Resolución de una extensión del problema del líder-Seguidor mediante programación lineal

Clara M. Campos Rodríguez(1), José A. Moreno Pérez(1)
y Dolores R Santos Peñate(2)

(1) *Instituto Universitario de Desarrollo Regional,*
Universidad de La Laguna.

(2) *Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión*
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

RESUMEN

En este trabajo se considera una versión del modelo de localización líder-seguidor que incorpora costes dependientes de las localizaciones; estos costes intervienen en una restricción presupuestaria que sustituye a la condición que limita el número de centros de las empresas competidoras. El problema consiste en determinar las estrategias óptimas para dos empresas, la empresa líder y la seguidora, que entran en un mercado de forma secuencial tratando de maximizar su cuota de mercado. La demanda existente se reparte entre las empresas competidoras atendiendo a la proximidad entre clientes y centros proveedores. La formulación propuesta incorpora un coste distinto para cada una de las localizaciones de los establecimientos de cada empresa. El objetivo del seguidor, una vez conocida la ubicación del líder, es maximizar la cuota de mercado que captura. El problema de optimización del líder consiste en minimizar la máxima cuota de mercado que capturaría el seguidor. Ambos problemas son formulados en términos de un problema de programación lineal.

***Palabras claves*:** Localización competitiva, problema del líder-seguidor.

***Área temática*:** Optimización

ABSTRACT

In this paper we consider a version of the leader-follower location model that includes costs of the locations. These costs appear in a budgetary constraint that replaces the condition that bounds the number of facility centers for each competing firm. The problem is to determine optimal strategies for each firm, the leader and the follower, which enter the market sequentially trying to maximize their market share. The existing demand is satisfied by the rival firms according to the proximity between clients and facilities. The proposed formulation incorporates a different cost for each location for the facilities of both firms. The objective of the follower, when the location of the leader is known, is to maximize its captured demand or market share. The optimization problem of the leader is to minimize the maximum market share that the follower would capture. Both problems are formulated as linear programming problems.

***Keywords*:** Competitive location, Leader-follower problem.

<u>*Acknowledgments:*</u>

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Gobierno de España y FEDER (Referencias ECO2008-05589 y TIN2008-06872-C04-01).

1. INTRODUCCIÓN

Los modelos de competencia espacial representan situaciones en las que dos o más entidades compiten para captar elementos distribuidos en el espacio, tomando decisiones donde al menos una de las variables relevantes es la localización de estas entidades. En nuestro caso consideraremos que estas entidades son empresas que compiten por proveer de productos o servicios a clientes distribuidos en un conjunto finito de puntos. Junto a la localización, pueden intervenir otras variables como, por ejemplo, los precios de venta, las cantidades ofertadas, y la dimensión de los centros suministradores del bien o servicio.

Estos modelos están dirigidos a determinar estrategias óptimas en la toma de decisiones sobre la localización, con el fin a alcanzar ciertos objetivos. Aunque el objetivo natural de las empresas es maximizar sus beneficios o la cuota de mercado, pueden perseguirse otros. En este sentido, podríamos considerar los siguientes:

- La empresa quiere maximizar su cuota de mercado.
- La empresa quiere minimizar la cuota de mercado de su competidor.
- La empresa quiere maximizar la diferencia entre su cuota de mercado y la de su competidor.
- La empresa quiere asegurar que su cuota de mercado no es inferior a la de su competidor.

En problemas en los que el bien o servicio tiene carácter esencial y, por tanto, la demanda existente debe ser totalmente satisfecha, la demanda total se reparte entre los competidores y los cuatro objetivos anteriores son equivalentes.

El comportamiento del cliente se modela mediante una regla de elección. Dadas las características y ubicación de dos establecimientos que ofertan un determinado producto, la regla de elección del cliente establece los criterios de decisión y la forma en que éste lleva a cabo la elección de los centros por parte del cliente. Si suponemos que el único criterio de elección es la distancia entre el cliente y los establecimientos, pueden considerarse las siguientes reglas de decisión:

- Regla de elección *binaria*, los clientes eligen el establecimiento más cercano y utilizan en él todo su poder de compra.

- Regla de elección *parcialmente binaria*, los clientes eligen el establecimiento más cercano de cada una de las firmas que operan en el mercado.
- Regla de elección *proporcional*, los clientes eligen todos los establecimientos y utilizan en ellos una cantidad de poder de compra que viene dada por una función decreciente de la distancia desde el cliente al establecimiento.

La regla de elección binaria representa un comportamiento de “todo o nada”. Según ésta, un cliente satisfaría toda su demanda en el centro más próximo, aunque hubiese otro establecimiento casi tan cercano como aquél. Los empates se resuelven mediante una función de distribución. La regla de elección binaria supone que el cliente es sensible a cualquier diferencia entre las distancias a los establecimientos, lo cual no es realista. A pesar de estas deficiencias, el modelo binario es importante desde el punto de vista teórico y es muy útil para las aplicaciones en las que el producto puede ser considerado homogéneo y se supone que los establecimientos son idénticos, como por ejemplo los quioscos de periódicos y las farmacias.

En el extremo opuesto a la regla de elección binaria encontramos la regla de elección proporcional. De acuerdo con esta regla, un cliente visita todos los establecimientos y la porción de demanda capturada por cada uno de ellos depende de la distancia entre el cliente y el establecimiento.

La disposición del cliente a viajar una distancia larga para acudir a un establecimiento está condicionada por el carácter del bien demandado. Los bienes esenciales deben ser consumidos y los clientes visitan uno o más establecimientos para obtenerlos. Los bienes no esenciales no son indispensables, de manera que los clientes pueden decidir no visitar ciertos establecimientos si consideran que la distancia hasta ellos es demasiado grande. Los bienes esenciales y no esenciales se corresponden con las denominadas demandas inelásticas y elásticas respectivamente.

El estado del mercado viene definido por las firmas que operan en él y por las reglas que gobiernan la apertura y cierre de los establecimientos. En el escenario que contemplamos el mercado está vacío y la firma F_1 quiere entrar en el mercado, una de las estrategias posibles para la firma F_1 es abrir los establecimientos en las localizaciones que minimicen la máxima cuota de mercado que los competidores puedan alcanzar si entran en el futuro en el mercado como maximizadores de su cuota de mercado. En este problema de localización secuencial la firma F_1 es el líder y los competidores son los seguidores.

Un problema de localización líder-seguidor se denomina también problema de Stackelberg. Una solución de Stackelberg es un par (X^*,Y^*) donde Y^* es la estrategia óptima del seguidor si el líder tiene sus establecimientos localizados en X^*, y X^* es la estrategia preventiva óptima del líder, conociendo las limitaciones presupuestarias de ambas firmas. Para el problema en redes, los términos, $(r|X_p)$-medianoide y $(r|p)$-centroide fueron introducidos por Hakimi (1983) para denominar los problemas del seguidor y del líder, respectivamente, cuando los costes de localización son uniformes y p y r son el número de establecimientos que abren el líder y el seguidor, respectivamente.

En este trabajo describimos la formulación de los problemas de optimización involucrados en el modelo líder-seguidor como problemas de programación lineal, considerando que los costes de las distintas localizaciones son diferentes y que cada uno de los competidores tiene un límite presupuestario para la selección de sus ubicaciones.

2. PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN COMPETITIVA

2.1. Antecedentes

Revisiones de los modelos de localización competitiva se pueden encontrar en Eiselt y Laporte (1989), Eiselt, Laporte y Thisse (1993), Friesz, Miller y Tobin (1988), y Plastria (2001), entre otros. Un resumen del modelo líder-seguidor en redes es presentado en Santos-Peñate, Suárez-Vega y Dorta-González (2007). ReVelle (1986) formuló el Problema de Captura Máxima, éste es el problema del seguidor discreto considerando la localización de varios establecimientos, con una regla de elección binaria y demanda inelástica. Una revisión del Problema de Captura Máxima y algunas extensiones se presenta en Serra y ReVelle (1995). El problema de localización del líder-seguidor en redes fue formalizado por Hakimi (1983, 1990) que introdujo los términos $(r|p)$-centroide y $(r|X_p)$-medianoide para denominar a las soluciones de los problemas del líder y del seguidor, respectivamente. El $(r|X_p)$-medianoide es la solución óptima del problema del seguidor que ha de elegir r localizaciones cuando el líder tiene

p establecimientos localizados en los puntos de X_p. El $(r|p)$-centroide es la solución óptima del líder cuando el líder abre p establecimientos y el seguidor abre r. Algunos resultados sobre la existencia de solución óptima en el conjunto de vértices para el problema del $(r|X_p)$-medianoide en diferentes escenarios, pueden encontrarse en Hakimi (1964) y Suárez-Vega et al. (2004). Un estudio reciente de Spoerhase y Wirth (2009) incluye un resultado de la discretización para el $(1|p)$-centroide en un árbol.

Los resultados de la discretización permiten la resolución de problemas en redes usando herramientas diseñadas para resolver problemas en espacios discretos. En ciertos escenarios, estos resultados garantizan la existencia de un $(r|X_p)$-medianoide en el conjunto de vértices que se convierte en el conjunto de localizaciones candidatas para abrir los establecimientos. En otras situaciones, el conjunto de candidatos depende de las localizaciones elegidas por el líder, haciendo el problema más difícil. Sólo unos pocos artículos de modelos de localización muestran procedimientos para encontrar una solución de Stackelberg, incluso cuando se asume que los vértices son las únicas localizaciones candidatas (ver por ejemplo, Benati y Laporte (1994); Bhadury y otros (2003); Redondo y otros (2010); Serra y ReVelle (1994, 1995); Spoerhase y Wirth (2009)).

2.2. El modelo

Sea C el conjunto de las localizaciones de los clientes y sea L el conjunto de posibles localizaciones de establecimientos sobre una red o grafo $G=(V,E)$. Los conjuntos C y L son por lo general finitos y consisten en vértices; es decir, $C,L \subseteq V$. Sea $d(c,x)$ la distancia desde la localización $c\in C$ a la localización $x\in L$. Sea v una función de valor o coste sobre el conjunto de las posibles localizaciones de establecimientos, donde el peso $v(x)$ de la localización x representa el coste de la localización x. Sea w una función de pesos sobre el conjunto de las localizaciones de los clientes, donde el peso $w(c)$ de la localización c representa la demanda de los clientes ubicados en ese punto. El conjunto C es el conjunto de los puntos de demanda.

El modelo básico es el modelo del líder-seguidor simple en el que cada competidor sólo va a localizar un establecimiento. Denotemos por x a la localización del líder y por y a la localización del seguidor. Para dos puntos distintos, x e y de L, la preferencia de cada cliente en c se establece comparando las distancias a las localizaciones $d(c,y)$ y $d(c,x)$. El establecimiento en $y \in L$ es preferido por el cliente en c a $x \in L$ si $d(c,y) < d(c,x)$.

Para cada par de posibles localizaciones x e $y \in$ L, sea $C(y \prec x)$ el conjunto de localizaciones de clientes que cambian su elección de la localización x por la localización y más cercana. Entonces $C(y \prec x) = \{c \in C : d(c,y) < d(c,x)\}$. La demanda total de los clientes que cambiarían a la localización y desde la localización x se denota por

$$W(y \prec x) = \sum_{c \in C(y \prec x)} w(c).$$

Sea:

$$W^*(x) = \max_{y \in L} W(y \prec x).$$

Un x-**medianoide** es un punto $y \in L$ tal que $W^*(x) = W(y \prec x)$. Un **centroide** es un punto $x^* \in L$ tal que

$$W^*(x^*) = \min_{x \in L} W^*(x).$$

Así el problema del centroide es el problema minimax

$$\min_{x \in L} \max_{z \in L} W(z \prec x).$$

El conjunto X^* de centroides viene dado por:

$$X^* = \arg\min_{x \in L} W^*(x) = \arg\min_{x \in L} \max_{z \in L} W(z \prec x).$$

Si tanto el seguidor como el líder están sujetos a restricciones presupuestarias o de otro tipo que les impiden considerar todos los puntos de L como posibles elecciones nos encontramos ante la versión restringida del problema. Sean L_X y L_Y las posibles elecciones del líder y del seguidor, respectivamente. Entonces la función W^* se calcula por:

$$W^*(x) = \max_{y \in L_Y} W(y \prec x).$$

Por tanto, dada la elección $x \in L_X$ del líder, el problema del x-**medianoide** restringido consiste en encontrar el punto $y \in L_Y$ tal que $W^*(x) = W(y \prec x)$. El problema restringido del **centroide** consiste en encontrar el punto $x^* \in L_X$ tal que

$$W^*\left(x^*\right) = \min_{x \in L_Y} W^*\left(x\right).$$

Consideremos la extensión de estos conceptos cuando los puntos x e y de L son sustituidos por conjuntos de localizaciones. La distancia desde la localización c de un cliente hasta un conjunto de localizaciones $Z \subseteq L$ es :

$$d(c,Z) = \min\left\{d(c,z) : z \in Z\right\}.$$

Los clientes que cambian su elección al punto $y \in L$ desde un conjunto $X \subseteq L$ son aquellos más cercanos a y que a cualquier punto de X. Por lo tanto:

$$C(y \prec X) = \bigcap_{x \in X} C(y \prec x) = \left\{c \in C : d(c,y) < d(c,X)\right\}.$$

El conjunto $C(Y \prec X)$ de localizaciones de clientes que captura el conjunto de localizaciones $Y \subseteq L$ frente al conjunto de localizaciones $X \subseteq L$ es el conjunto de puntos de C para los que existe un punto de Y más cerca que cualquier punto de X. Así

$$C(Y \prec X) = \left\{c \in C : d(c,Y) < d(c,X)\right\}.$$

Éste es el conjunto de localizaciones de puntos c tales que para cualquier punto $x \in X$ existe un punto $y \in Y$ más cerca del cliente en c de lo que lo está x; este punto y depende del punto c y de la localización x. El conjunto $C(Y \prec X)$ se puede obtener de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C(Y \prec X) &= \bigcup_{y \in Y} C(y \prec X) = \bigcup_{y \in Y} \bigcap_{x \in X} C(y \prec x) = \\ &= \left\{c \in C : \forall x \in X \ \exists y \in Y : d(c,y) < d(c,x)\right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, la demanda total de los clientes que captura el conjunto Y al conjunto X es:

$$W\left(Y \prec X\right) = \sum_{c \in C(Y \prec X)} w\left(c\right).$$

El modelo del líder-seguidor también puede ser formulado usando los conjuntos de localizaciones que capturan la demanda de los clientes dada la localización del competidor (ver ReVelle, 1986). Sea $Z(c:X) = \left\{z \in L : d(c,z) < d(c,X)\right\}$ el conjunto de localizaciones que capturan al cliente en c cuando son comparadas con el conjunto de localizaciones X. Un cliente en c preferirá una localización de un establecimiento del conjunto Y de localizaciones del seguidor al conjunto de localizaciones X si y solo si

$$Y \cap Z(c:X) \neq \emptyset .$$

Así

$$C(Y \prec X) = \{c \in C : Y \cap Z(c:X) \neq \emptyset\}.$$

Los conjuntos $Z(c : X)$ contienen las localizaciones de interés, las que tienen que ser consideradas cuando buscamos buenos seguidores si el líder tiene sus centros ubicados en las localizaciones de X.

3. NOCIONES DE SOLUCIONES

En esta sección vamos a extender las nociones de solución dadas para el caso en que las firmas competidoras instalan un único centro, al caso en que las firmas desean determinar las localizaciones para varios establecimientos. Además, suponemos que el coste de los establecimientos a abrir por cada firma tiene una limitación presupuestaria. Sea P el límite del coste de los establecimientos que abrirá el líder y R el de los que instalará el seguidor. Denotamos por L^Q al conjunto de subconjuntos de L con coste no superior a Q, es decir

$$L^Q = \left\{ X \subseteq L : v(X) = \sum_{x \in X} v(x) \leq Q \right\}$$

Así, si $X \subseteq L$ es el conjunto de las localizaciones de los establecimientos elegidas por el líder, entonces un $(R|X)$-medianoide es el mejor conjunto de coste no superior a R para abrir los centros del seguidor. Puede existir más de un $(R|X)$-medianoide.

Definición 1. Un conjunto de localizaciones $Y \in L^R$ es un $(R|X)$-***medianoide*** para el conjunto de puntos de demanda C si y sólo si

$$W(Y \prec X) \geq W(Z \prec X), \quad \forall Z \in L^R.$$

Denotamos $Y_R(X)$ al conjunto de $(R|X)$-medianoides, para cada $R > 0$ y $X \subseteq L$. Entonces,

$$Y_R(X) = \arg\max_{Y \in L^R} W(Y \prec X).$$

La noción de $(R|P)$-centroide se introduce para definir la solución del líder cuando éste quiere instalar establecimientos, con un límite presupuestario P y de manera que la demanda total de los clientes que prefieren el conjunto de centros del seguidor sea mínima.

Definición 2. Un conjunto de localizaciones $X \in L^P$ es un $(R|P)$-***centroide*** si y sólo si

$$\max_{Y \in L^R} W(Y \prec X) \leq \max_{Y \in L^R} W(Y \prec Z), \quad \forall Z \in L^P.$$

El valor de la puntuación de X viene expresado por

$$W_R^*(X) = \max_{Y \in L^R} W(Y \prec X) = W(Y^* \prec X), \quad \text{para } Y^* \in Y_R(X).$$

Entonces $X \in L^P$ es un ($R|P$)-centroide si

$$W_R^*(X) = \min_{Z \in L^P} W_R^*(Z).$$

Por lo tanto, el conjunto $X^* \in L^P$ es un conjunto ($R|P$)-centroide si y sólo si

$$X^* \in \arg\min_{Z \in L^P} \max_{Y \in L^R} W(Y \prec Z).$$

Dado el conjunto de localizaciones X para el líder, un ($R|X$)-medianoide es una solución óptima para el seguidor. Un ($R|P$)-centroide es una solución óptima para el líder.

Estas nociones de solución llevan implícita una regla de elección binaria. Esto significa que cada cliente visita el establecimiento más cercano pero los empates se deshacen favoreciendo al líder. Esto es, si X e Y son conjuntos de localizaciones para el líder y el seguidor respectivamente, y $d(c,Y) = d(c,X)$, entonces los clientes en c son capturados por el líder.

3. Formulación en programación lineal entera

En esta sección analizamos el uso de técnicas de programación lineal entera para resolver los problemas de localización competitiva descritos en las secciones anteriores. El principal objetivo es formular el problema generalizado como un problema de programación lineal entera. El procedimiento seguido está inspirado en un trabajo de Dobson y Karmarkar (1987) en el que estos autores formulan un problema de localización competitiva como un problema de programación lineal.

3.1. El proceso de optimización en tres niveles

El problema del líder-seguidor con varios establecimientos se formula como un proceso de optimización en tres niveles simultáneos. El proceso incluye:

- El problema de elección del cliente. Dadas las localizaciones del líder y del seguidor, escoger el punto de servicio preferido por el cliente.

- El problema de localización del seguidor. Dadas las localizaciones del líder, seleccionar el conjunto de localizaciones del seguidor que maximiza la demanda total captada.
- El problema de localización del líder. Determinar el conjunto de localizaciones del líder que minimiza la máxima demanda que puede capturar el seguidor.

Sea $n = |C|$ el cardinal del conjunto C de los puntos de demanda o de localizaciones de los clientes. Se denota por $K = \{1, 2, \ldots, n\} = [1..n]$ al conjunto de índices para estos puntos y por h_k al total de las demandas de los clientes localizados en el k-ésimo punto de demanda, $k \in K$. Sea $m = |L|$ el cardinal del conjunto L de localizaciones candidatas para los centros de servicio de ambas firmas; el líder y el seguidor. Se denota por $I = \{1, 2, \ldots, m\} = [1..m]$ al conjunto de índices para estas localizaciones candidatas.

Para cada punto de demanda $k \in K$, se define el *vector* binario m-dimensional z_k, esto es, $z_k \in \{0,1\}^m$, de la forma $z_k = (z_{k1}, \ldots, z_{km})$ donde:

$$z_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si el cliente en k elige la localización } i \in I \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Las localizaciones del líder y el seguidor están representadas por los vectores binarios m-dimensionales respectivos x e y. Esto es, $x,y \in \{0,1\}^m$, con $x = (x_1, \ldots, x_m)$ e $y = (y_1, \ldots, y_m)$, definidos de la forma:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si el líder tiene un centro en la localización } i \in I \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si el seguidor tiene un centro en la localización } i \in I \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Los vectores de las variables de decisión, x e y, tienen un número de componentes que toman el valor 1 correspondientes a las localizaciones seleccionadas y el resto de las variables toma el valor 0.

En cada problema de elección del cliente, los conjuntos X e Y, conteniendo las localizaciones de los establecimientos del líder y el seguidor, respectivamente, son datos. Éstos son representados por los vectores $\bar{x}$ e $\bar{y}$ que son los correspondientes m-vectores binarios de los valores fijados para las variables x e y. Para el problema de localización del seguidor se tiene un m-vector de valores dados o datos $\bar{x}$, y $(1+n)$ m-vectores de variables binarias, y y z_k, $k \in [1..n]$. Para el problema de localización del líder se tienen $(2+n)$ m-vectores de variables binarias; x, y y z_k, $k \in [1..n]$.

3.2. Problema de selección del cliente

Consideremos los problemas de optimización de los clientes. Este problema consiste en seleccionar el establecimiento preferido por cada cliente entre las localizaciones establecidas por el líder y el seguidor, que viene dadas por los vectores $\bar{x}, \bar{y} \in \{0,1\}^m$. Se denota por $C_k(\bar{x},\bar{y})$ al problema de optimización de selección del cliente situado en el punto de demanda $k \in [1..n]$. Dadas las localizaciones del líder y del seguidor, este problema consiste en seleccionar la localización preferida entre ellas.

La solución de cada problema $C_k(\bar{x},\bar{y})$ se obtiene usando los coeficientes a_{ij}^k, b_{ij}^k y c_{ij}^k dados, $\forall k \in [1..n]$ y $\forall i,j \in [1..m]$, por

$$a_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad d_{ki} < d_{kj} \\ 0 & \text{si} \quad d_{ki} \geq d_{kj} \end{cases}$$

$$b_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad d_{ki} \leq d_{kj} \\ 0 & \text{si} \quad d_{ki} > d_{kj} \end{cases}$$

$$c_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad d_{ki} \leq d_{kj} \\ 0 & \text{si} \quad d_{ki} > d_{kj} \end{cases}$$

Para un cliente en $k \in [1..n]$ y una localización $i \in [1..m]$, el cliente elige otra localización distinta $j \in [1..m]$, si sucede uno de los casos siguientes:

(i) ningún centro opera en la localización i;

(ii) existe un centro del líder en la localización i pero el cliente prefiere un centro en una localización distinta j; o

(iii) existe un centro de la empresa seguidora en la localización i pero el cliente prefiere acudir a otro centro ubicado en una localización distinta j.

Por tanto, $z_{ki} = 0$ en cualquiera de los casos siguientes:

- Si $\bar{x}_i = \bar{y}_i = 0$.
- Si $\bar{x}_i = 1, \bar{y}_i = 0$: si $\exists j$

con $\overline{y}_j = 1$ para el que $a_{ji}^k = 1$ o con $\overline{x}_j = 1$ para el que $c_{ji}^k = 1$.

- Si $\overline{x}_i = 0, \overline{y}_i = 1$: si $\exists j$

  con $\overline{x}_j = 1$ para el que $b_{ji}^k = 1$ o con $\overline{y}_j = 1$ para el que $c_{ji}^k = 1$.

Esto se garantiza con las restricciones:

$$z_{ki} \le \overline{x}_i + \overline{y}_i$$

$$z_{ki} \le \overline{y}_i + 1 - a_{ji}^k \overline{y}_j$$

$$z_{ki} \le \overline{y}_i + 1 - c_{ji}^k \overline{x}_j$$

$$z_{ki} \le \overline{x}_i + 1 - b_{ji}^k \overline{x}_j$$

$$z_{ki} \le \overline{x}_i + 1 - c_{ji}^k \overline{y}_j$$

Por tanto, el problema de cada cliente se formula como un problema de programación lineal entera, en particular como un problema de factibilidad (obsérvese que la regla de elección binaria orientada al líder descarta que las empresas competidoras se ubiquen en la misma localización).

Proposición 4. El Problema de Selección del Cliente $C(\overline{x},\overline{y})$, $\forall\, \overline{x}, \overline{y} \in \{0,1\}^m$, puede ser resuelto por un sistema lineal con nm variables binarias y $n(1+m+4m^2)$ restricciones.

Prueba. La elección de cada cliente $C_k(\overline{x},\overline{y})$ es la solución del siguiente sistema en las variables z_{ki}:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} z_{ki} = 1,\\
&z_{ki} \le \overline{x}_i + \overline{y}_i, \quad i \in [1..m]\\
&z_{ki} \le \overline{y}_i + 1 - a_{ji}^k \overline{y}_j, \quad i, j \in [1..m]\\
&z_{ki} \le \overline{y}_i + 1 - c_{ji}^k \overline{x}_j, \quad i, j \in [1..m]\\
&z_{ki} \le \overline{y}_i + 1 - b_{ji}^k \overline{x}_j, \quad i, j \in [1..m]\\
&z_{ki} \le \overline{x}_i + 1 - c_{ji}^k \overline{y}_j, \quad i, j \in [1..m]\\
&z_{ki} \in \{0,1\}, \quad i \in [1..m]
\end{aligned}$$

Para cada k, este problema tiene m variables binarias y $4m^2 + m + 1$ restricciones lineales. La solución del problema de todos los clientes $C(\overline{x},\overline{y})$ se obtiene combinando todas las soluciones de los problemas $C_k(\overline{x},\overline{y})$ para $k \in [1..n]$. Se trata del siguiente sistema en las variables z_{ki}, $k \in [1..n]$, $i \in [1..n]$:

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ki} = 1, \quad k \in [1..n]$$
$$z_{ki} \le \overline{x}_i + \overline{y}_i, \quad i \in [1..m], k \in [1..n]$$
$$z_{ki} \le \overline{y}_i + 1 - a_{ji}^{k} \overline{y}_j, \quad i, j \in [1..m], k \in [1..n]$$
$$z_{ki} \le \overline{y}_i + 1 - c_{ji}^{k} \overline{x}_j, \quad i, j \in [1..m], k \in [1..n]$$
$$z_{ki} \le \overline{y}_i + 1 - b_{ji}^{k} \overline{x}_j, \quad i, j \in [1..m], k \in [1..n]$$
$$z_{ki} \le \overline{x}_i + 1 - c_{ji}^{k} \overline{y}_j, \quad i, j \in [1..m], k \in [1..n]$$
$$z_{ki} \in \{0,1\}, \quad i \in [1..m], k \in [1..n]$$

Este sistema tiene nm variables binarias y $n(1+m+4m^2)$ restricciones lineales. □

Obsérvese que para estos problemas los vectores $\overline{x}$ *e* $\overline{y}$ son datos, por tanto los términos a la derecha del signo de menor o igual son constantes.

3.2. Problema de localización del seguidor

Considérese ahora el Problema de Localización del Seguidor. Dada la localización del líder $\overline{x} \in \{0,1\}^m$, este problema consiste en seleccionar el conjunto de localizaciones con un coste total no superior a R que captura la mayor cantidad de demanda posible. El problema de optimización correspondiente, denotado $S_R(\overline{x})$, puede ser formulado como sigue:

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{n} h_k z_{ki} \right] y_i$$
$$\text{Sujeto a: } \sum_{i=1}^{m} v_i y_i \le R,$$
$$z \text{ es solución de } C(\overline{x}, y),$$
$$y_i \in \{0,1\}, \quad i \in [1..m].$$

La función objetivo es la demanda total de los clientes que prefieren un centro de la empresa seguidora a cualquiera de las del líder. La primera restricción garantiza que el coste del conjunto de localizaciones para el seguidor no es superior a su presupuesto R, donde los coeficientes v_i son los costes de las correspondientes localizaciones; $v(x_i) = v_i$.

Si se sustituye la segunda restricción por el sistema lineal (29) se obtiene el siguiente problema de optimización con restricciones lineales.

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximizar } \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{n} h_k z_{ki}\right] y_i\\
&\text{Sujeto a: } \sum_{i=1}^{m} v_i y_i \le R,\\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} z_{ki} = 1, \quad k \in [1..n]\\
&\qquad z_{ki} \le \bar{x}_i + y_i, \quad i \in [1..m], k \in [1..n]\\
&\qquad z_{ki} \le y_i + 1 - a_{ji}^k y_j, \quad i, j \in [1..m], k \in [1..n]\\
&\qquad z_{ki} \le y_i + 1 - c_{ji}^k \bar{x}_j, \quad i, j \in [1..m], k \in [1..n]\\
&\qquad z_{ki} \le y_i + 1 - b_{ji}^k \bar{x}_j, \quad i, j \in [1..m], k \in [1..n]\\
&\qquad z_{ki} \le \bar{x}_i + 1 - c_{ji}^k y_j, \quad i, j \in [1..m], k \in [1..n]\\
&\qquad z_{ki} \in \{0,1\}, y_i \in \{0,1\}, \quad i \in [1..m], k \in [1..n].
\end{aligned}
$$

Sin embargo este problema no es un problema de programación lineal, tal como aparece en Dobson y Karmarkar (1987), ya que la función objetivo incluye el producto de variables del problema.

No obstante, el problema del conjunto de localización del seguidor $S_R(\bar{x})$ puede ser formulado como un problema de programación lineal usando los conjuntos de clientes que prefieren una localización del seguidor al conjunto de localizaciones del líder.

Proposición 5. El problema de localización del seguidor $S_R(\bar{x})$, $\forall\, \bar{x} \in \{0,1\}^m$, es un problema de programación lineal entera con $n(m+1)$ variables binarias

Prueba. Dadas las localizaciones del líder definidas por $\bar{x}$, los clientes capturados por cada localización individual i del seguidor son los que prefieren dicha localización a cualquiera de las localizaciones del líder dadas por $\bar{x}$. Consideramos ahora las variables z_{km} definidas, para cada punto de demanda $k \in [1..n]$ y cada localización posible $i \in [1..m]$ por:

$$
z_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si el cliente en } k \text{ elige la localización del seguidor } i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}
$$

De forma similar al uso que se dio a las matrices de coeficientes a_{ij}^k, consideremos ahora los vectores de coeficientes a_i^k, $i \in [1..m]$, para cada $k \in [1..n]$ dados por

$$a_i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } d_{ki} < \min\left\{ d_{kj} : \overline{x}_j = 1 \right\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si un cliente en $k \in [1..n]$ prefiere la localización $i \in [1..m]$ del seguidor a cualquier localización del líder entonces $a_i^k = 1$, y en cualquier otro caso $a_i^k = 0$. Estos coeficientes se pueden obtener de la matriz *A* de coeficientes a_{ij}^k mediante las fórmulas:

$$a_i^k = \max\left\{ a_{ij}^k \overline{x}_j : j \in [1..m] \right\}, \; k \in [1..n], \;\; i \in [1..m].$$

Entonces el problema de optimización consiste en seleccionar las localizaciones del seguidor que capturan conjuntamente la mayor cantidad de demanda sin sobrepasar el presupuesto *R*.

Si el punto de localización *i* no es seleccionado por el seguidor o, siendo seleccionado, el cliente ubicado en *k* prefiere alguna localización del líder a la localización *i* del seguidor, entonces la variable z_{ki} debe ser igual a 0. La condición que establece los valores de z_{ki} a partir de los valores de los coeficientes a_i^k es $z_{ki} \le a_i^k y_i$.

Por tanto, el problema de localización del seguidor es el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} \text{Maximizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} h_k z_{ki} & \\ \text{Sujeto a:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} v_i y_i \le R, & \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} z_{ki} \le 1, & k \in [1..n] \\ & z_{ki} - a_i^k y_i \le 0, & i \in [1..m], k \in [1..n] \\ & z_{ki}, y_i \in \left\{0,1\right\}, & i \in [1..m], k \in [1..n]. \end{array}$$

Los coeficientes a_i^k son constantes, ya que el vector $\overline{x}$ es un dato en este problema. Por tanto, éste es un problema de optimización con una función objetivo lineal, $m(n+1)$ variables binarias y $1+n+nm$ restricciones lineales. □

El problema de optimización del seguidor puede ser considerado como un problema de máximo cubrimiento que consiste en seleccionar el conjunto de r puntos que maximiza la demanda captada. Procedimientos para resolver este tipo de problemas fueron propuestos, entre otros, por Gandhi, Khuller y Srinivasan (2004).

La formulación anterior puede simplificarse, dando lugar a una reducción del número de variables y restricciones, si utilizamos los conjuntos de localizaciones que *cubren* cada punto de demanda. Un punto *i* de localización *cubre* al punto de demanda *k* si la distancia desde la posición *k* hasta la firma líder excede a la distancia desde esta posición al punto *i*. El conjunto de puntos de localización *i* que cubren al punto de demanda *k* es: $L_k = \left\{ i \in [1..m] : d_{ki} < \min\left\{ d_{kj} : \bar{x}_j = 1 \right\} \right\}$ y el conjunto de puntos de demanda *k* cubiertos por la localización *i* es:

$$K_i = \left\{ k \in [1..n] : d_{ki} < \min\left\{ d_{kj} : \bar{x}_j = 1 \right\} \right\} = \left\{ k \in [1..n] : i \in L_k \right\}$$

Sean $N = \left\{ k \in [1..n] : L_k \neq \varnothing \right\}$ el conjunto de puntos de demanda que son cubiertos por alguna de las localizaciones candidatas para abrir un centro del seguidor y $M = \left\{ i \in [1..m] : K_i \neq \varnothing \right\}$ el conjunto de las localizaciones candidatas que cubren algún punto de demanda. Tenemos $N = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ y $M = \bigcup_{k=1}^{n} L_k$.

Entonces el problema del seguidor puede formularse como sigue:

$$\begin{array}{lll}
\text{Maximizar} & \displaystyle\sum_{k \in N} \sum_{i \in L_k} h_k z_{ki} & \\
\text{Sujeto a:} & \displaystyle\sum_{i \in M} v_i y_i \le R, & \\
& \displaystyle\sum_{i \in L_k} z_{ki} \le 1, & k \in N \\
& z_{ki} \le y_i, & i \in L_k, k \in N \\
& z_{ki}, y_i \in \{0,1\}, & i \in M, k \in N.
\end{array}$$

Esta formulación tiene $|M| + \sum_{k=1}^{n} |L_k| \le m(n+1)$ variables binarias y el número de restricciones es $1 + |N| + \sum_{k=1}^{n} |L_k| \le 1 + n(1+m)$, además de las que imponen el carácter binario de las variables, lo cual puede traducirse en una reducción significativa del número de variables y restricciones.

3.3. Problema de localización del líder

El tercer y último problema es el problema de localización del líder. Este problema consiste en determinar el conjunto X de localizaciones para el líder sin sobrepasar el presupuesto P tales que la mejor selección Y del seguidor con un presupuesto no superior a R capture la menor cantidad de demanda. Se trata del problema del ($R|P$)-centroide que, dado que la demanda se considera inelástica (bienes esenciales), se puede formular como sigue:

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{n} h_k z_{ki}\right] x_i$$

$$\begin{aligned}\text{Sujeto a: } & \sum_{i=1}^{m} v_i x_i \leq P,\\ & z \text{ es solución de } C(x,y),\\ & y \text{ es solución de } S_r(x),\\ & x_i \in \{0,1\}, \quad i \in [1..m].\end{aligned}$$

Este es el problema que se obtiene usando la metodología propuesta por Dobson y Karmarkar (1987). Sin embargo, la función objetivo es no lineal en las variables z_{ki} y x_i. Además, las variables z_{ki} son diferentes para cada valor de y, y la relación entre ellas también es no lineal. Por otro lado, el problema de optimización del líder puede también ser formulado como un problema minimax. El problema consiste en encontrar un conjunto X^* tal que:

$$W^* = W^*(X^*) = \min_{v(X)\leq P} W^*(X) = \min_{v(X)\leq P} \max_{v(Y)\leq R} W(Y \prec X).$$

La metodología apropiada para formular este problema como un problema de programación lineal es similar a la usualmente aplicada a los problemas clásicos de localización minimax; ver por ejemplo, la formulación del problema del p-centro dada en Daskin (1995).

Consideremos un índice $j \in J \subset \left\{1, 2, ..., \binom{m}{r}\right\}$ para representar las posibles selecciones del seguidor dentro de su límite presupuestario $Y \in L^R$.

Teorema 1. El problema del ($R|P$)-centroide se puede formular como un problema de programación lineal combinatoria con $|J|nm+m+1$ variables y $|J|nm+n+1$ restricciones.

Prueba. Un problema minimax se formula como un problema de optimización lineal usando como función objetivo a minimizar una cota superior de la función a maximizar. Así el problema $W^* = \min_{v(X)\leq P} \max_{v(Y)\leq R} W(Y < X)$ en términos de la cota W y la solución X es

$W^* = \min\{W : W(Y \prec X) \leq W, \forall Y \in L^R \text{ con } v(X) \leq P\}$. La formulación de este problema como un problema de programación matemática lineal es:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \; W \\ &\text{Sujeto a: } \; v(X) \leq P, \\ &\qquad\qquad W(Y \prec X) \leq W, \forall Y \in L^R. \end{aligned}$$

Este problema tiene m+1 variables (W,X) y 1+|J| restricciones, una restricción que fija el tamaño de X y una para cada subconjunto $Y \subseteq L$ con $v(Y) \leq R$; es decir $Y \in L^R$. Éste es un problema lineal si las restricciones $W(Y < X) \leq W$ son restricciones lineales en términos de X, para cualquier $Y \in L^R$.

El problema de encontrar un conjunto $X \in L^P$ tal que $W(Y \prec X) \leq W, \forall Y \in L^R$, es similar al problema $S_R(X)$. Sin embargo, en tal problema necesitamos maximizar $W(Y \prec X)$ para un único conjunto X. Ahora tenemos que encontrar un conjunto $X \in L^P$ que minimice la máxima cantidad de demanda de los clientes que prefieren Y a X, para todos los conjuntos $Y \in L^R$ a la vez. Nótese que $W(Y \prec X) = W(C) - W(X \preceq Y)$, donde $W(C)$ es la demanda del total de clientes y $W(X \preceq Y)$ es el total de la demanda de los clientes que no prefieren Y a X. Por tanto, para resolver el problema maximizamos $W(X \preceq Y)$ en el conjunto de todas las posibles elecciones de $Y \in L^R$.

Denotaremos por Y_j al conjunto correspondiente a cada índice $j \in J$, es decir, tal que $L^R = \{ Y_j : j \in J \}$. Sea c_{ki}^j el coeficiente que determina los clientes que no prefieren un punto de Y_j al punto i. Estos coeficientes vienen dados por:

$$c_{ki}^j = \begin{cases} 1 & \text{si } d_{ki} < d(c_k, Y_j) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $d(c_k, Y_j)$ la distancia entre un cliente en el punto de demanda c_k y el conjunto Y_j.

Sean las variables z_{ki}^j igual a 1 si los clientes en c_k seleccionan la localización i cuando se compara X con Y_j, e igual a 0 en otro caso. Se supone que si hay varios puntos de X a la misma distancia de un cliente, el cliente selecciona sólo uno de esos puntos. Las condiciones que establecen los valores de las variables z_{ki}^j son $z_{ki}^j \leq c_{ki}^j x_i$,

$$\forall\ i,k,j, \text{ y } \sum_{i=1}^{m} z_{ki}^j \leq 1,\ \forall\ i,k,j.$$

La demanda total de los clientes que no seleccionan una localización del seguidor de Y_j cuando Y_j se compara con *X*, es

$$W(X \leq Y_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} h_k z_{ki}^j \leq 1, \quad \forall j \in J.$$

Por tanto el problema global es:

Minimizar w

Sujeto a: $\sum_{i=1}^{m} v_i x_i \leq P,$

$$W(V) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} h_k z_{ki}^j \leq w, \quad j \in J$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ki}^j \leq 1, \qquad k \in [1..n],\, j \in J$$

$$z_{ki}^j - c_{ki}^j x_i \leq 0, \qquad k \in [1..n], i \in [1..m],\, j \in J$$

$$z_{ki}^j, x_i \in \{0,1\}, \qquad k \in [1..n], i \in [1..m],\, j \in J$$

$$w \geq 0.$$

Este problema incluye la variable continua w, m variables binarias x_i y otras $nm|J|$ variables binarias z_{ki}^j. Por tanto, se trata de un problema lineal con una variable continua, $nm|J|+m$ variables binarias y $1+|J|(nm+n+1)$ restricciones lineales. De esta forma se concluye la demostración del teorema. □

Desafortunadamente, este problema es prácticamente intratable por técnicas estándares de programación lineal. Los procedimientos apropiados serían los métodos de generación de filas y columnas capaces de identificar y usar sólo aquellas variables y restricciones que son relevantes en las cercanías del óptimo.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos formalizado el problema de competencia espacial por cuotas de mercado extendiendo el modelo conocido como del líder-seguidor o de Stackelberg. Consideramos la situación en la que las firmas competidoras tienen un presupuesto determinado para afrontar los costes de sus localizaciones. La formalización se ha hecho suponiendo que los clientes prefieren unos servicios en unas ubicaciones a otras en función de la diferencia en su distancia a ellas.

Planteamos la situación como un proceso de optimización en tres fases. Describimos los tres problemas de optimización: el del líder, el del seguidor y el de los clientes como problemas de programación lineal en variables 0-1. Por tanto, los problemas se pueden abordar con las técnicas de programación lineal binaria, aunque el número de variables y restricciones en el problema del líder hace necesario procedimientos algo más sofisticados.

Como investigaciones futuras contemplamos la extensión a reglas de elección de los usuarios más realistas, tales como las reglas de decisión continuas. También pretendemos abordar el diseño de procedimientos que combinen de forma inteligente los métodos heurísticos con la metodología de la programación lineal adentrándonos en el novedoso campo de las *Matheuristics*.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- S.S. Benati, G. Laporte, Tabu search algorithms for the ($r|X_p$)-medianoid and ($r|p$)-centroid problems. *Location Science* 2 (1994) 193-204.
- J. Bhadury, H.A. Eiselt, J.H. Jaramillo, An alternating heuristic for medianoid and centroid problems in the plane. *Computers & Operations Research* 30 (2003) 553-565.
- S. Daskin, Network and discrete location. *Models, algorithms and applications*. (Wiley, New York, 1995).
- G. Dobson, U.S. Karmarkar, Competitive location on a network, *Operations Research* 35 (1987) 565-574
- H.A. Eiselt, G. Laporte, Competitive spatial models, *European Journal of Operational Research* 39 (1989) 231-242.
- H.A. Eiselt, G. Laporte, Sequential location problems, *European Journal of Operational Research* 96 (1996) 217-231
- H.A. Eiselt, G. Laporte, J.F.Thisse, Competitive location models: A framework and bibliography. *Transportation Science* 27(1) (1993) 44-54
- T.L. Friesz, T. Miller and R.L. Tobin, Competitive network facility location models: a survey. *Papers of the Regional Science Association* 65 (1988) 47-57

- R. Gandhi, S. Khuller, A. Srinivasan, Approximation algorithms for partial covering problems, *Journal of Algorithms* 53(1) (2004) 55–84
- S.L. Hakimi, On locating new facilities in a competitive environment, *European Journal of Operational Research* 12 (1983) 29-35
- S.L. Hakimi, Location with spatial interactions: competitive locations and games. In Mirchandani PB, Francis RL (ed) *Discrete Location Theory* (Wiley, New York, 1990) 439-478.
- F. Plastria, Static competitive facility location: an overview of optimization approaches, *European Journal of Operational Research* (1990) 129:461-470.
- J.L. Redondo, J. Fernández, I. García, P.M. Ortigosa, Heuristics for the facility location and design (1|1)-centroid problem on the plane. *Computational Optimization and Applications*, 45(1) 2010.
- C. ReVelle, The maximum capture or sphere of influence location problem: Hotelling revisited on a network, *Journal of Regional Science* 26(2) (1986) 343-358
- D.R. Santos-Peñate, R.R. Suárez-Vega, P. Dorta-González, The leader-follower location model, *Networks and Spatial Economics* (2007) 7:45-61.
- D. Serra, C. ReVelle, Market capture by two competitors: the preemptive location problem, *Journal of Regional Science* 34(4) (1994) 549-561.
- D. Serra, C. ReVelle, Competitive location in discrete space, in Z. Drezner (ed.) *Facility location: A survey of applications and methods* (Springer, Berlin 1995) 367-386.
- J. Spoerhase, H.C. Wirth, $(r|p)$-centroid problems on paths and trees, *Theoretical Computer Science* 410(47-49), 5128-5137 (2009)
- R. Suárez-Vega, D.R. Santos-Peñate, P. Dorta-González, Competitive multifacility location on networks: the $(r|X_p)$-medianoid problem. *Journal of Regional Science* 44(3) (2004) 569-588