El modelo probabilístico triangular-trapezoidal. Aplicación a la tasación de fincas rústicas

Herrerías Pleguezuelo, Rafael
Herrerías Velasco, José Manuel
Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa
Universidad de Granada

RESUMEN

En el presente trabajo se estudia, en primer lugar, una distribución de probabilidad bivariante resultante de la mezcla de las distribuciones continuas univariantes triangular y trapezoidal. En segundo lugar, a través de su análisis se concluye que sus componentes se comportan como variables aleatorias dependientes, lo que permite disponer de un modelo probabilístico muy apropiado para la tasación de fincas rústicas mediante el método de valoración comparativo denominado como método de las dos betas, Ballestero (1973). Este método es especialmente útil en el caso de que, como es usual, se dispongan de pocos datos para realizar comparaciones y simultáneamente se disponga de un indicador bidimensional para la calidad de la finca tal que sus componentes unidimensionales estén relacionadas.

En tercer lugar, se aplica el modelo probabilístico bivariante a un caso práctico de la literatura especializada de tasación de fincas rústicas, encontrándose la misma dificultad de cálculo que en los modelos univariantes, aunque las variables aleatorias no sean estocásticamente independientes. El caso de que las variables explicativas sean independientes ha sido estudiado por Herrerías y Herrerías (2009) y (2010) con otros modelos probabilísticos bivariantes.

***Palabras claves*:** Distribución triangular; distribución trapezoidal; distribución bivariante; valoración; método de las dos funciones de distribución.

***Área temática*:** Métodos Estadísticos.

ABSTRACT

The present study first, focuses on a bivariate probability distribution resulting from the mixture of univariate continuous distributions triangular and trapezoidal.

Secondly, through its analysis it is concluded that the components behave as dependent random variables which provides a probabilistic model suitable for the valuation of a farm using the comparative method of the two betas distributions, Ballestero (1973). This method is especially useful in the case that, as usual, few data are available for comparison and simultaneously have a bidimensional indicator for the quality of the property that its unidimensional components are related.

Third, the bivariate probabilistic model is applied to a study case of the literature of farm valuation, if random variables are stochastically dependent this procedure has the same difficulty of calculation that univariate models. The case that the random variables are stochastically independent has been studied by Herrerías and Herrerías (2009) and (2010) with others bivariates probabilistics models.

***Keywords*:** Triangular distribution; trapezoidal distribution; bivariate distribution; valuation; method of the two distribution functions.

1. INTRODUCCIÓN

Es sobradamente conocido la importancia de las distribuciones continuas univariantes, cuya función de densidad es una figura geométrica: cuadrado, rectángulo, triángulo, trapecio, parábola, etc… en el desarrollo de los métodos de valoración de la Economía Agraria, conocidos como método de las dos betas o método de las dos funciones de distribución, véase entre otros Lozano (1996), Romero (1997), Herrerías et al. (2001), García (2007) y Caballer (2008). Está claro que desde un punto de vista matemático-estadístico, estos modelos deben extenderse al campo bivariante en primer lugar y al multivariante posteriormente.

El objetivo principal de este trabajo es doble, por una parte, estudiar la distribución de probabilidad bivariante triangular-trapezoidal desde un punto de vista probabilístico y por otra, extender el método de valoración de las dos betas, introducido por Ballestero (1971) y (1973), al caso bivariante. Utilizándose la mencionada distribución de probabilidad triangular -trapezoidal, denominada de esta forma por su representación gráfica (como las similares univariantes: rectangular, triangular, trapezoidal, parabólica, biparabólica, etc…)

La figura 1 representa un modelo particular de dicha superficie de probabilidad.

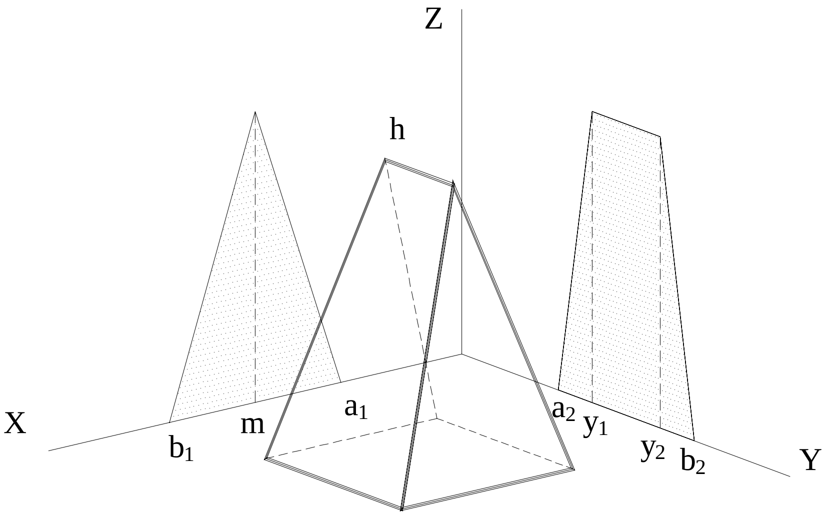


Figura 1: Representación gráfica modelo bivariante triangular -trapezoidal

En su aplicación el método de valoración de las dos betas utiliza la metodología PERT, debido a la insuficiencia e incluso no existencia de datos que sirvan de testigos referentes, por ello se supone que de una variable X se conocen, o pueden estimarse, sus valores mínimo (a_1), máximo (b_1) y más probable ó modal (m), mientras que de otra variable Y se conocen, o pueden estimarse, sus valores mínimo (a_2), máximo (b_2) y un intervalo donde se encuentra el valor más probable ó valor modal (y_1 e y_2). En otras palabras, se consideran en los ejes cartesianos X e Y los valores necesarios para determinar una distribución triangular $T(a_1,m,b_1)$ y otra trapezoidal $Tp(a_2,y_1,y_2,b_2)$, que generan en el espacio una superficie similar a la que se presenta en la figura 1.

En esta misma línea de trabajo debe destacarse, por un lado, una fundamentación teórica del método de valoración de las dos betas que puede verse en Palacios et al. (2000) y, por otro lado, respecto al tema de índices de calidad multidimensionales es aconsejable consultar García et al. (2000) y (2002), Herrerías (2002) y Franco y Vivo (2006).

Como aportaciones adicionales de este trabajo, cabe señalar las siguientes:

1. Continúa la línea de investigación para el estudio de otras distribuciones de probabilidad bivariantes, que puedan usarse como modelos probabilísticos en el método de valoración de las dos betas extendido, véase Herrerías y Herrerías (2009) y (2010).
2. Constituye un segundo paso en la extensión del método de valoración de las dos betas al caso multivariante.

Para conseguir los objetivos señalados, el presente trabajo se organiza en las siguientes secciones:

En la sección 2 se presenta la distribución de probabilidad bivariante triangular-trapezoidal, en primer lugar, se obtiene su función de densidad mediante consideraciones geométricas y posteriormente se determinan sus características estocásticas: vector de medias y matriz de varianzas-covarianzas, así como se comprueba que las componentes del vector aleatorio son dependientes.

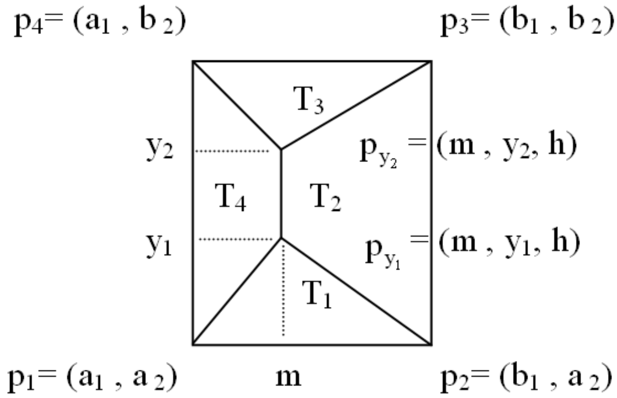
En la sección 3 se obtiene la función de distribución del vector aleatorio triangular-trapezoidal, que es clave en el método de valoración de las dos betas.

En la sección 4 se ilustra su aplicabilidad con un caso práctico de la literatura especializada.

2. DETERMINACIÓN DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD

Para obtener la expresión de la función de densidad en el punto (x,y) se halla la ecuación de la superficie de la figura 1, que puede determinarse fácilmente mediante las ecuaciones de sus cuatro caras, ya que son planos que pasan por tres puntos, dos de ellos situados en la base del prisma y el tercero en un vértice de la cara superior del mismo. Utilizándose su cota, h, como constante normalizadora para la distribución continua bivariante resultante.

Proyectando la superficie de la triangular-trapezoidal en el plano Z = 0. Se denotan por T_i (i = 1,2,3,4) las diferentes regiones que conforman los recorridos de (X ,Y) y por p_i (i = 1,2,…) los vértices de las mismas (entre paréntesis sus coordenadas).



Se determinan los tres planos que conforman las cuatro caras de la triangular-trapezoidal, a partir de la ecuación del plano que pasa por tres puntos.

El plano que pasa por los puntos p_1, p_{y_1} y p_2, se obtiene a través de la ecuación:

$$\Pi(p_1, p_{y_1}, p_2) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & 0 & 1 \\ m & y_1 & h & 1 \\ b_1 & a_2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Pi(p_1, p_{y_1}, p_2) \equiv -h(a_1 - b_1)y + \left[a_1(y_1 - a_2) + b_1(a_2 - y_1)\right]z + a_2(a_1 - b_1)h = 0$$

Teniendo en cuenta que $a_1 \neq b_1$, puede dividirse por $(b_1 - a_1)$ y resulta:

$$(a_2-y)h+(y_1-a_2)z=0 \quad \Rightarrow \quad z=\frac{y-a_2}{y_1-a_2}h \quad \text{si } (x,y)\in T_1 \tag{1}$$

La ecuación del plano que pasa por los puntos p_2, p_{y_1} y p_3 tiene por ecuación:

$$\Pi(p_2,p_{y_1},p_3)\equiv\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ b_1 & a_2 & 0 & 1\\ m & y_1 & h & 1\\ b_1 & b_2 & 0 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Pi(p_2,p_{y_1},p_3)\equiv h(a_2-b_2)x+\left[b_1(a_2-b_2)+m(b_2-a_2)\right]z+b_1(b_2-a_2)h=0$$

Dividiendo (b_2-a_2) se tiene:

$$(x-b_1)h+(b_1-m)z=0 \quad \Rightarrow \quad z=\frac{b_1-x}{b_1-m}h \quad \text{si } (x,y)\in T_2 \tag{2}$$

La ecuación del plano que pasa por los puntos p_3, p_{y_2} y p_4 tiene por ecuación:

$$\Pi(p_3,p_{y_2},p_4)\equiv\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ b_1 & b_2 & 0 & 1\\ m & y_2 & h & 1\\ a_1 & b_2 & 0 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Pi(p_3,p_{y_2},p_4)\equiv -h(b_1-a_1)y+\left[b_1(y_2-b_2)+a_1(b_2-y_2)\right]z+b_2(b_1-a_1)h=0$$

Dividiendo (b_1-a_1) se tiene:

$$(b_2-y)h+(y_2-b_2)z=0 \quad \Rightarrow \quad z=\frac{b_2-y}{b_2-y_2}h \quad \text{si } (x,y)\in T_3 \tag{3}$$

El otro plano que pasa por los puntos p_1, p_{y_2} y p_4 tiene por ecuación:

$$\Pi(p_1,p_{y_2},p_4)\equiv\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ a_1 & a_2 & 0 & 1\\ m & y_2 & h & 1\\ a_1 & b_2 & 0 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Pi(p_1,p_{y_2},p_4)\equiv h(a_2-b_2)x+\left[a_1(a_2-b_2)+m(b_2-a_2)\right]z+a_1(b_2-a_2)h=0$$

Al dividir por $(b_2 - a_2)$:

$$(x - a_1)h + (a_1 - m)z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{x - a_1}{m - a_1}h \quad \text{si } (x,y) \in T_4 \tag{4}$$

De (1), (2), (3) y (4) se obtiene la función de densidad, especificando el valor de h.

El procedimiento más sencillo que puede usarse para determinar h como constante normalizadora es el geométrico.

Imponiendo la condición de que el volumen de la rectangular-trapezoidal sea la unidad, se obtiene la siguiente expresión:

$$h = \frac{6}{(b_1 - a_1)\left(2(b_2 - a_2) + (y_2 - y_1)\right)} \tag{5}$$

Por lo cual la expresión de la función de densidad de la distribución Triangular-Trapezoidal es la siguiente:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y - a_2}{y_1 - a_2} \dfrac{6}{(b_1 - a_1)\left(2(b_2 - a_2) + (y_2 - y_1)\right)} & si\,(x,y) \in T_1 \\[2ex] \dfrac{b_1 - x}{b_1 - m} \dfrac{6}{(b_1 - a_1)\left(2(b_2 - a_2) + (y_2 - y_1)\right)} & si\,(x,y) \in T_2 \\[2ex] \dfrac{b_2 - y}{b_2 - y_2} \dfrac{6}{(b_1 - a_1)\left(2(b_2 - a_2) + (y_2 - y_1)\right)} & si\,(x,y) \in T_3 \\[2ex] \dfrac{x - a_1}{m - a_1} \dfrac{6}{(b_1 - a_1)\left(2(b_2 - a_2) + (y_2 - y_1)\right)} & si\,(x,y) \in T_4 \\[2ex] 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \tag{6}$$

A continuación se detallan las características estocásticas de la distribución de probabilidad bivariante triangular-trapezoidal cuando se realiza la estandarización en los recorridos de las variables. Es decir, aplicando que:

$$X^* = \frac{X - a_1}{b_1 - a_1} \quad \text{e} \quad Y^* = \frac{Y - a_2}{b_2 - a_2} \tag{7}$$

Se tiene que la expresión de la constante normalizadora h queda reducida a

$$h^* = \frac{6}{2 + y_2^* - y_1^*} \tag{8}$$

La función de densidad queda reducida a:

$$f(x^*, y^*) = \begin{cases} \dfrac{6}{(2 + y_2^* - y_1^*)\, y_1^*}\, y^* & \text{si } (x^*, y^*) \in T_1 \\[2ex] \dfrac{6}{(2 + y_2^* - y_1^*)(1 - m^*)}(1 - x^*) & \text{si } (x^*, y^*) \in T_2 \\[2ex] \dfrac{6}{(2 + y_2^* - y_1^*)(1 - y_2^*)}(1 - y^*) & \text{si } (x^*, y^*) \in T_3 \\[2ex] \dfrac{6}{(2 + y_2^* - y_1^*)\, m^*}\, x^* & \text{si } (x^*, y^*) \in T_4 \\[2ex] 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{9}$$

Los momentos no centrados de orden 1 tienen las expresiones siguientes:

$$E\left[\, x^* \right] = \frac{1}{4}\left(1 + 2m^* + \frac{1 - 2m^*}{2 + y_2^* - y_1^*}\right)$$

$$E\left[\, y^* \right] = \frac{3 - y_1^{*2} + y_2^*(2 + y_2^*)}{4(2 + y_2^* - y_1^*)} \tag{10}$$

Las varianzas de las variables estandarizadas tienen las expresiones siguientes:

$$\sigma_{x^*}^2 = \frac{1}{80}\left(3 - 4m^* + 4m^{*2} - \frac{5(1 - 2m^*)^2}{(2 + y_2^* - y_1^*)^2} + \frac{2(3 + 4m^{*2} - 4m^*)}{2 + y_2^* - y_1^*}\right)$$

$$\sigma_{y^*}^2 = \frac{\left[\begin{array}{l} 19 + 3y_1^{*4} - 8y_1^{*3}(2 + y_2^*) + 2\, y_1^*\left(5 y_1^* - 4 y_2^*\right)\left(3 + y_2^*\,(2 + y_2^*)\right) - \\ - 32\, y_1^* + y_2^*\left[20 + 3 y_2^*\left(2 + y_2^*\,(4 + y_2^*)\right)\right] \end{array}\right]}{80(2 + y_2^* - y_1^*)^2} \tag{11}$$

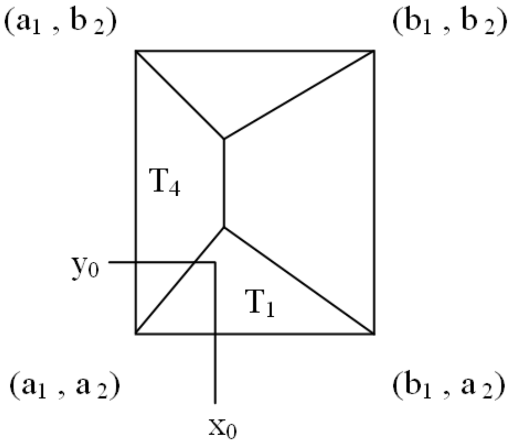
La covarianza de X^* e Y^* puede expresarse de la siguiente forma:

$$\operatorname{cov}_{x^* y^*} = \frac{(1-2m^*)(1-y_2^*-y_1^*)\left[(y_2^*-y_1^*)^2+3\left(1+2(y_2^*-y_1^*)\right)\right]}{80(2+y_2^*-y_1^*)^2} \tag{12}$$

3. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DEL MODELO TRIANGULAR-TRAPEZOIDAL

En el cálculo de la función de distribución hay que distinguir varios casos:

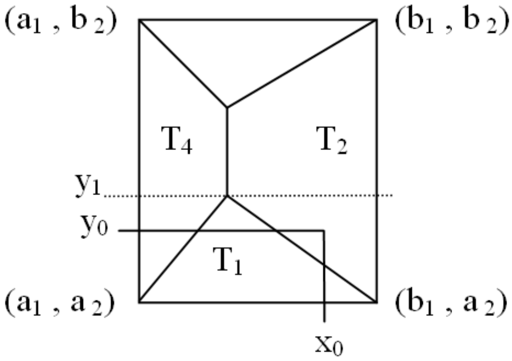
1. Si $(x_0, y_0) \in T_1$, se tiene que:



$$F(x_0, y_0) = \frac{h}{2}\frac{(x_0-a_1)(y_0-a_2)^2}{y_1-a_2} - \frac{h}{6}\frac{m-a_1}{(y_1-a_2)^2}(y_0-a_2)^3 \tag{13}$$

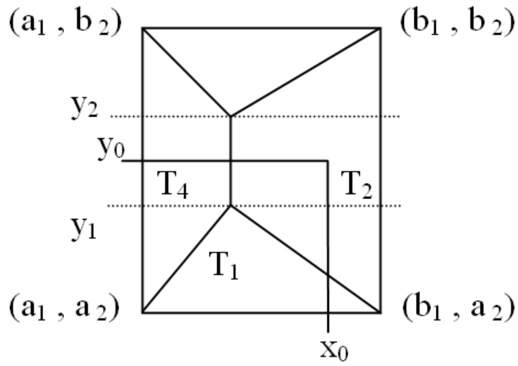
2. Si $(x_0, y_0) \in T_2$, hay que distinguir los tres casos siguientes:

   i. $(x_0, y_0) \in T_2$; con $y_0 \leq y_1$, se tiene que:



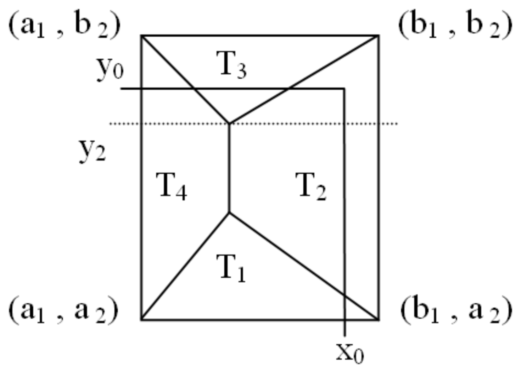
$$F(x_0,y_0)=\frac{h}{6}\frac{b_1-a_1}{(y_1-a_2)^2}(a_2-y_0)^3-\frac{h}{6}\frac{a_2-y_1}{(b_1-m)^2}(b_1-x_0)^3+$$
$$+\frac{h}{2}\frac{b_1-a_1}{y_1-a_2}(y_0-a_2)^2-\frac{h}{2}\frac{(y_0-a_2)(b_1-x_0)^2}{b_1-m} \qquad (14)$$

ii. $(x_0 , y_0)\in T_2$; con $y_1 < y_0 < y_2$, se tiene que:



$$F(x_0,y_0)=\frac{h}{2}(b_1-m)(y_0-a_2)-\frac{h}{2}\frac{(y_0-a_2)(b_1-x_0)^2}{b_1-m}+\frac{h}{2}(m-a_1)(y_0-y_1)+$$
$$+\frac{h}{3}(m-a_1)(y_1-a_2)-\frac{h}{6}(b_1-m)(y_1-a_2)-\frac{h}{6}\frac{a_2-y_1}{(b_1-m)^2}(b_1-x_0)^3 \qquad (15)$$

iii. $(x_0 , y_0)\in T_2$; con $y_0 > y_2$, se tiene que:

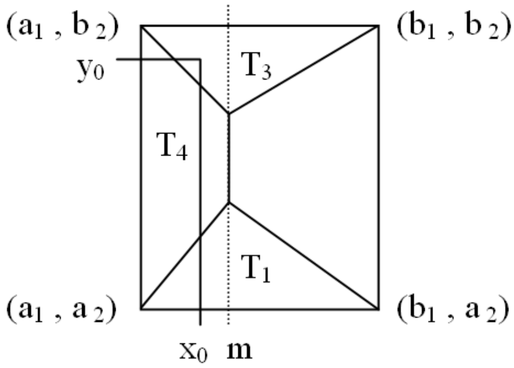


$$F(x_0,y_0)=1-\left[\begin{array}{l}\frac{h}{2}\frac{b_1-a_1}{b_2-y_2}(b_2-y_0)^2-\frac{h}{6}\frac{b_1-a_1}{(b_2-y_2)^2}(b_2-y_0)^3-\\ -\frac{h}{6}\frac{y_1-a_2}{(b_1-m)^2}(b_1-x_0)^3+\frac{h}{2}\frac{(y_0-a_2)(b_1-x_0)^2}{b_1-m}\end{array}\right] \qquad (16)$$

Puede comprobarse que en estos tres casos $\dfrac{\partial^2 F(x_0, y_0)}{\partial x_0 \, \partial y_0} = h \dfrac{b_1 - x_0}{b_1 - m}$, que es la forma funcional de la función de densidad en la región T_2.

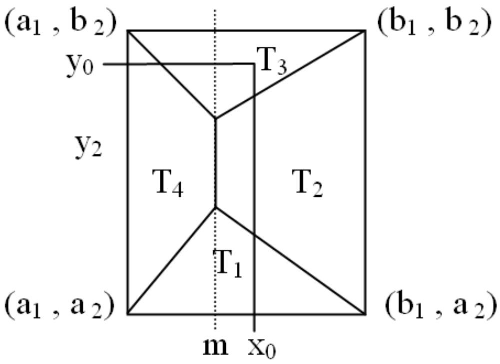
3. Si $(x_0, y_0) \in T_3$, hay que distinguir los dos casos siguientes:

   i. $(x_0, y_0) \in T_3$; con $x_0 \leq m$, se tiene que:



$$F(x_0, y_0) = \frac{h}{2}\frac{b_2 - a_2}{m - a_1}(x_0 - a_1)^2 - \frac{h}{6}\frac{b_2 - a_2 - (y_2 - y_1)}{(m - a_1)^2}(x_0 - a_1)^3 + \\ + \frac{h}{6}\frac{m - a_1}{(b_2 - y_2)^2}(b_2 - y_0)^3 - \frac{h}{2}\frac{(x_0 - a_1)(b_2 - y_0)^2}{b_2 - y_2} \tag{17}$$

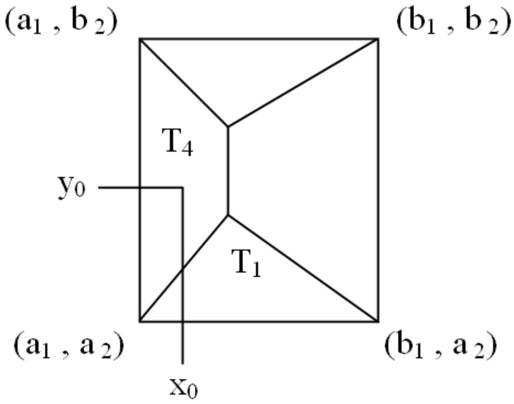
   ii. $(x_0, y_0) \in T_3$; con $x_0 > m$, se tiene que:



$$F(x_0,y_0)=1-\left[\begin{array}{l}\dfrac{h}{2}\dfrac{(x_0-a_1)(b_2-y_0)^2}{b_2-y_2}-\dfrac{h}{6}\dfrac{b_2-a_2-(y_2-y_1)}{(b_1-m)^2}(b_1-x_0)^3-\\ -\dfrac{h}{6}\dfrac{m-a_1}{(b_2-y_2)^2}(b_2-y_0)^3+\dfrac{h}{2}\dfrac{b_2-a_2}{b_1-m}(b_1-x_0)^2\end{array}\right] \qquad (18)$$

Puede comprobarse que en estos dos casos $\dfrac{\partial^2 F(x_0,y_0)}{\partial x_0\,\partial y_0}=h\dfrac{b_2-y_0}{b_2-y_2}$, que es la forma funcional de la función de densidad en la región T_3.

4. Si $(x_0 , y_0) \in T_4$, en tal caso:



$$F(x_0,y_0)=\frac{h}{2}\frac{(y_0-a_2)(x_0-a_1)^2}{m-a_1}-\frac{h}{6}\frac{y_1-a_2}{(m-a_1)^2}(x_0-a_1)^3 \qquad (19)$$

4. CASO PRÁCTICO

En este trabajo se utiliza la distribución de probabilidad estudiada en los apartados anteriores como modelo probabilístico para un indicador bidimensional de calidad para fincas rústicas. El trabajo que se toma como referente es el de Alonso y Lozano (1985), parcialmente reproducido en el texto de Alonso e Iruretagoyena (1990), en el que se realiza la valoración de una finca de Valladolid atendiendo a un único índice de calidad, la producción de la finca.

Tomando de partida los datos contenidos en el mencionado artículo de Alonso y Lozano (1985). Se pretende determinar el valor de mercado (€ / hectárea) para una finca cuya producción es de 2.100 kg de cebada por hectárea y que se encuentra a una distancia de 24 Km. de Valladolid.

Los datos originales para las variables usadas por Alonso y Lozano (1985) son:

	VALOR DE MERCADO (€/ hectárea)	INDICE PRODUCCIÓN (kg de cebada / hectárea)
Mínimo	1.502,53	1.800
Máximo	2.704,55	4.000
Moda	1.803,04	2.000

Tabla 1: Elaboración propia, a partir de los datos utilizados por Alonso y Lozano (1985)

Estos autores suponen que la distribución de la variable valor de mercado es triangular, luego su función de distribución es la siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1.502{,}53 \\ \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(m-a)} = \dfrac{(x-1.502{,}53)^2}{361.215{,}55} & \text{si } 1.502{,}53 \leq x \leq 1.803{,}04 \\ 1-\dfrac{(b-x)^2}{(b-a)(b-m)} = 1-\dfrac{(2.704{,}55-x)^2}{1.083.646{,}65} & \text{si } 1.803{,}04 \leq x \leq 2.704{,}55 \\ 1 & \text{si } x \geq 2.704{,}55 \end{cases} \quad (20)$$

Al igual que en Herrerías y Herrerías (2009) y (2010) la distribución de probabilidad que se va a utilizar es bidimensional, por tanto, se deben de tomar dos índices de calidad en la valoración de la finca, para ello, además de tomar como índice la producción de la finca; se va a tomar un segundo índice de calidad, la proximidad a Valladolid, se considera la proximidad en vez de la distancia para que se cumpla la hipótesis de relación directamente proporcional entre el índice y el valor de mercado. Esto hace suponer que el precio de la finca aumenta cuando la distancia a Valladolid es menor o lo que es lo mismo cuando su proximidad es mayor, algo que resulta obvio. Este índice de proximidad puede obtenerse fácilmente como el complementario de la distancia a un valor superior a la mayor distancia presentada por las fincas testigo, en este caso puede tomarse el valor de 70 Km.

Se va a aplicar la distribución triangular-trapezoidal, esto es, se supone que el índice de proximidad sigue una distribución triangular y que el índice de producción sigue una distribución trapezoidal.

Como el índice de producción parte de tres datos, mínimo, a, máximo, b, y más probable, m, se recurre a la distribución trapezoidal CPR, introducida por Callejón, Pérez y Ramos (1996), para obtener el cuarto parámetro necesario para la determinación de la distribución trapezoidal. La obtención del cuarto parámetro se realiza como sigue:

i. Se calcula el punto medio del intervalo, $\frac{a+b}{2}$

ii. Si $\frac{a+b}{2} > m$ entonces se nota por $y_1 = m$ y por $y_2 = \frac{a+b}{2}$

iii. Si $\frac{a+b}{2} < m$ entonces se nota por $y_1 = \frac{a+b}{2}$ y por $y_2 = m$

A partir de los datos de la Tabla 1 se tiene

$$\frac{a+b}{2} = 2.900 > y = 2.000 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 2.000 \quad \text{e} \quad y_2 = 2.900$$

La siguiente tabla resume los valores para cada uno de los índices empleados:

INDICE PROXIMIDAD A VALLADOLID $I_1 = 70 - d$ (Km.)	INDICE PRODUCCIÓN I_2 (kg de cebada / hectárea)
$a_1 = 70 - 65 = 5$	$a_2 = 1.800$
$b_1 = 70 - 10 = 60$	$b_2 = 4.000$
$m = 70 - 60 = 10$	$y_1 = 2.000$
	$y_2 = 2.900$

Tabla 2: Elaboración propia, a partir de los datos utilizados por Alonso y Lozano (1985)

Lo primero que se realiza con la información de la finca que se quiere valorar es determinar el complementario de la distancia para obtener la proximidad a Valladolid, 70 – 24 = 46, entonces se determina que el valor del índice bivariante es:

$$(x_0, y_0) = (46 , 2.100) \qquad (21)$$

Para determinar en qué región se encuentran los datos de la finca a valorar, hay que tener en cuenta que:

$$m < x_0 = 46 < b_1 \quad \text{y que} \quad y_1 < y_0 = 2.100 < y_2$$

Entonces (21) se encuentra en la región T_2 con $y_1 < y_0 < y_2$.

A partir de (15) y teniendo en cuenta los valores de la Tabla 2, se calcula la función de distribución en el punto (21), y el resultado es 0,1207256. La aplicación del método de las dos betas lleva a utilizar la expresión $F(v_d) = G(i_{1d}, i_{2d})$, véase Herrerías y Herrerías (2009) y (2010), por ello, se compara este resultado de la distribución conjunta con el valor de la función de distribución del valor de mercado en la moda, que es $0{,}2500065 \approx 1/4$. Al ser menor, hay que despejar de la primera rama de la función de distribución del valor de mercado vista en (20), obteniéndose:

$$\frac{(x - 1.502{,}53)^2}{361.215{,}55} = 0{,}1207256 \;\; \text{luego} \;\; x = 1.711{,}36 \text{ € /hectárea}$$

Si se compara el valor obtenido con el que se obtuvo con el modelo rectangular-triangular, 1.722,41 € /hectárea, véase Herrerías y Herrerías (2009) o con el obtenido con el modelo rectangular-trapezoidal, 1.688,93 € /hectárea, véase Herrerías y Herrerías (2010) se aprecian ligeras diferencias.

Siguiendo con la misma metodología considerada, se puede replicar este procedimiento de valoración suponiendo que la distribución de la variable valor de mercado es trapezoidal, aplicando la distribución trapezoidal CPR, introducida por Callejón, Pérez y Ramos (1996), se calcula $\frac{a+b}{2} = \frac{1.502{,}53 + 2.704{,}55}{2} = 2.103{,}54$, y se considera ahora que el modelo probabilístico usado para la variable valor de mercado es la distribución trapezoidal $Tp(1.502{,}53; 1.803{,}04; 2.103{,}54; 2.704{,}55)$, Herrerías et al. (2001)

Supuesto que los índices de calidad se distribuyen según una distribución rectangular-triangular, estudiada en Herrerías y Herrerías (2009), según una distribución rectangular-trapezoidal, estudiada en Herrerías y Herrerías (2010) y según una distribución triangular-trapezoidal, introducida en este artículo, se obtienen los seis siguientes valores de mercado para la finca considerada:

Índices de calidad / Valor de Mercado	Rectangular-Triangular	Rectangular-Trapezoidal	Triangular-Trapezoidal
Triangular	1.722,41	1.688,93	1711,36
Trapezoidal	1.748,36	1.710,93	1736,00

Tabla 3: Resumen valores de mercado (€/ hectárea) para las distintas distribuciones

Se procede al cálculo de la media de los diferentes métodos de valoración, práctica habitual en el campo de valoración, véase Guadalajara (1996). La media aritmética de estas seis valoraciones es 1.719,67 €/ hectárea. Prácticamente el mismo valor que se obtiene en Herrerías y Herrerías (2010), 1.717,66 €/ hectárea, calculando la media de las cuatro valoraciones obtenidas a partir de una distribución rectangular-triangular y una distribución rectangular-trapezoidal.

CONCLUSIONES

En este trabajo, en primer lugar, se ha presentado y estudiado una distribución de probabilidad bivariante que sirve, en una etapa posterior, como modelo para un índice de calidad bidimensional.

En segundo lugar, se ha profundizado en la extensión formal del método de valoración de las dos betas al caso bidimensional, lo que constituye un sólido comienzo para abordar en su generalidad los índices multivariantes.

En tercer lugar, se ha tratado un caso práctico de la literatura especializada mediante el método de valoración de las dos betas extendido, constatándose que es tan sencillo de utilizar como en el caso unidimensional. El valor de mercado obtenido por el método extendido con la distribución triangular-trapezoidal es ligeramente distinto al determinado, por el mismo método, si se considera la distribución rectangular-triangular o la distribución triangular-trapezoidal, algo menor es la diferencia si se toma como valor de mercado final la media obtenida por los seis métodos de valoración resumidos en la Tabla 3.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALONSO, R e IRURETAGOYENA, M. T. (1990) "Casos prácticos de Valoración Agraria. Conceptos, Métodos y Aplicaciones". MAPA. Madrid.
- ALONSO, R y LOZANO, J. (1985) "El método de las dos funciones de distribución: una aplicación a la valoración de fincas agrícolas en las comarcas Centro y Tierra de Campos (Valladolid)". Anales del INIA, Economía, 9, 295-325.
- BALLESTERO, E. (1971) "Sobre la valoración sintética de tierras y un nuevo método aplicable a la concentración parcelaria". Revista de Economía Política. Abril, 225-238.
- BALLESTERO, E. (1973) "Nota sobre un nuevo método rápido de valoración“. Revista de Estudios Agrosociales, 85, 75-78.
- CABALLER, V. (2008). "Valoración Agraria. Teoría y Práctica". Mundiprensa, 5ª Edición, Madrid.
- CALLEJÓN, J.; PÉREZ, E. y RAMOS, A. (1996) "La distribución trapezoidal como modelo probabilístico para la metodología PERT". Actas en CD-Rom de la X Reunión de ASEPELT-ESPAÑA celebrada en Albacete por la Universidad de Castilla la Mancha.
- FRANCO, M. y VIVO, J. M. (2006) "Weighting tools and alternative techniques to Generate weighted probability models in Valuation theory". En HERRERÍAS, R.; CALLEJÓN, J. y HERRERÍAS, J. M. (editores, 2006). "Distribution Models Theory". World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 67-83.
- GARCÍA, C. B. (2007) "Generalizaciones de la distribución biparabólica: Aplicaciones en el ámbito financiero y al campo de la valoración". Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- GARCÍA, J., CRUZ, S. y ROSADO, Y. (2000) "Las funciones de distribución multivariantes en la Teoría General de Valoración". Actas en CD-Rom de la XIV Reunión ASEPELT-ESPAÑA, celebrada en Oviedo.

- GARCÍA, J., CRUZ, S. y ROSADO, Y. (2002) "Extensión multi-índice del método beta en valoración agraria". Economía Agraria y Recursos Naturales, 2, 3-26.
- GUADALAJARA, N. (1996) (2ª Edición) "Valoración Agraria. Casos Prácticos". Ed. Mundi-Prensa. Madrid.
- HERRERÍAS, J. M. (2002). "Avances en la Teoría General de Valoración en Ambiente de Incertidumbre". Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- HERRERÍAS, R.; GARCÍA, J.; CRUZ, S. y HERRERÍAS, J. M. (2001) "Il modello probabilistico trapezoidale, nel metodo delle due distribuzioni della teoria generale di valutazione". Genio Rurale. Anno LXIV Abril 2001, nº 4, 3-9
- HERRERÍAS, R. y PALACIOS, F. (2007) "Curso de Inferencia Estadística y del Modelo Lineal Simple". Delta Publicaciones.
- HERRERÍAS, R. y HERRERÍAS, J.M. (2009) "El modelo probabilístico rectangular-triangular. Aplicación a la tasación de fincas rústicas". XVII Jornadas ASEPUMA – V Encuentro Internacional. Rect@ Vol Actas_17 Issue 1.
- HERRERÍAS, R. y HERRERÍAS, J.M. (2010) "El modelo probabilístico rectangular-trapezoidal. Aplicación a la tasación de fincas rústicas". XVIII Jornadas ASEPUMA – VI Encuentro Internacional. Rect@ Vol Actas_18 Issue 1.
- LOZANO, J. J. (1996) "Tasación urbana: una metodología para informes de tasación masiva". Tesis Doctoral. Universidad Politécnica Madrid.
- PALACIOS, F.; CALLEJÓN, J. y HERRERÍAS, J. M. (2000) "Fundamentos probabilísticos del método de valoración de las dos distribuciones". Actas en CD-Rom de la XIV Reunión ASEPELT-ESPAÑA, celebrada en Oviedo.
- ROMERO, C. (1977) "Valoración por el método de las dos distribuciones Beta: una extensión". Revista de Economía Política, 75, 47-62. Madrid.