criterio a seguir debe verificar que ningún agente reciba más de lo que pida y que, finalmente, se reparta toda la cantidad disponible. Cuando se verifican estas dos condiciones diremos que la solución del problema de bancarrota es una *regla de reparto*.

Así, formalmente una regla de reparto es una función F que asocia a cada problema de reparto (E, c) una única asignación

$$x^* = (x_i^*)_{i \in M} = F(E, c) \in \mathbb{R}_+^n$$

tal que $c_i \geq x_i^* \geq 0$ y $\sum_{i \in M} x_i^* = E$.

La primera condición, además de garantizar que ningún agente va a recibir más de lo que pide, asegura que ningún agente va a tener que aportar ninguna cantidad adicional por el hecho de realizar una reclamación. La segunda nos dice que todo el presupuesto disponible es finalmente repartido.

2.2. Reglas de reparto clásicas

Con el fin de introducir el procedimiento desarrollado en este trabajo, nos centraremos en las reglas de reparto clásicas: la proporcional, la de igual ganancia, la de igual pérdida y la del Talmud o del bien disputado. Entre las reglas de reparto existentes en la literatura y no consideradas en este trabajo podemos citar la del orden de llegada, la del ajuste proporcional, la de Piniles, etc. (véase Thomson (2003)).

2.2.1. Regla de reparto proporcional (Proportional rule)

Esta regla distribuye el presupuesto de forma proporcional a las reclamaciones efectuadas por cada agente. Así, dado un problema de bancarrota (E, c), la regla de reparto proporcional P realiza la siguiente asignación:

$$P(E, c) = \lambda c \text{ donde } \lambda = E/C.$$

Por ejemplo, supongamos un problema en el que se dispone de un presupuesto $E = 900$ unidades para repartir entre 3 agentes que realizan las siguientes reclamaciones: $c_1 = 750$, $c_2 = 500$, $c_3 = 250$. De esta forma, $\lambda = \frac{900}{750+500+250} = 0{,}6$, es decir, el presupuesto sólo cubre el 60% de la suma de las reclamaciones, $C = 1500$. Al aplicar la regla proporcional, la asignación que se realiza a cada agente vendrá dada por $P\big(900, (750, 500, 250)\big) = 0{,}6(750, 500, 250) = (450, 300, 150)$, es decir, el primer agente recibirá 450, el segundo 300 y el tercero 150.

2.2.2. Regla de reparto de igual ganancia (Constrained equal-awards rule)

La regla de igual ganancia equipara las cantidades obtenidas por los agentes, con la restricción de que nadie obtiene más de lo que reclama. De esta forma, dado un problema de bancarrota (E, c), la regla de reparto de igual ganancia, IG, vendrá dada por:

$$IG_i(E, c) = \min\{\lambda, c_i\},$$

siendo λ solución de $\sum_{i \in N} \min\{\lambda, c_i\} = E$.

En el ejemplo anterior, si todos los agentes recibieran la misma cantidad, el agente 3 obtendría 300, superando su petición de 250, lo cual no es admisible. En esta situación, $\lambda = 325$, por lo que la asignación de cada agente será:

- $IG_1\big(900, (750, 500, 250)\big) = \min\{325, 900\} = 325.$
- $IG_2\big(900, (750, 500, 250)\big) = \min\{325, 500\} = 325.$
- $IG_3\big(900, (750, 500, 250)\big) = \min\{325, 250\} = 250.$

2.2.3. Regla de reparto de igual pérdida (Constrained equal-losses rule)

La regla de igual pérdida distribuye el déficit por igual entre todos los agentes, con la restricción de que nadie pierda más de lo que reclama. En un problema de bancarrota (E, c), la regla de reparto de igual pérdida, IP, realiza la siguiente asignación a cada agente:

$$IP_i(E, c) = \max\{0, c_i - \mu\},$$

donde μ es la solución de $\sum_{i \in N} \max\{0, c_i - \mu\} = E$.

En el ejemplo, al distribuir el déficit entre los 3 agentes $\mu = 200$, por lo que la asignación será:

- $IP_1\big(900, (750, 500, 250)\big) = \max\{0, 550\} = 550.$
- $IP_2\big(900, (750, 500, 250)\big) = \max\{0, 300\} = 300.$
- $IP_3\big(900, (750, 500, 250)\big) = \max\{0, 50\} = 50.$

2.2.4. Regla del Talmud o del Bien Disputado (Talmud rule, Contested garment rule)

La regla del Talmud propone que ningún agente obtenga más de la mitad de su reclamación si el presupuesto es inferior a la mitad de la reclamación agregada ni pierda más de la mitad de su reclamación si el presupuesto es superior a la mitad de la reclamación agregada. Aumann y Maschler (1985) formalizaron esta regla basándose en ciertas asignaciones aparentemente paradójicas citadas en el Talmud. Así, dado un problema de bancarrota (E, c), la regla de reparto del Talmud T es la que realiza la siguiente asignación a cada agente:

$$T_i(E, c) = \begin{cases} \min\left\{\frac{c_i}{2}, \lambda\right\} & si \;\; E \leq \frac{C}{2}, \\ \max\left\{\frac{c_i}{2}, c_i - \mu\right\} & si \;\; E \geq \frac{C}{2}, \end{cases}$$

donde λ es solución de $\sum_{i \in N} \min\left\{\lambda, \frac{c_i}{2}\right\} = E$ y μ solución de $\sum_{i \in N} \max\left\{\frac{c_i}{2}, c_i - \mu\right\} = E$.

En el ejemplo que estamos siguiendo, el presupuesto es superior a la mitad de la reclamación agregada. Determinamos $\mu = 237{,}5$ y la asignación de los 3 agentes es:

- $T_1\big(900, (750, 500, 250)\big) = \max\left\{\frac{750}{2}, 750 - 237{,}5\right\} = 512{,}5.$
- $T_2\big(900, (750, 500, 250)\big) = \max\left\{\frac{500}{2}, 500 - 237{,}5\right\} = 262{,}5.$
- $T_3\big(900, (750, 500, 250)\big) = \max\left\{\frac{250}{2}, 250 - 237{,}5\right\} = 125.$

Dependiendo del presupuesto inicial, el reparto propuesto por la regla del Talmud coincide con las reglas de igual pérdida, proporcional o de igual ganancia. Esto se puede ver en la siguiente tabla.

	$\boldsymbol{E = 1200}$ ($\boldsymbol{\mu = 100}$)	$\boldsymbol{E = 750}$ ($\boldsymbol{\lambda = \mu = 237,5}$)	$\boldsymbol{E = 300}$ ($\boldsymbol{\lambda = 100}$)
$\boldsymbol{T_1\big(E, (750, 500, 250)\big)}$	650	375	100
$\boldsymbol{T_2\big(E, (750, 500, 250)\big)}$	400	250	100
$\boldsymbol{T_3\big(E, (750, 500, 250)\big)}$	150	125	100
	=IP	*=P*	*=IG*

3. PROPIEDADES DE LAS REGLAS DE REPARTO

A continuación se introducen las propiedades por las que los agentes se decantarán y de las que emergerá la regla de reparto que finalmente se utilizará en la situación de bancarrota de que se trate. Como ya se ha indicado, tales propiedades (que pueden o no cumplir una regla de reparto en concreto) han sido las utilizadas por Villar (2005) en un trabajo comprehensivo en el que este autor se ha circunscrito a ciertos principios determinantes que, como veremos, caracterizan las cuatro reglas clásicas detalladas en la sección anterior.

3.1. [TI] Tratamiento igualitario (Equal treatment of equals)

El cumplimiento de esta propiedad requiere que iguales reclamaciones por parte de los distintos agentes obtengan iguales asignaciones. Formalmente:

$$c_i = c_j \quad \Rightarrow F_i(E, c) = F_j(E, c).$$

Sin entrar aquí en el debate entre igualdad y equidad, conviene señalar, como hace Villar (2005) que esta propiedad "no dice que todo el mundo sea igual ni que haya repartir a todos por igual". Lo que indica, plausiblemente, es que dos agentes son indistinguibles a efectos de reparto y asignación si reclaman lo mismo.

3.2. [IE] Independencia de escala (Scale invariance)

Esta propiedad estipula que las asignaciones no deben depender de la unidad de medida (ya sea monetaria al cambiar de divisa, de medida al cambiar del sistema anglosajón al métrico decimal, etc.); es decir:

$$F(\lambda E, \lambda c) = \lambda F(E, c) \quad \text{para cualquier } \lambda > 0.$$

Desde un punto de vista matemático se trata de una propiedad de homogeneidad.

Las siguientes propiedades tienen que ver con ajustes, ya sean al alza o a la baja, del presupuesto inicial y en cómo estos repercuten en las cantidades finalmente asignadas respecto de la previsión inicial.

3.3. [CAR] Composición hacia arriba (Composition, Composition up)

Esta es una propiedad de variación al alza: si aumenta la cantidad a repartir, la asignación que obtiene cada agente debe ser la misma tanto si se reparte la cantidad finalmente disponible (E') como si, con los mismos criterios, se añade al reparto del presupuesto inicial (E) lo que obtendría al repartirse el excedente ($E' - E$). Desde un punto de vista formal:

$$E < E' \;\Rightarrow\; F(E', c) = F(E, c) + F\big(E' - E, c - F(E, c)\big).$$

Dicho llanamente, el reparto debe ser el mismo tanto si se asigna todo el presupuesto de una sola vez como si se realiza secuencialmente.

3.4. [CAB] Composición hacia abajo (Path independency, Composition down)

Esta propiedad, homóloga de la anterior, ahora a la baja, impone que si disminuye la cantidad a repartir, entonces las reasignaciones de la nueva cantidad disponible deben coincidir con las que se obtendrían tomando las asignaciones iniciales como nuevas reclamaciones. Con la notación introducida:

$$E > E' \;\Rightarrow\; F(E', c) = F\big(E',\, F(E, c)\big).$$

3.5. [CO] Consistencia (Consistency)

Esta propiedad, también denominada propiedad de refuerzo (*reinforcement*) en contextos votacionales en el marco de la Teoría de la Elección Social, prescribe que la cantidad asignada a cada uno de los agentes de un subgrupo del grupo total de agentes debe ser la misma que la que obtendrían si se realiza un nuevo reparto para dicho subgrupo, con las mismas reclamaciones iniciales, y considerando como cantidad disponible la suma de las asignaciones que recibirían en el reparto global:

$$S \subseteq M \Rightarrow F_i(M, E, c) = F_i\left(S,\ \sum_{i \in S} F_i(M, E, c)\,,\ (c_i)_{i \in S}\right),$$

siendo (M, E, c) un problema con m agentes.

Cabe señalar que si tal consideración se asume a la hora del reparto, ningún agente tendrá interés en volver a discutirlo dado que sus asignaciones no cambiarían.

La siguiente propiedad certifica que no hay diferencia en entender un reparto como problema de ganancias o hacerlo como uno de pérdidas.

3.6. [AD] Autodualidad (Self duality)

Las asignaciones en una solución de reparto deben ser las mismas tanto si se considera dividir la cantidad disponible (presupuesto) como si considera repartir lo que falta para cubrir todas las reclamaciones (déficit). O sea:

$$c - \; F(C - E, c) = F(E, c).$$

A continuación, se detallan propiedades que tienen que ver con la compensación y garantías cubiertas (o denegadas) a pequeñas reclamaciones en comparación con el total a repartir.

3.7. [EXE] Exención (Exemption, conditional full compensation)

Esta propiedad exige que reclamaciones que no superen una cantidad mínima deben ser íntegramente atendidas. Así pues:

$$c_i \leq \alpha \Rightarrow F_i(E, c) = c_i.$$

Villar (2005) considera $\alpha = \frac{E}{m}$ pero otros autores consideran umbrales diferentes.

Esta propiedad también puede entenderse como una prioridad en el reparto para los agentes con pequeñas reclamaciones. Y, por ley, las reglas que se aplican en las bancarrotas de entidades financieras deben atender este principio para favorecer las pretensiones de los pequeños impositores.

3.8. [EXC] Exclusión (Exclusion, Conditional null compensation)

En este caso, las reclamaciones que no superen una cantidad mínima serían íntegramente rechazadas:

$$c_i \leq \alpha \Rightarrow F_i(E, c) = 0.$$

Cabe señalar que Villar considera como umbral el déficit per capita: $\alpha = \frac{C-E}{m}$.

Esta propiedad se tiene en cuenta, por ejemplo, en ciertas situaciones relacionadas con la sanidad donde, por la cuantía que comportan, se pueden financiar medicamentos de primera necesidad o tratamientos médicos irrecusables, mientras que el paciente debe sufragar los correspondientes gastos que sean menos prioritarios y que entrañan un desembolso asequible.

3.9. [AS] Aseguramiento (Securement)

La concesión de garantías mínimas y la determinación de su cuantía en un problema de bancarrota es un aspecto delicado que, como hemos indicado, ha sido tratado experimentalmente por Marco, Gadea-Blanco y Jiménez-Gómez (mimeo).

Nosotros, como venimos haciendo, seguimos aquí el tratamiento de Villar (2005), para quien si una reclamación supera la cantidad disponible la asignación será, al menos, la cantidad disponible dividida entre el número de agentes; en caso contrario, la asignación será, al menos, la reclamación dividida entre el número de agentes. Por consiguiente:

$$F_i(E, c) \geq \frac{1}{m}\min\{c_i,\ E\}.$$

Señalemos que aunque esta propiedad asegura un pago mínimo cada agente, éste no depende de las reclamaciones de los otros agentes.

Distintas combinaciones de las nueve propiedades reseñadas caracterizan o determinan ciertas reglas de entre las consignadas en la sección anterior. Así por ejemplo:

- Moulin (2000) demostró que las únicas reglas que satisfacen simultáneamente las propiedades TI, IS, CAR, CAB y CO son la proporcional, la de igual pérdida y la de igual ganancia.
- Young (1998) probó que la regla proporcional es la única que cumple a la vez las propiedades CAR y AD. Por su parte, Thomson (2003) logró una caracterización análoga para la misma regla sustituyendo CAR por CAB.
- Herrero y Villar (2001) obtuvieron el resultado de que las reglas de igual ganancia e igual pérdida son las únicas que satisfacen a la vez CAB, CO y EXE (para la primera de ellas) o EXC (para la segunda). Caracterizaciones alternativas de estas reglas pueden verse en Herrero y Martínez (2008).
- Por fin, Moreno-Ternero y Villar (2004) probaron que una regla de reparto es la del Talmud si y solo si verifica CO, AD y AS.

Queremos apuntar que, aun restringiéndonos a las cuatro reglas clásicas de reparto (los cuatro mosqueteros de Herrero y Villar (2001)), no hemos pretendido ser exhaustivos en el elenco de propiedades a considerar, y aunque existen caracterizaciones alternativas combinando otros juegos de propiedades (véase Thomson (2003)), en este trabajo nos hemos centrado en las nueve propiedades citadas como grupo representativo y suficientemente amplio para nuestros propósitos. El siguiente cuadro sinóptico de reglas y propiedades consideradas ilustra el comentario anterior y en buena medida da la clave del diseño del experimento que sigue más adelante.

		REGLAS DE REPARTO			
		Proporcional	Igual Ganancia	Igual Pérdida	Talmud
PROPIEDADES	TI	✓	✓	✓	✓
	IE	✓	✓	✓	✓
	CAR	✓	✓	✓	
	CAB	✓	✓	✓	
	CO	✓	✓	✓	✓
	AD	✓			✓
	EXE		✓		
	EXC			✓	
	AS		✓		✓

Cuadro 1. Sinopsis de propiedades de las reglas de reparto clásicas

4. SISTEMA DE AGREGACIÓN DE OPINIONES (MAJORITY JUDGMENT)

A comienzos del siglo XX, sir Francis Galton ya fue consciente del problema que se plantea para llegar a una conclusión correcta cuando se tienen que aglutinar valoraciones diversas de un colectivo y constató que no es la *media* de las estimaciones de los agentes (la cual se podría ver influida perjudicialmente por opiniones extremas o desatinadas) sino la *mediana* (más inmune a dicho sesgo), el estimador más indicado para determinar un resultado social. Además, apuntaba este autor, cualquier otro valor aparte de la mediana que se postulase como representativo del colectivo sería impugnado por ser demasiado bajo o alto para una mayoría de los agentes (sobre estos argumentos de Galton, véase Black (1958)).

En años recientes, el uso de la mediana para mitigar la influencia de las opiniones extremas ha sido propugnado por Surowiecki (2005) y, ya con más rigor y en el marco de la Teoría de la Elección Social, también ha sido propuesto como método de votación por Balinski y Laraki (2010), quienes han acuñado (y patentado) el procedimiento de *Majority Judgment*. Tal sistema ha sido testado empíricamente en Orsay durante las elecciones presidenciales francesas de 2007 y también, mediante internet y a nivel mundial, con motivo de las elecciones presidenciales de los Estados Unidos en 2008. A continuación lo describimos brevemente con vistas a implementarlo en nuestro propósito de determinar una regla de división a partir un orden social de las propiedades consideradas. Dicho orden se derivará a partir de las opiniones de los agentes sobre la exigibilidad o cumplimiento de tales propiedades. Cabe señalar que existen otros procedimientos de agregación de información lingüística que utilizan los mismos inputs que el método de Balinski y Laraki expuesto a continuación como, por ejemplo las LOWAs (Herrera, Herrera-Viedma, Verdegay, 1995) o la representación lingüística mediante 2-tuplas (Herrera y Martínez, 2000).

Supongamos, en nuestro contexto, que se quiere dar una valoración colectiva a una cierta propiedad. Para ello, los agentes valoran dicha propiedad mediante cinco etiquetas lingüísticas con estimaciones que van desde nada deseable (N) hasta totalmente deseable (T), pasando por poco (P), muy (M) o bastante (B) deseable. A continuación, se ordenan las evaluaciones emitidas de peor a mejor y se toma como valoración colectiva la que ocupa el lugar central (mediana). Si hay un número par de agentes (y por tanto de valoraciones), se considerará como valoración colectiva la primera de las dos etiquetas lingüísticas que ocupan el lugar central (mediana baja).

Así, por ejemplo, supongamos que siete agentes manifiestan las siguientes opiniones sobre una cierta propiedad: N, P, B, B, B, M y T. La etiqueta que ocupa el lugar central es B, así que ésta será la valoración colectiva de dicha propiedad. En el caso de que el número de agentes fuese seis y sus valoraciones fuesen N, P, P, B, B y M, la valoración colectiva sería P (la menor de las dos etiquetas centrales). Cabe reseñar que, en cualquiera de los casos presentados, la valoración colectiva es una de las emitidas por los agentes.

En lo que sigue, dada una lista de calificaciones individuales subrayaremos la valoración colectiva de esa propiedad. Así, la notación que utilizaremos en el primero de los dos casos anteriores sería N P B $\underline{\text{B}}$ B M T y en el segundo N P $\underline{\text{P}}$ B B M.

Es fácil constatar que si el número de propiedades que valorar colectivamente supera el número de etiquetas lingüísticas de las que los agentes disponen para emitir sus opiniones, necesariamente han de producirse empates, por lo que distintas propiedades compartirían necesariamente la misma valoración colectiva. Se hace pues, necesario, un mecanismo de desempate. Nosotros seguiremos un proceso de desempate de tipo iterativo, propuesto por Balinski – Laraki (2010), apropiado para comités o pequeños electorados (en nuestro caso, un número no muy grande de agentes) que se detalla a continuación.

Supongamos que hay dos propiedades con la misma calificación colectiva. Para determinar cuál predomina en el orden social, se elimina para cada alternativa una de tales calificaciones y se toma de nuevo la mediana (o mediana baja, en su caso). Si el empate persiste se itera el proceso, etc… Por ejemplo, con la notación introducida, supongamos que dos propiedades tienen las siguientes calificaciones:

1ª etapa: N P P $\underline{\text{B}}$ B M T y N N P $\underline{\text{B}}$ M M M (se elimina B).

2ª etapa: N P $\underline{\text{P}}$ B M T y N N $\underline{\text{P}}$ M M M (se elimina P).

3ª etapa: N P $\underline{\text{B}}$ M T y N N $\underline{\text{M}}$ M M (se deshace el empate).

Cabe señalar que aunque la calificación colectiva de ambas propiedades es B (obtenida en la primera etapa), la segunda es más valorada que la primera. Pondremos de manifiesto este hecho denotando por B_1 a la calificación colectiva de la alternativa más valorada, B_2 a la de la siguiente, y así sucesivamente (si hubiese más alternativas con la misma valoración colectiva). Como señalan Balinski y Laraki, es trivial verificar que este proceso siempre deshace un empate a menos que ambas propiedades compartan exactamente el mismo espectro de valoraciones emitidas.

5. SELECCIÓN DE LA REGLA DE REPARTO

En un problema de bancarrota, la decisión más relevante es determinar la regla de reparto que se va a aplicar ya que, dependiendo de la que se elija, la cantidad asignada a cada agente puede ser distinta. Por ello, los agentes involucrados en un problema tendrán incentivos para que se aplique aquella que más se ajuste a sus propios intereses. Pero en esa selección hay que tener en cuenta diversos factores. En primer lugar, como hemos comentado, la regla elegida debe depender de la situación concreta que se aborde. Así, por ejemplo, atender sin más las peticiones de los agentes proporcionalmente al presupuesto pudiera no ser una medida justa al aplicarse como regla de reparto de los activos de una empresa en quiebra entre sus acreedores, ya que en este caso normalmente se tienen en cuenta prioridades y garantías mínimas que hacen inviable la proporcionalidad pura. Tales argumentos no son exclusivos del anterior caso de bancarrota, sino que se tienen también en cuenta en otros ámbitos como el de economía de la salud, ante problemas de subvención de asistencia médica, o en el universitario y de investigación. En este último caso, ante los proyectos que se presentan a una determinada convocatoria no rige meramente una financiación con criterios proporcionales a las peticiones, pues en tal caso todos los peticionarios recibirían una cantidad positiva independientemente de los méritos acreditados, y ninguna propuesta se vería rechazada de plano, como ocurre en la realidad con los proyectos denegados (y no simplemente recortados).

Pero además, como ha quedado de manifiesto en la sección anterior, decantarse por una regla supone aceptar ciertos principios o propiedades y rechazar otros y es por esta razón por la que la regla de reparto debe adecuarse a las preferencias de los agentes. Por ejemplo, como se ha indicado, la regla proporcional no garantiza una cantidad mínima estipulada a todos los agentes, mientras que la regla que iguala lo obtenido por todos los agentes independientemente de sus reclamaciones, sí lo hace.

En esta sección implementamos un procedimiento que permite encontrar aquella regla de reparto que mejor se adecúa a las propiedades que los agentes consideran más deseables. Para ello, seguimos un enfoque experimental en el que los agentes manifiestan su opinión, no directamente sobre las reglas, sino sobre las propiedades que ellos consideran que se deberían cumplir. Seleccionar directamente la regla puede suponer el cumplimiento de alguna propiedad no deseable o, viceversa, el incumplimiento de alguna propiedad deseable. Y además debe tenerse en cuenta, como indica Villar (2006), que "hay algunas propiedades deseables que son incompatibles entre sí". Trabajos experimentales previos en problemas de bancarrota han sido desarrollados, en un contexto de juegos de bancarrota, por Herrero, Moreno-Ternero y Ponti (2009) y, en problemas relacionados con la concesión de garantías mínimas, por Marco, Gadea-Blanco y Jiménez-Gómez (mimeo).

En el proceso de selección de la regla intervienen, a través de sus opiniones sobre las propiedades, los agentes involucrados en el problema de bancarrota. Además, es necesario el concurso de un asesor externo que implemente el procedimiento que determine la regla de reparto a utilizar.

El procedimiento se desarrolla en cinco fases:

1ª.- Determinar un catálogo de reglas aplicables en el problema de bancarrota.

2ª.- Seleccionar las propiedades adecuadas que permitan al final del proceso seleccionar una regla de reparto.

3ª.- Realizar una encuesta a los agentes en la que manifiesten sus opiniones sobre las propiedades seleccionadas.

4ª.- Obtener un orden social de las propiedades mediante alguna regla de agregación de las opiniones individuales.

5ª.- A partir de ese orden, inferir la regla de reparto que se aplicará en el problema de bancarrota.

A continuación, desarrollamos cada una de estas cinco etapas, considerando las reglas, propiedades y método de agregación presentados en las secciones anteriores.

1ª. Determinación del catálogo de reglas aplicables.

Dado un problema de bancarrota concreto, el asesor debe determinar que reglas de reparto son la más adecuadas en esa situación. En nuestro caso, con el fin de exponer el procedimiento de selección de la regla de reparto a utilizar, hemos considerado exclusivamente las cuatro reglas clásicas.

2ª. Selección de propiedades.

El asesor deberá elegir, de entre las propiedades que verifican las reglas seleccionadas, aquellas sobre las que los agentes deberán manifestar posteriormente su opinión y que permitan determinar la regla que más se adecúe a esas opiniones. El número de propiedades elegidas deberá ser suficiente para poder discriminar entre las reglas consideradas y para poder realizar un cuestionario no muy amplio a los agentes.

Supongamos que inicialmente se consideran las nueve propiedades recogidas en el Cuadro 1. De ellas, tres propiedades (TI, IE y CO), con independencia de las opiniones que tengan los agentes sobre ellas, no permiten realizar ninguna selección ya que las cuatro reglas consideradas las verifican. Por esta razón, no se deberían tener en cuenta en el cuestionario. Además, existen dos propiedades (CAR y CAB) que se cumplen por tres de las reglas por lo que tampoco permitirían discriminar, razón por la que no se deberían considerar ambas a la vez. Por ejemplo, se podría descartar CAB porque su formulación es más complicada que la de CAR. De esta forma, el cuestionario se podría realizar con esta última propiedad y las cuatro propiedades restantes (AD, EXE, EXC y AS). La selección final de reglas y propiedades se presenta en el Cuadro 2.

		REGLAS DE REPARTO			
		Proporcional	Igual Ganancia	Igual Pérdida	Talmud
PROPIEDADES	CAR	✓	✓	✓	
	AD	✓			✓
	EXE		✓		
	EXC			✓	
	AS		✓		✓

Cuadro 2. Sinopsis de reglas y propiedades seleccionadas

3ª. Realización de la encuesta.

Una vez seleccionadas las propiedades, el siguiente paso es realizar un cuestionario a los agentes involucrados en el problema con el fin de que expresen su opinión sobre ellas. En el planteamiento de la encuesta será necesario realizar una correcta contextualización del problema, realizando una explicación breve y suficientemente clara de las propiedades para que los agentes tengan claro qué y cómo tienen que responder.

Nosotros proponemos un enfoque en el que los agentes no sólo manifiestan si una propiedad es deseable o no para ellos, sino que también deben graduar, de acuerdo con una escala, sus opiniones. Así, en primer lugar los agentes deberán manifestar si una propiedad es deseable o no deseable (N). Y en caso afirmativo, deben indicar el grado en que lo es de acuerdo con la siguiente escala: Totalmente (T), Mucho (M), Bastante (B) y Poco (P). Un posible modelo de cuestionario es el que se presenta en el Cuadro 3, en el que, a modo de ejemplo, los agentes deben manifestar sus opiniones sobre tres de las propiedades consideradas: AD, EXE y EXC (renombradas para una mejor comprensión por parte de los agentes).

- ***Reparto del déficit***. Las asignaciones obtenidas deben ser las mismas tanto si se considera repartir la cantidad disponible como si considera repartir el déficit.

✓ Deseable ☐ No deseable

✓ Totalmente ☐ Mucho ☐ Bastante ☐ Poco

- ***Garantía de un mínimo a las reclamaciones pequeñas***. Las reclamaciones que no superen una cantidad mínima deben ser íntegramente atendidas.

☐ Deseable ✓ No deseable

☐ Totalmente ☐ Mucho ☐ Bastante ☐ Poco

- ***Desatención de las reclamaciones pequeñas.*** Las reclamaciones que no superen no superen una cantidad mínima deben ser íntegramente rechazadas.

✓ Deseable ☐ No deseable

☐ Totalmente ☐ Mucho ✓ Bastante ☐ Poco

Cuadro 3. Modelo de cuestionario para tres propiedades

4ª. Obtención de un orden social de las propiedades.

A partir de las opiniones de los agentes, se sigue un procedimiento de agregación que permite asignar una calificación colectiva a cada una de las propiedades consideradas y, de esta forma, establecer un orden social de las mismas. En nuestro caso, seguiremos el procedimiento de *Majority Judgment* descrito en la sección anterior.

5ª.- Selección de la regla de reparto.

A partir del orden social de propiedades se procede a seleccionar la regla de reparto siguiendo el siguiente criterio lexicográfico.

1. Se desestiman aquellas reglas que verifiquen propiedades socialmente no deseadas.
2. A continuación, se tienen en cuenta aquellas reglas que verifiquen la propiedad socialmente más deseada y se desestiman las restantes.
    - 2.1. Si sólo subsiste una regla, esa será la elegida.
    - 2.2. Si subsiste más de una, se considera la segunda propiedad más relevante:
        - 2.2.1. Si sólo la cumple una regla de las subsistentes, esa será la elegida.
        - 2.2.2. Si no la cumple ninguna o la cumple más de una, se itera el proceso considerando la tercera propiedad.

Y así sucesivamente hasta determinar una regla de reparto.

Cabe señalar que si la selección de propiedades efectuada en la segunda etapa ha sido la adecuada y todas las propiedades son socialmente deseables en algún grado, el anterior criterio es siempre decisivo. Bajo este supuesto, en el Cuadro 4 se muestran varios ejemplos de órdenes sociales y la regla de reparto finalmente elegida en cada una de esas situaciones. Teniendo en cuenta las propiedades que verifican cada una de las reglas (véase el Cuadro 2), se puede observar que en los dos primeros casos hay que llegar hasta la tercera propiedad del orden social para poder elegir una regla, ya que la primera propiedad, AD, se cumple por las reglas proporcional y del Talmud (por lo que se desestimarían las otras dos reglas) mientras que la segunda propiedad, EXE, no la verifican ninguna de ellas. Análogas consideraciones se pueden hacer en los otros dos casos.

	Órdenes sociales			
1ª	AD	AD	CAR	EXC
2ª	EXE	EXE	EXE	CAR
3ª	CAR	AS	AD	AD
4ª	AS	CAR	AS	AS
5ª	EXC	EXC	EXC	EXE
REGLA	**Proporcional**	**Talmud**	**I. Ganancia**	**I. Pérdida**

Cuadro 4. Ejemplos de órdenes sociales de propiedades deseables

No obstante, si alguna propiedad es socialmente no deseable no está garantizada la decisividad del procedimiento. Así, en el Cuadro 5 presentamos distintos casos con este supuesto. En el primero de ellos, la propiedad AS es socialmente no deseable, lo que lleva a descartar las reglas que la verifican: igual ganancia y Talmud. El orden social de las restantes propiedades determina que la regla elegida sea la de igual pérdida. En el segundo de los casos, hay dos propiedades no deseables, EXE y EXC, lo que elimina las reglas de igual ganancia e igual pérdida, y el orden social nos lleva a elegir la regla del Talmud. Pero en el último caso, las dos propiedades que son socialmente no deseables, CAR y AS, descartan todas las reglas consideradas. En esta situación, habría que reiniciar todo el procedimiento considerando nuevas reglas de reparto, evitando aquellas que cumplan las propiedades que son socialmente no deseables.

		Órdenes sociales		
Propiedades deseables	1ª	CAR	AD	AD
	2ª	EXE	AS	EXE
	3ª	EXC	CAR	EXC
	4ª	AD	EXE	CAR
Propiedades. no deseables	5ª	AS	EXC	AS
	REGLA	**I. Pérdida**	**Talmud**	**??**

Cuadro 5. Ejemplos de órdenes sociales con propiedades deseables y no deseables

Una posible crítica al método de agregación de *Majority Judgment* es que no es compensativo. Así, la mera aplicación de nuestro procedimiento en el ejemplo recogido en el Cuadro 6, daría como seleccionada, ya en la primera etapa, la regla de igual pérdida, de manera que el orden social por debajo de la primera propiedad sería irrelevante. Sin embargo la regla del Talmud verifica las propiedades segunda y tercera que tienen la misma calificación colectiva que la primera propiedad.

	Orden social	**Calificación colectiva**
1ª	EXC	M_1
2ª	AD	M_2
3ª	AS	M_3
4ª	CAR	P_1
5ª	EXE	P_2
REGLA	**I. Pérdida**	

Cuadro 6. Ejemplo de no compensación de *Majority Judgment*

Este problema se deriva de que el procedimiento de *Majority Judgment* sólo escoge como calificación colectiva, de manera un tanto restrictiva, alguna de las calificaciones emitidas por los agentes.

6.- CONSIDERACIONES FINALES

Nuestro objetivo ha sido presentar un procedimiento que permita seleccionar una regla de reparto a partir de las opiniones de los agentes involucrados en un problema de bancarrota sobre el cumplimiento de ciertos principios. Este trabajo no es sino una primera aproximación donde se ha propuesto un catálogo reducido de reglas y propiedades. Por ello, sería conveniente considerar nuevas reglas y propiedades, así como otros procedimientos de agregación de opiniones (por ejemplo, variantes de *Majority Judgment*) que subsanen problemas de posible indecisividad o falta de compensación, que han sido puestos de manifiesto a lo largo de esta exposición.

Además es nuestra intención realizar análisis empíricos en distintas situaciones reales de bancarrota. En estos análisis, consideraremos la posibilidad de recabar la información de los agentes con otras modalidades, además de las meramente lingüísticas.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AUMANN, R.J. y MASCHLER, M. (1985). "Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud". Journal of Economic Theory, 26, pp. 195-213.
- BALINSKI, M. Y LARAKI, R. (2010). Majority Judgment. MIT Press.
- BALINSKI, M. y YOUNG, H.P. (1982). Fair Representation. Meeting the Ideal of One Man, One Vote. Yale University Press. New Haven.
- BLACK, D. (1958). The Theory of Committees and Elections. Cambridge University Press.
- BRAMS, S. (1980). Biblical Games. A Strategic Analysis of Stories in the Old Testament. Massachusetts, MIT Press.
- BRAMS, S.J., CONRAD, B.P., LUCAS, W.F. y TAYLOR, A.D. (1998). "El Reparto Equitativo". En: Las Matemáticas en la Vida Cotidiana (ed. L.A. Steen). Adisson-Wesley Iberoaméricana, Madrid, pp 399-460.
- BRAMS, S.J., JONES, M.A. y KLAMLER, C. (2006). "Better ways to cut a cake". Notices of the American Mathematical Society, 53, pp. 1314-1321.
- BRAMS, S.J. y TAYLOR A.D. (1996). Fair Division: From Cake-Cutting to Dispute Resolution. Cambridge University Press.
- EHLERS, L y KLAUS, B. (2007). "Consistent house allocation". Economic Theory, 30, pp. 561-574.
- ESPINEL, M.C. (2007). "El reparto de lo escaso". UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 10, pp. 95-108.

- HERRERA, F. y MARTÍNEZ, L. (2000). "A 2-tuple Fuzzy Linguistic Representation Model for Computing with Words". IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 8, pp. 746-752.
- HERRERA, F., HERRERA-VIEDMA, E. y VERDEGAY, J.L. (1995). "A Sequential Selection Process in Group Decision Making with a Linguistic Assessment Approach", Information Sciences, 85, pp. 223-239.
- HERRERO, C. (2008). "Managing waiting lists in a fair way". Fundación BBVA. Documento de Trabajo 7.
- HERRERO, C. y VILLAR, A. (2001). "The three musketeers: four classical solutions to bankruptcy poblems". Mathematical Social Sciences, 42, pp. 307-328.
- HERRERO, C. y MARTÍNEZ R. (2008). "Egalitarian Rule in Claims Problems with Indivisible Goods". Social Choice and Welfare, 30, pp.603-617.
- HERRERO, C., MORENO-TERNERO, J.D., PONTI, G. (2009), "On the Adjudication of Conflicting Claims: An Experimental Study". Social Choice and Welfare, 33, pp. 517-519.
- MALKEVITCH, J. (2010). "Resolving Bankruptcy Claims". http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-bankruptcy
- MARCO, M.C., GADEA-BLANCO, P. y JIMÉNEZ-GÓMEZ, J.M. (mimeo). "How much should be guarenteed when rationing, if it should?"
- MORENO-TERNERO, J. y VILLAR, A. (2004). "The Talmud Rule and the Securement of Agents' Awards". Mathematical Social Sciences, 47, pp.255-257.
- O'NEILL, B, (1982). "A problem of rights arbitration from the Talmud". Mathematical Social Sciences, 2, pp. 345-371.
- ROBBINS, L. (1932). Ensayo sobre la Naturaleza y Significación de la Ciencia Económica. Fondo de Cultura Económica, México.
- RODRÍGUEZ-MÍNGUEZ, E., HERRERO, C. y PINTO-PRADES, J.L. (2004). "Using a point system in the management of waiting lists: the case of cataracts". Social Science & Medicine, 59, pp. 585-594.

- SUROWIECKI, J. (2005). The Wisdom of Crowds, Doubleday. [Existe traducción al castellano: Cien Mejor que Uno, Ediciones Urano, Barcelona, 2005].
- THOMSON, W. (2003). "Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey". Mathematical Social Sciences, 45, pp. 249-297.
- VILLAR, A.(2006). Decisiones Sociales. McGraw-Hill, Madrid.
- YOUNG, H.P. (1988). "Distributive Justice in Taxation". Journal of Economic Theory, 43, pp. 321-335.