

Modelización de riesgos dependientes con marginales Lomax inversa

Sarabia Alegría, José María (sarabiaj@unican.es)

Prieto Mendoza, Faustino (faustino.prieto@unican.es)

Jordá Gil, Vanesa (vanesa.jorda@unican.es)

Remuzgo Pérez, Lorena (lorena.remuzgo@unican.es)

*Departamento de Economía, Universidad de Cantabria
Avda. de los Castros s/n, 39005 Santander, España*

RESUMEN

En este trabajo se presenta una clase general de riesgos dependientes, donde los riesgos individuales siguen distribuciones de tipo Lomax inversa. La distribución Lomax inversa posee colas pesadas y se modeliza por medio de dos parámetros, uno de forma y otro de escala. Se obtiene la función de densidad conjunta de los riesgos dependientes y se consideran varios submodelos relevantes. Se proporcionan expresiones cerradas tanto para la función de densidad como para la función de distribución del riesgo total. Por otro lado, se obtienen fórmulas para diferentes medidas de riesgo, incluyendo el valor en riesgo VaR, el valor en riesgo en la cola TVaR, así como otras medidas basadas en la cola de la distribución, tanto para los riesgos individuales como para el riesgo total. Se proponen métodos de estimación según el tipo de información disponible. Los modelos desarrollados se aplican a varios conjuntos de datos relativos a riesgos dependientes, incluyendo riesgos operacionales y datos de pérdidas y ALAE.

Palabras clave: valor en riesgo, valor en riesgo en la cola, distribuciones multivariantes.

Área temática: Métodos Cuantitativos en un Entorno con Incertidumbre

ABSTRACT

In this paper, we present a general class of dependent risks, where the individual risk are modeled according to inverse Lomax distributions. The inverse Lomax distribution has heavy tails and depends on two parameters, a shape and a scale parameter. We obtain the joint density function of dependent risks and several relevant submodels are considered. Closed expressions for the probability density and the cumulative distribution functions of the total risk are provided. Furthermore, formulas for different risk measures are obtained, including value at risk VaR, the value at risk in the tail TVaR and other measures based on the tail of the distribution, both for individual risks and for risk total. Estimation methods are proposed according to the type of information available. The developed models are applied to several sets of data for dependent risks, including operational risks and loss data and ALAE.

1 INTRODUCCIÓN

El análisis estadístico y econométrico de los riesgos dependientes han recibido una gran atención en la teoría moderna del análisis de riesgos.

Los riesgos dependientes pueden aparecer en diversos ámbitos de la práctica actuarial. La propiedad de dependencia entre los riesgos puede aparecer, por ejemplo, en la distribución del tamaño de las diferentes reclamaciones, o bien entre los tiempos entre reclamaciones y en las propias primas.

En este contexto, Sarabia y Guillén (2008) han estudiado diversos modelos de dependencia en el modelo de riesgo colectivo, entre las distribuciones del número de reclamaciones y de la cantidad reclamada, haciendo uso de distribuciones especificadas condicionalmente. Clases generales de riesgos dependientes han sido propuestas por Sarabia y Prieto (2011) y Guillén et al. (2013).

La hipótesis de independencia entre riesgos individuales es habitual dentro de la teoría clásica del riesgo. Haciendo uso de la hipótesis de independencia, se obtienen fácilmente las correspondientes fórmulas para el riesgo agregado. Sin embargo, la hipótesis de independencia puede no ajustarse a la realidad.

Por ejemplo, Valdez et al. (2009) ha considerado modelos actuariales y financieros haciendo uso de la hipótesis de dependencia para el cálculo de primas. La dependencia entre riesgos ha sido establecida por medio de distribuciones multivariantes tanto esféricas como elípticas.

Usando este tipo de distribuciones, se pueden obtener cotas y aproximaciones para la agregación de riesgos, es decir, haciendo uso del modelo clásico de riesgo individual. Bajo estos supuestos de dependencia, la probabilidad de ruina ha sido calculada por Albrecher et al. (2011). Diversas propiedades de los riesgos dependientes pueden encontrarse en Denuit et al. (2005). Estos autores consideran además diversos criterios para ordenar riesgos.

Desde el punto de vista de la modelización probabilística de la dependencia señalar la importancia de las cópulas. Las cópulas permiten generar distribuciones dependientes con marginales dadas (ver por ejemplo Nelsen (1999) o Kolev et al. (2006)). Sarabia y Gómez-Déniz (2008) han revisado diversas metodologías para obtener distribuciones multivariantes dependientes. En el presente trabajo se propone y estudia una clase de riesgos dependientes, donde los riesgos individuales siguen distribuciones de tipo Lomax inversa. La distribución Lomax inversa posee colas pesadas y se modeliza de una forma simple por medio de dos parámetros, un parámetro de forma y otro de escala.

La principal motivación de este trabajo es el uso de riesgos o variables de pérdidas dependientes entre sí. Tradicionalmente, los modelos clásicos de riesgo se han construido sobre la hipótesis de independencia para la determinación de las correspondientes primas. Sin embargo, en la actualidad, la mayor complejidad y va-

riedad de seguros y reaseguros ha dado lugar a un creciente interés por el estudio de la interdependencia entre los riesgos. Algunas referencias sobre riesgos dependientes son Denuit et al. (2005) y Asimit et al. (2013).

Por otro lado, las regularidades observadas en las variables de riesgo o de pérdidas requieren el cumplimiento de determinadas propiedades en las variables aleatorias asociadas. A menudo, las observaciones de datos de pérdidas presentan valores grandes con probabilidades no despreciables, y con un gran impacto en la prima asociada. Esto supone trabajar con variables aleatorias cuyas colas se aproximen a cero lo más lentamente posible. Desde el punto de vista matemático, la convergencia “lenta” a cero para valores grandes, requiere trabajar con distribuciones con colas pesadas. Las distribuciones con colas pesadas son en el límite leyes de potencias, de modo que el exponente de la ley determina el peso de la cola. Algunas referencias sobre distribuciones con colas pesadas son Markovich (2007), Sun et al. (2008) y Benkhelifa (2014).

Las contribuciones específicas del trabajo son las siguientes. En primer lugar se propone la distribución de Lomax inversa como modelo de distribución de pérdidas. Se obtienen medidas de riesgo básicas, incluyendo el valor en riesgo, el valor en riesgo en la cola y los momentos de la cola superior. A continuación se propone una distribución multivariante con marginales Lomax inversa y dependencia. Se estudian sus propiedades básicas así como la distribución del riesgo total. Se proponen métodos de estimación basados en máxima verosimilitud, así como dos aplicaciones numéricas.

Los contenidos del artículo son los siguientes. La sección 2 presenta las principales propiedades de la distribución Lomax inversa, incluyendo diversas medidas de riesgo. La sección 3 presenta la distribución de riesgos dependientes con marginales Lomax inversa. La sección 4 se dedica a la estimación de la distribución Lomax inversa, tanto con riesgos individuales como conjuntos. Con objeto de ilustrar las

metodologías propuestas, se presentan dos aplicaciones en la sección 5. Las conclusiones del trabajo se recogen en la sección 6.

2 LA DISTRIBUCIÓN LOMAX INVERSA: PROPIEDADES BÁSICAS

En este trabajo usamos la distribución Lomax inversa definida por medio de la siguiente función de densidad:

$$f(x; p, \lambda) = \frac{px^{p-1}}{\lambda^p(1 + x/\lambda)^{p+1}}, \quad x > 0, \quad (1)$$

y $f(x; p, \lambda) = 0$ si $x < 0$, donde $p, \lambda > 0$. Una variable aleatoria con función de densidad (1) la representaremos por $X \sim \mathcal{LI}(p, \lambda)$.

La distribución Lomax inversa puede considerarse como un caso particular de la distribución beta generalizada de orden 2 (distribución GB2), introducida por McDonald (1984). Por otro lado, la distribución Lomax inversa se puede obtener a partir de la transformación inversa de la distribución Lomax clásica.

La Lomax inversa es una distribución de dos parámetros con colas pesadas, donde la mayor parte de sus características pueden obtenerse de forma explícita.

La Figura 1 representa la función de densidad de la distribución Lomax inversa para algunos valores seleccionados del parámetro de forma p con $\lambda = 1$.

2.1 Propiedades básicas

La función de distribución de la distribución Lomax inversa viene dada por,

$$F(x; p, \lambda) = \frac{(x/\lambda)^p}{(1 + x/\lambda)^p}, \quad x > 0, \quad (2)$$

y $F(x; p, \lambda) = 0$ si $x < 0$.

Si $X \sim \mathcal{LI}(\lambda, p)$, los momentos vienen dados por,

$$\mathbb{E}(X^r) = \frac{\lambda^r \Gamma(p+r) \Gamma(1-r)}{\Gamma(p)}, \quad -p < r < 1. \quad (3)$$

El valor de la moda viene dado por,

$$Mo[X] = \frac{\lambda(p-1)}{2}, \quad (4)$$

siempre que $p > 1$.

En lo sucesivo, representaremos por $X \sim \mathcal{G}(\alpha)$ una variable aleatoria tipo gamma con parámetro de forma α , de modo que $\mathbb{E}(X) = \alpha$. El siguiente lema obtiene una representación estocástica de la distribución Lomax inversa en términos de distribuciones gamma.

Lema 1 Sean Z_1 and Z_p distribuciones gamma independientes tales que $Z_1 \sim \mathcal{G}a(1)$ y $Z_p \sim \mathcal{G}a(p)$, donde $p > 0$. Si $\lambda > 0$, la variable aleatoria,

$$X = \lambda \frac{Z_p}{Z_1} \sim \mathcal{LI}(p, \lambda). \quad (5)$$

Demostración: La demostración de este resultado se obtiene condicionando sobre la variable aleatoria Z_1 .

2.2 Medidas de riesgo de la distribución Lomax inversa

Una de las principales ventajas de la distribución Lomax inversa es que muchas de las principales medidas de riesgo se pueden obtener mediante expresiones cerradas.

En primer lugar, el valor en riesgo al nivel α , $0 < \alpha < 1$, de una variable aleatoria X con función de distribución $F_X(x)$ se define como:

$$\text{VaR}[X; \alpha] = \inf\{x \in \mathbb{R}, F_X(x) \geq \alpha\}.$$

En el siguiente lema se obtiene la fórmula del VaR.

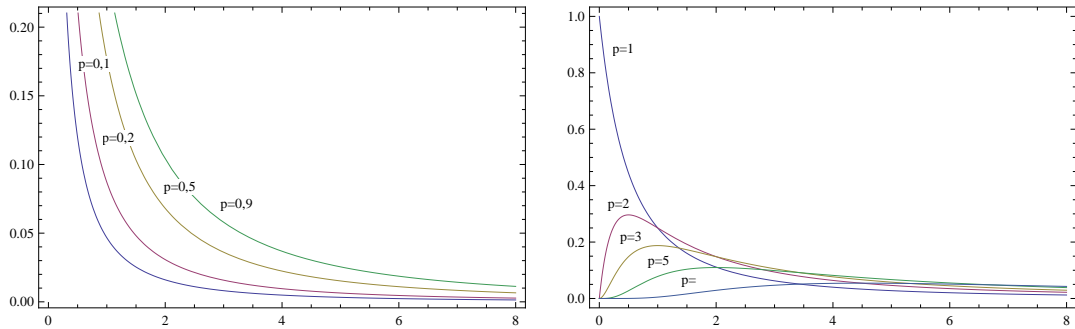


Figura 1: Funciones de densidad de la distribución Lomax inversa (fórmula (1)) para $p = 0, 1; 0, 2; 0, 5$ y $0, 9$ (izquierda) y $p = 1, 2, 3, 5$ y 10 (derecha) con $\lambda = 1$.

Lema 2 Si $X \sim \mathcal{LI}(p, \lambda)$, el valor en riesgo viene dado por,

$$\text{VaR}[X; \alpha] = \lambda \frac{\alpha^{1/p}}{1 - \alpha^{1/p}}, \quad (6)$$

donde $0 < \alpha < 1$.

Demostración: La expresión del VaR (6) se obtiene invirtiendo la función (2).

Resulta conocido que de acuerdo con los axiomas básicos que debe cumplir una medida de riesgo, el VaR no es coherente. El valor en riesgo en la cola de X (TVaR) se define como (ver Acerbi and Tasche, 2002)

$$\text{TVaR}[X; \alpha] = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 \text{VaR}[X; u] du,$$

que es una medida coherente de riesgo. Si X es continua, $\Pr(X \leq \text{VaR}[X; \alpha]) = \alpha$ y el TVaR se puede calcular como,

$$\text{TVaR}[X; \alpha] = E[X | X > \text{VaR}[X; \alpha]].$$

Para la variable transformada X^α (con $0 < \alpha < 1$) tenemos el siguiente lema.

Lema 3 Sea $X \sim \mathcal{LI}(p, \lambda)$ distribución Lomax inversa. Entonces, si $p + \alpha > 0$, $\alpha < 1$ y $p > 0$ se verifica,

$$\mathbb{E}[X^\alpha | X^\alpha > a] = \mathbb{E}(X^\alpha) \frac{1 - F_{B2(\alpha+p, 1-\alpha)}(a)}{1 - F_X(a)}, \quad (7)$$

donde $a = VaR[X; \alpha]$ y $F_{B2(p,q)}(z)$ representa la función de distribución de una beta de segunda especie.

Demostración: Véase el Lema 2 en Guillén et al. (2013).

A partir de la expresión (7) se pueden obtener directamente otras medidas de riesgo en la cola.

3 RIESGOS DEPENDIENTES CON MARGINALES LOMAX INVERSA

La modelización de riesgos dependientes con distribuciones marginales Lomax inversa se realiza mediante la siguiente distribución multivariante.

Definición 1 Sean $Z_{p_1}, Z_{p_2}, \dots, Z_{p_m}$ y Z_1 variables aleatorias independientes con distribuciones gamma $Z_{p_i} \sim \mathcal{Ga}(p_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$ y $Z_1 \sim \mathcal{Ga}(1)$ con $p_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. La distribución Lomax inversa multivariante se define por medio de la representación estocástica,

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top = \left(\lambda_1 \frac{Z_{p_1}}{Z_1}, \lambda_2 \frac{Z_{p_2}}{Z_1}, \dots, \lambda_m \frac{Z_{p_m}}{Z_1} \right)^\top, \quad (8)$$

donde $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Nótese que la variable aleatoria Z_1 introduce la dependencia en el modelo. Los parámetros λ_i , $i = 1, 2, \dots, m$ corresponden a parámetros de escala.

A partir del modelo general (8) consideramos dos submodelos:

- Submodelo 1: $\lambda_1 = \dots = \lambda_m$, donde los parámetros de escala coinciden y
- Submodelo 2: $p_1 = \dots = p_m$, donde los parámetros de forma coinciden.

3.1 Distribución conjunta de riesgos dependientes

El siguiente teorema permite obtener la distribución conjunta del vector de riesgos dependientes definido en (8).

Teorema 1 Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)^\top$ el vector aleatorio multivariante definido por medio de la representación estocástica (8). Entonces, la función de densidad conjunta viene dada por,

$$f(x_1, \dots, x_m; \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\Gamma(1 + \tilde{p})}{\prod_{i=1}^m \Gamma(p_i) \lambda_i^{p_i}} \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{p_i-1}}{(1 + \sum_{i=1}^m x_i / \lambda_i)^{\tilde{p}+1}}, \quad (9)$$

si $x_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, donde $\tilde{p} = \sum_{i=1}^m p_i$ y $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

Demostración: Se comienza con la función de densidad conjunta de las variables independientes Z_1 y Z_{p_i} , $i = 1, 2, \dots, m$. la función de densidad conjunta (9) se obtiene condicionando por la variable Z_1 , para finalmente incluir los factores de escala.

La Figura 2 representa la función de densidad conjunta de dos riesgos dependientes para valores seleccionados de los parámetros.

3.2 Riesgos marginales

Por construcción, las distribuciones marginales de los riesgos son Lomax inversas, de modo que

$$X_i \sim \mathcal{LI}(p_i, \lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

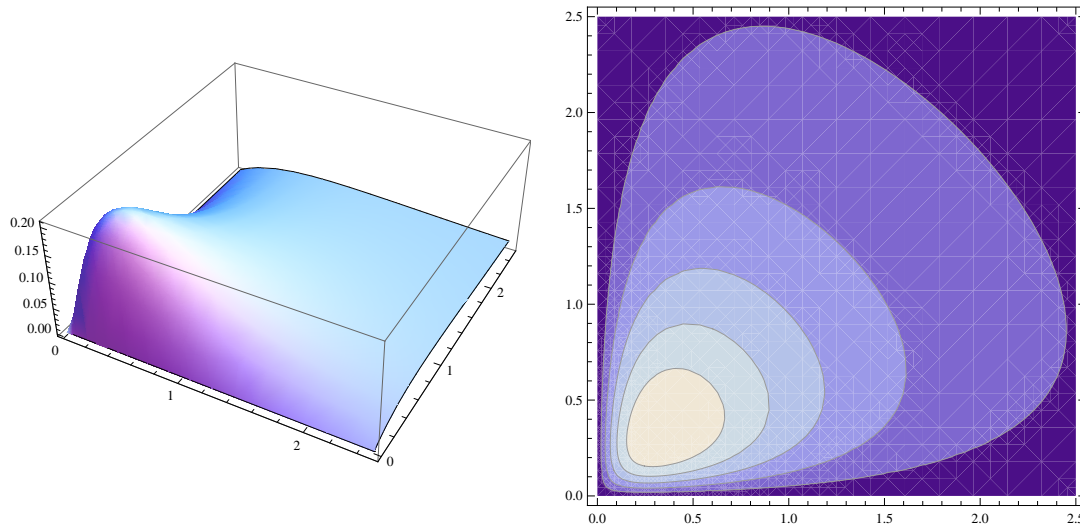


Figura 2: Función de densidad conjunta y curvas de nivel de (9) para $m = 2$ con $p_1 = p_2 = 2$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

3.3 Momentos

Los momentos de la distribución multivariada \mathbf{X} vienen dados por,

$$\mathbb{E}(X^{r_1} \dots X^{r_m}) = \Gamma(1 - A) \prod_{i=1}^m \lambda_i^{r_i} \frac{\Gamma(p_i + r_i)}{\Gamma(p_i)}, \quad (11)$$

donde $A = \sum_{i=1}^m r_i$ y $A < 1$.

3.4 Distribución del riesgo total

En esta sección se obtiene la distribución del riesgo agregado $S_m = X_1 + \dots + X_m$, donde (X_1, \dots, X_m) está distribuido según (8).

Teorema 2 *Sea $(X_1, \dots, X_m)^\top$ la distribución multivariante definida mediante la representación estocástica (8). Entonces, la distribución del riesgo agregado $S_m =$*

$X_1 + \dots + X_m$ viene dado por,

$$f_{S_m}(x; \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) = C \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \frac{(\tilde{p} + k)x^{\tilde{p}+k-1}}{\lambda_1^{\tilde{p}+k}(1 + x/\lambda_{(1)})^{\tilde{p}+k+1}}, \quad x > 0 \quad (12)$$

y 0 en otro caso, siendo:

$$C = \prod_{i=1}^m \left(\frac{\lambda_{(1)}}{\lambda_i} \right)^{p_i},$$

donde $\tilde{p} = \sum_{i=1}^m p_i$, $\lambda_{(1)} = \min\{\lambda_i\}$ y los δ_k están definidos por,

$$\delta_k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} i \gamma_i \delta_{k+i-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

con $\delta_0 = 1$ siendo

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^k p_i \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \right) \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Demostración: La demostración de este resultado se obtiene haciendo uso de la distribución de la suma de variables aleatorias gamma independientes, que se encuentra en Moschopoulos (1985).

Notar que (12) corresponde a una mezcla infinita de distribuciones Lomax inversa con parámetros $\tilde{p} + k$ y $\lambda_{(1)}$. De este modo, la función de distribución de (12) se obtiene directamente haciendo uso de (2). En el caso del Submodelo I, la distribución de S_m es Lomax inversa con parámetros $p_1 + \dots + p_m$ y λ . Para este submodelo,

$$\text{VaR}[S_m; \alpha] = \lambda \frac{\alpha^{1/(p_1 + \dots + p_m)}}{1 - \alpha^{1/(p_1 + \dots + p_m)}}.$$

4 ESTIMACIÓN

En esta sección estudiaremos la estimación tanto en el caso de riesgos individuales como en el caso de riesgos dependientes.

4.1 Riesgos individuales

Si disponemos de una muestra x_1, x_2, \dots, x_n de riesgos individuales, el logaritmo de la función de verosimilitud viene dado por:

$$\ell(p, \lambda) = n \log p - np \log \lambda + (p - 1) \sum_{i=1}^n \log x_i - (p + 1) \sum_{i=1}^n \log(1 + x_i/\lambda). \quad (13)$$

La maximización de (13) respecto de p y λ da lugar a los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros. Al tratarse de una familia regular, la distribución asintótica de los estimadores es normal, y los errores estándar se obtienen invirtiendo la correspondiente matriz de información (bien la teórica o la versión muestral).

Los estimadores iniciales de los parámetros se obtienen fácilmente a través del conocimiento de la moda y de un percentil de la muestra (por ejemplo la mediana). El valor inicial de p se obtiene como la solución única de la ecuación en p :

$$\frac{2\text{Mo}(X)}{p - 1} \cdot \frac{\alpha^{1/p}}{1 - \alpha^{1/p}} = \tilde{X}(\alpha), \quad (14)$$

donde $\text{Mo}(X)$ es la moda de los datos y $\tilde{X}(\alpha)$ el percentil de orden α , donde $0 < \alpha < 1$. Finalmente, el estimador inicial de λ viene dado por:

$$\hat{\lambda} = \frac{2\text{Mo}(X)}{\hat{p} - 1}. \quad (15)$$

4.2 Riesgos dependientes

Partimos de una muestra de tamaño n y de dimensión m dada por (x_{1i}, \dots, x_{mi}) , $i = 1, 2, \dots, n$ procedente de (9). Los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros \mathbf{p} y $\boldsymbol{\lambda}$ vienen dados por,

$$(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}})^\top = \operatorname{argmax} \sum_{i=1}^n \log f(x_{1i}, \dots, x_{mi}; \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}),$$

donde nuevamente se trata de una distribución regular. Los estimadores iniciales de cada pareja (p_i, λ_i) , $i = 1, 2, \dots, m$ se pueden obtener haciendo uso de las ecuaciones (14) y (15).

5 APLICACIONES

Como aplicación de los resultados obtenidos, consideraremos datos de riesgos individuales y de riesgos bivariados dependientes.

5.1 Riesgos operacionales

En riesgos operacionales se necesita obtener el riesgo total de las pérdidas observadas en varias categorías. Habitualmente, se supone independencia entre los riesgos individuales. En esta aplicación presentamos un caso simple con sólo dos riesgos y con información limitada. Supongamos que para el primero de los riesgos la moda es 2,5 y el riesgo mediano 40,1. Para el segundo de los riesgos, estos valores son 10,5 y 52,2 respectivamente.

Si representamos por X_1 y X_2 cada uno de los dos riesgos, y ajustamos a cada conjunto de datos una distribución Lomax inversa se obtienen los estimadores:

$$\hat{p}_1 = 1,15091; \quad \hat{\lambda}_1 = 33,1323; \quad \hat{p}_2 = 1,9324; \quad \hat{\lambda}_2 = 22,5222.$$

Si $\tilde{X}_i = X_i/\lambda_i$, $i = 1, 2$, elegimos como medida estandarizada de riesgo (no depende de la escala),

$$R[\alpha] = \mathbb{E} \left(\tilde{X}_1 \cdot \tilde{X}_2 \right)^\alpha = cov(\tilde{X}_1^\alpha, \tilde{X}_2^\alpha) + E(\tilde{X}_1^\alpha)E(\tilde{X}_2^\alpha), \quad (16)$$

con $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. La medida (16) expresa el grado de dependencia entre las variables \tilde{X}_1^α y \tilde{X}_2^α en términos de la covarianza.

La Tabla 1 muestra el resultado de (16) para diferentes valores de α , bajo los supuestos de independencia y dependencia. Se observa que en el caso de independencia se obtienen menores valores de $R[\alpha]$ que en el caso de dependencia entre ambos riesgos. Este hecho se cumple en general en modelos cuya estructura de dependencia presenta factores comunes. Por otro lado, si el valor de α aumenta, nos encontramos con colas más pesadas y por tanto el valor de $R[\alpha]$ aumenta.

Tabla 1: Comparación de valores de $R[\alpha]$ bajo los supuestos de independencia y dependencia de los riesgos.

α	Independencia	Dependencia
0,10	1,15607	1,34593
0,15	1,26943	1,64779
0,20	1,41477	2,10687
0,25	1,60170	2,83894
0,30	1,60170	2,83894
0,35	2,16146	6,46616
0,40	2,58407	11,86310
0,45	3,15740	30,03800

5.2 Riesgos dependientes bivariados

En esta segunda aplicación hemos considerado dos conjuntos de datos bivariados de pérdidas. Los dos conjuntos corresponden a datos de pérdidas individuales y de ALAE (allocated loss adjustment expenses). Los datos se encuentran en las publicaciones de Klugman et al. (2004), capítulo 12, y en el artículo de Klugman y Parsa (1999). El tamaño de muestra del primer conjunto de datos es $n = 24$, mientras que el segundo es de $n = 1500$ observaciones.

Con objeto de poder realizar una comparación entre varias aproximaciones con riesgos dependientes, se ha ajustado el modelo general (9) con $m = 2$, para los casos del submodelo $p_1 = p_2$, y para el modelo general sin incluir esta restricción. Los cuatro modelos se han ajustado por el método de máxima verosimilitud, haciendo uso de los resultados de la sección 4. Estos ajustes se han realizado para los dos conjuntos de datos. Señalar que el primer conjunto de datos fue ajustado mediante un modelo de tipo gamma-gamma por el método de los momentos por Sarabia y

Prieto (2011).

Las Tablas 2 y 3 incluyen, para las dos bases de datos y para los dos modelos, los estimadores de los tres y cuatro parámetros respectivamente, los errores estándar (entre paréntesis) así como los valores del logaritmo de la función de verosimilitud y de los estadísticos AIC de Akaike y BIC de bondad de ajuste.

Nos fijamos en primer lugar en los ajustes correspondientes al primer conjunto de datos. Para el primero de los modelos (Tabla 2), los tres parámetros resultan significativos, mientras que para el modelo general (Tabla 3) únicamente dos de los cuatro parámetros resultan significativos. A partir de los valores del logaritmo de la función de verosimilitud y de los estadísticos AIC y BIC, el modelo general proporciona mejor ajuste, por lo que debería elegirse para el cálculo de las diferentes medidas de riesgo.

Para el segundo conjunto de datos, se obtienen conclusiones similares. En primer lugar, los valores de todos los parámetros en los dos modelos (Tablas 2 y 3) son significativos. El segundo de los modelos proporciona mejor bondad de ajuste en términos de los tres estadísticos considerados, por lo que nuevamente debería elegirse para el cálculo de las diversas medidas de riesgo.

Finalmente, las Figuras 3 y 4 muestran los datos junto con las curvas de nivel para los ajustes correspondientes a la primera base de datos.

6 CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos presentado una clase general de riesgos dependientes, donde los riesgos individuales siguen distribuciones de tipo Lomax inversa. La distribución Lomax inversa posee colas pesadas, depende de dos parámetros y la mayor parte de sus características se pueden obtener de forma cerrada. Hemos obtenido la función de densidad conjunta de los riesgos dependientes. Se ha obtenido

Tabla 2: Ajuste de riesgos dependientes bivariados: estimadores de los parámetros, errores estándar (entre paréntesis), logaritmo de la función de verosimilitud y estadísticos AIC y BIC, para las dos bases de datos y $p_1 = p_2$.

Base de Datos	\hat{p}_1	\hat{p}_2	\hat{b}_1	\hat{b}_2	$\log \ell$	AIC	BIC
$n = 24$	0.89525 (0.19455)	0.89525 (0.19455)	12278.2 (5087.64)	1932.51 (930.649)	-485.37	976.74	-490.14
$n = 1500$	0.95359 (0.02649)	0.95359 (0.02649)	13489.6 (760.084)	4649.75 (255.226)	-32068.9	64143.8	-32079.9

Tabla 3: Ajuste de riesgos dependientes bivariados: estimadores de los parámetros, errores estándar (entre paréntesis), logaritmo de la función de verosimilitud y estadísticos AIC y BIC, para las dos bases de datos.

Base de Datos	\hat{p}_1	\hat{p}_2	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\log \ell$	AIC	BIC
$n = 24$	2.30755 (1.56704)	0.51917 (0.16423)	3943.85 (3431.86)	5324.15 (3506.66)	-483.09	974.18	-489.446
$n = 1500$	1.06016 (0.04887)	0.87843 (0.03456)	11640.9 (883.699)	5155.02 (335.907)	-32064.6	64137.2	-32079.2

una expresión cerrada para la función de densidad y la función de distribución del riesgo total. Por otro lado, se han obtenido fórmulas para diferentes medidas de riesgo, incluyendo el valor en riesgo VaR y el valor en riesgo en la cola TVaR. Hemos propuesto métodos de estimación tanto para el caso de riesgos individuales tipo Lomax inversa, como para riesgos dependientes. Finalmente, hemos presentado dos aplicaciones de las metodologías propuestas.

Agradecimientos: Los autores agradecen al Ministerio de Economía y Competitividad (proyecto ECO2013-48326-C2-2-P) y al Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (FPU13/02155) por la financiación parcial de este trabajo. Los autores agradecen los comentarios de los revisores, que han dado lugar a una mejora del trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACERBI, C., TASCHE, D. (2002). “On the Coherent of Expected Shortfall”. *Journal of Banking and Finance*, 26, pp. 1487-1503.
- ALBRECHER, H., CONSTANTINESCU, C., LOISEL, S. (2011). “Explicit Ruin Formulas for Models with Dependence Among Risks”. *Insurance: Mathematics and Economics*, 48, 265-270.
- ASIMIT, A.V., VERNIC, R., ZITIKIS, R. (2013). “Evaluating Risk Measures and Capital Allocations Based on Multi-Losses Driven a Heavy-Tailed Background Risk: the Multivariate Pareto-II Model”. *Risk*, 2013, 14-33.
- BENKHELIFA, L. (2014). “Kernel-type estimator of the reinsurance premium for heavy-tailed loss distributions”. *Insurance Mathematics and Economics*, 59, 65-70.

- DENUIT, M., DHAENE, J., GOOVAERTS, M., KAAS, R. (2005). “Actuarial Theory for Dependent Risks. Measures, Orders and Models”. John Wiley, Chichester.
- GUILLÉN, M., SARABIA, J.M., PRIETO, F. (2013). “Simple Risk Measure Calculations for Sums of Positive Random Variables”. *Insurance: Mathematics and Economics*, 53, 273-280.
- KLUGMAN, S., PARSA, R. (1999). “Fitting Bivariate Loss Distributions with Copulas”. *Insurance: Mathematics and Economics*, 24, 139-148.
- KLUGMAN, S., PANJER, H.H., WILLMOT, G.E. (2004). “Loss Models. From Data to Decisions”, Second Edition. John Wiley, New York.
- KOLEV, N., ANJOS, U., MENDES, B.M. (2006). “Copulas: a Review and Recent Developments”. *Stochastic Models*, 22, 617-660.
- MARKOVICH, N. (2005). “Nonparametric Analysis of Univariate Heavy-Tailed data. Research and Practice”. John Wiley, New York.
- MCDONALD, J. B. (1984). “Some Generalized Functions for the Size Distribution of Income”. *Econometrica*, 52, 647-663.
- MOSCHOPOULOS, P.G. (1985). “The Distribution of the Sum of Independent Gamma Random Variables”. *Annals Instit. Statist. Math.*, 37, 541-544.
- NELSEN, R.B. (1999). “An Introduction to Copulas”. Springer-Verlag, New York.
- SARABIA, J.M., GÓMEZ-DÉNIZ, E. (2008). “Construction of Multivariate Distributions: a Review of Some Recent Results (with discussion)”. *SORT, Statistics and Operations Research Transactions*, 32, 3-36.

- SARABIA, J.M., GUILLÉN, M. (2008). “Joint Modelling of the Total Amount and the Number of Claims by Conditionals”. *Insurance: Mathematics and Economics*, 43, 466-473.
- SARABIA, J.M., PRIETO, F. (2011). “Sobre una Clase de Riesgos Dependientes”. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 2011, 31-50.
- SUN, J., FREES, E.W., ROSENBERG, M.A. (2008). “Heavy-tailed longitudinal data modeling using copulas”. *Insurance Mathematics and Economics*, 42, 817-830.
- VALDEZ, E.A., DHAENE, J., MAJ, M., VANDUFFEL, S. (2009). “Bounds and Approximations for Sums of Dependent log-elliptical Random Variables”. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44, 385-397.

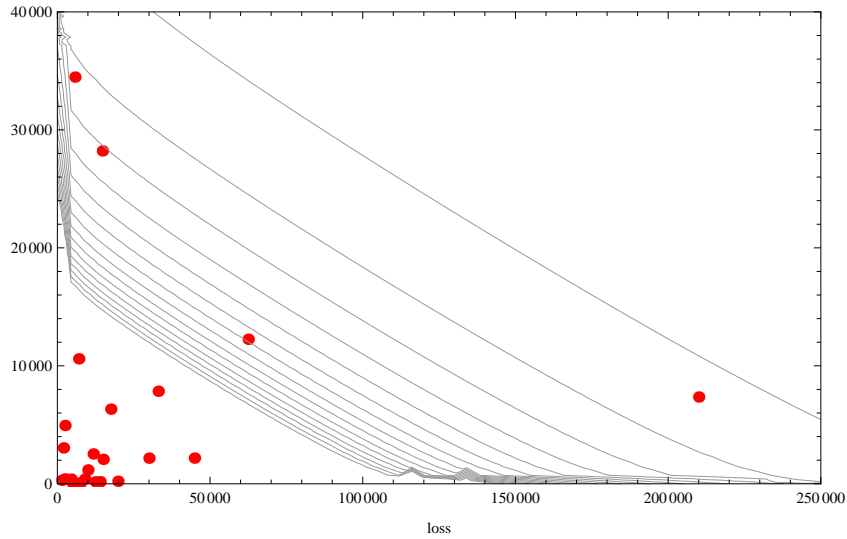


Figura 3: Datos y curvas de nivel del ajuste del modelo (9) con $p_1 = p_2$ para los datos de Klugman et al. (2004).

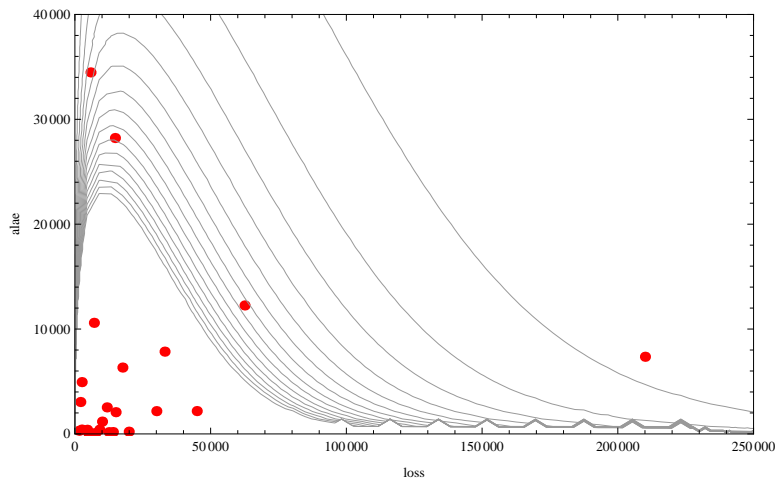


Figura 4: Datos y curvas de nivel del ajuste del modelo (9) sin restricciones para los datos de Klugman et al. (2004).