

## **Estimación de parámetros del rating ELO para la liga de fútbol española 2009/2010**

Hernández-Díaz, Alfredo G.

[agarher@upo.es](mailto:agarher@upo.es)

Universidad Pablo de Olavide, Sevilla

Sala Garrido, Ramón

[ramon.sala@uv.es](mailto:ramon.sala@uv.es)

Universitat de Valencia

Caballero Fernández, Rafael

[rafael.caballero@uma.es](mailto:rafael.caballero@uma.es)

Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas)

Universidad de Málaga

### **RESUMEN**

La predicción de los resultados de los acontecimientos deportivos ha sido de interés desde hace tiempo, y hoy en día, sigue siendo un reto, quizás imposible de alcanzar y además una actividad lucrativa. El rating ELO fue usado en un primer momento para la valoración de los jugadores de ajedrez, y más recientemente para otros eventos deportivos. Es nuestra intención en este trabajo utilizar dicho rating para la predicción de los resultados de fútbol en la liga española siguiendo otros trabajos previos, pero en este pretendemos utilizar métodos metaheurísticos para la estimación de los parámetros de dicho rating, intentando con ello mejorar el porcentaje de pronósticos acertados.

#### ***Palabras claves:***

Rating ELO; Predicción de resultados deportivos; Metaheurísticos.

***Área temática:*** Métodos Cuantitativos y Deporte

## **ABSTRACT**

The prediction of the results of sporting events has been of interest for a long time, and today remains a challenge, very difficult to achieve, and also a gainful activity. The ELO rating was used initially for the assessment of the chess players, and more recently other sporting events. Our intention in this work is to use the rating for predict of the results of football in the Spanish League following other preparatory work, but that we intend to use metaheuristics methods for estimating the parameters of this rating trying to improve the proportion of successful forecasts.

***Keywords:***

**ELO Rating; results sports prediction; Metaheuristics**

## 1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad la proliferación de apuestas deportivas es un fenómeno que afecta a todos los países, y en especial las apuestas realizadas por Internet, por ello la capacidad de predicción de los resultados de estos acontecimientos es objeto de estudio con diferentes metodologías y procedimientos,

Este documento se usara básicamente el rating ELO como medida de esta predicción. Este tipo de análisis puede encontrarse en Hvattum ,y Arntzen (2010), Leitner, Zeileisa y Hornik (2010) y en Mocholí y Sala (2009).

Desde el punto de vista metodológico la predicción de los resultados de acontecimientos deportivos esta relaciona directamente con la existencia o no de balance (o equilibrio) competitivo en el acontecimiento deportivo objeto de estudio.

La teoría del balance competitivo entre los equipos fue desarrollada por primera vez por Rotteberg (1956). Desde ese momento diversos economistas han prestado su atención a análisis teórico y trabajos empíricos, Scully (1989 y 1995), Dobson y Goddard (2001, cap. 3). Entre las aplicaciones específicas podemos citar, en el campo del baseball, los trabajos de Vrooman (2000) y Eckard (2001), pero las más relacionadas con este trabajo son las referidas al fútbol. Así, Szymanski (2001) usa la FA Cup (Football Association Chalange Cup) para medir la asistencia a los partidos para identificar las tendencia en el balance competitivo desde 1970. En la literatura, la demanda de deportes está relacionada con la incertidumbre del resultado y la asistencia depende del nivel del balance competitivo entre los equipos participantes. Para medir el balance competitivo se usan directamente los resultados de los partidos para establecer la relación con la asistencia. Neale (1964) pone de manifiesto la relación entre la incertidumbre del resultado con la popularidad de un deporte.

En Koning (2000) y Dobson y Goddard (2001), se utiliza una *ordered probti regresion* para estimar los resultados de los partidos de fútbol.

En Dobson y Goddard (2004), se analiza el equilibrio entre las divisiones del fútbol inglés y escocés, y se emplea un modelo polinomial para establecer las tendencias en estas competiciones. Estos autores detectan que, a partir de los años 70 y 80, comienza a aparecer el desequilibrio entre los equipos por la movilidad de los

jugadores, los cambios en los contratos, y con ello los jugadores de mayor talento se desplazan a los mejores equipos que pueden pagar más por sus contratos.

Para medir las incertidumbres de los resultados o el balance competitivo, Peel y Thomas (1988) proponen usar las apuestas deportivas como medida de la incertidumbre y suponiendo que el mercado de apuestas sea eficiente.

Como se ha comentado anteriormente en este trabajo proponemos medir la predicción de los resultados de la liga utilizando Rating ELO<sup>1</sup>.

La estructura del trabajo es la siguiente, en el epígrafe 2 se describe la metodología. En el epígrafe siguiente se explican los resultados experimentales. En el último epígrafe se destacan las conclusiones más relevantes.

## **2. METODOLOGÍA**

El rating ELO fue desarrollado por el matemático húngaro Dr. Árpád Élő, y en 1960 fue adoptado por la Federación Norteamericana de Ajedrez para establecer el ranking de los jugadores de ajedrez. En 1970, hizo lo propio la FIDE (Federación internacional de ajedrez), posteriormente ha ido generalizándose su uso y aplicándose a otros deportes, así en 1973 se aplicó al tenis, en 1986 al golf, en 1987 a los jugadores de cricket y en 2001 a los equipos de cricket.

En 1997, Bob Runyan adaptó el sistema al fútbol internacional, como alternativa al ranking de la FIFA para ordenar las más de 200 selecciones mundiales. Aunque su sistema ha sido modificado en diversas ocasiones, la última en 2005, no ha alcanzado un nivel de aceptación importante en el mundo del fútbol. En la página web: <http://www.eloratings.net/> se puede obtener la clasificación de las selecciones internacionales, así como una descripción del método de cálculo. Además el sistema ELO asume que los puntos ganados (perdidos) por un equipo en una jornada son perdidos (ganados) por su adversario.

El funcionamiento del sistema ELO en su aplicación al fútbol necesita una cierta adaptación, así utilizaremos la formulación más extendida en trabajos previos:

$$R_n = R_0 + K * G * (W - W_e)$$

donde

---

<sup>1</sup> Ver Elo (1978)

$R_n$ : nuevo rating

$R_0$ : rating anterior

$K$ : ponderación asignada al torneo

$G$ : coeficiente asignado por la diferencia de goles en el partido

$W$ : resultado del partido (dato a posteriori)

$W_e$ : resultado esperado (dato a priori)

Siendo:

$$P = K * G * (W - W_e)$$

los puntos ELO que obtiene un equipo tras un partido, y por tanto  $-P$ , los obtenidos por el adversario.

La asignación de valores a los parámetros involucrados en dicho sistema ELO, dependen del campeonato en el que se aplique (Mocholí y Sala, 2009), pero como es usual dicha asignación no tiene porque ser única, es por ello que nuestro interés será determinar qué valores deberemos asignar a dichos parámetros para que el número de aciertos, respecto a ganar, empatar o perder el partido, sea máximo.

El primer parámetro a considerar corresponde al parámetro  $K$ , que representa la importancia del partido, en nuestro caso estará relacionado con la parte de la temporada en la que se celebra el mismo.

El segundo parámetro estará vinculado sobre el coeficiente  $G$ , para lo cual utilizaremos la expresión usada por Hvattum y Arntzen (2010):

$$G = (1 + \delta)^\lambda$$

donde  $\delta$  es la diferencia de goles en valor absoluto, y  $\lambda$  es un parámetro que afecta sobre el modelo y que refleja el impacto sobre el ELO de dicha diferencia de goles.

El valor de  $W$  recoge el resultado del partido y posee las siguientes asignaciones:

$$W = \begin{cases} 1 & \text{en caso de victoria} \\ 0,5 & \text{en caso de empate} \\ 0 & \text{en caso de derrota} \end{cases}$$

El siguiente parámetro a estimar se encuentra vinculado al valor de  $W_e$ , cuya expresión más genérica viene dada por:

$$W_e = \frac{1}{1 + c^{-dr/d}}$$

donde

$$dr = R_0^L - R_0^V + h$$

siendo  $R_0^L$  y  $R_0^V$  los valores ELO del equipo local y del equipo visitante antes de comenzar el partido, y  $h$  quiere reflejar la ventaja de jugar en casa para el primer local y que para nosotros consistirá en nuestro tercer parámetro. Los valores de  $c$  y  $d$  también son parámetros y podrían ser estimados pero asumiremos los valores de  $c = 10$  y  $d = 400$  (Mocholí y Sala, 2009, Hvattum y Arntzen, 2010).

Teniendo en consideración que nuestro interés consiste en analizar el número de aciertos correspondientes a la predicción de resultados, consideraremos el valor de  $W_e$ , y dependiendo del mismo realizamos la predicción, así si:

$$W_e = \begin{cases} > 0.5 + UES & \text{victoria local} \\ < 0.5 - UEI & \text{victoria visitante} \\ \text{otro caso} & \text{empate} \end{cases}$$

siendo  $UES$  (Umbral de Empate Superior) y  $UEI$  (Umbral de Empate Inferior), los dos últimos parámetros a considerar.

En el presente trabajo vamos a considerar diferentes escenarios con el fin de maximizar el número de aciertos y los compararemos con lo que hemos denominado versión estática del sistema de rating ELO, donde los valores de los parámetros estarán prefijados al inicio de la temporada y serán los mismos para toda ella y corresponden, tanto para la liga BBVA como para la liga Adelante, a los siguientes:

<u>Parámetros</u>	<b>K</b>	<b>λ</b>	<b>Umbral Empate Superior UES</b>	<b>Umbral Empate Inferior UEI</b>	<b>ELO extra casa h</b>
<b>ELO Estático</b>	25/30/40/50	1	0.05	0.05	100

Tabla 1. Parámetros del modelo ELO estático.

Para los distintos escenarios estimaremos los parámetros de la metodología ELO propuesta y compararemos los resultados entre ellos. Para estimar dichos parámetros optimizamos la función objetivo correspondiente a maximizar el número de aciertos.

El primer escenario que vamos a considerar corresponde a las 38 jornadas de la liga BBVA completa, y las primeras 38 jornadas correspondientes a la liga Adelante. El segundo escenario será optimizar por bloques de  $n$  jornadas consecutivas y sucesivas y encontrar cuál es el mejor valor para cada racha que podemos obtener.

Para dicho proceso de optimización utilizaremos un metaheurístico global denominado SS-RS propuesto en (Laguna *et al.*, 2010). SS-RS es una heurística híbrida que, sobre una estructura clásica de una búsqueda dispersa, se incorpora un novedoso método de combinación de soluciones basada en la Teoría de Conjunto Borrosos. SS-RS explota la información proporcionada tanto por la solución óptima como por las restantes soluciones visitadas hasta el momento para acotar regiones prometedoras donde seguir explorando, tratando siempre de evitar explorar regiones ya visitadas.

SS-RS trabaja en dos fases: una primera de *exploración* donde el espacio de variables es discretizado (es decir, el espacio es dividido en hipercubos y todas las soluciones de cada uno de ellos se consideran iguales); y una fase de *intensificación* donde el espacio de variables se considera continuo, tratando de afinar la mejor solución encontrada.

SS-RS, como tanto metaheurísticos, es un algoritmo de optimización aproximado con una gran componente estocástica. Puesto que ha demostrado ser de gran fiabilidad y robustez en una gran cantidad de problemas de diferente dificultad, los resultados experimentales contienen una única ejecución de éste para cada problema, sin entrar en detalles sobre la estabilidad de las soluciones encontradas.

Los 5 parámetros del modelo ELO utilizado van a ser considerados como variables del problema y SS-RS tratará de encontrar los mejores valores posibles dentro de sus rangos que proporcionen el mayor número de aciertos posibles para las jornadas consideradas. Los rangos seleccionados para dichas variables son:

<b><i>Parámetros/Variables</i></b>	<b>K</b>	<b><math>\lambda</math></b>	<b>Umbral Empate Superior UES</b>	<b>Umbral Empate Inferior UEI</b>	<b>ELO extra casa <i>h</i></b>
<b>Límite inferior</b>	0	0.5	0	0	50
<b>Límite superior</b>	150	1.5	0.25	0.25	200

Tabla 2. Cotas para las variables de los modelos optimizados.

### 3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Con idea de validar los métodos propuestos, se han llevado a cabo diferentes pruebas para las dos principales ligas españolas: la Liga BBVA y la liga Adelante.

En primer lugar, comparamos los resultados obtenidos para ambas ligas aplicando la metodología ELO estático y la optimizada para las 38 jornadas en bloque. En la Tabla 3 mostramos el porcentaje de aciertos para ambos casos donde podemos observar un crecimiento de un 5% en ambos casos.

	<b>ELO estático</b>		<b>ELO optimizado (38)</b>	
	<b>% total</b>	<b>Aciertos/jornada media/desv. típica</b>	<b>% total</b>	<b>Aciertos/jornada media/desv. típica</b>
<b>Liga BBVA</b>	53,94%	5.39 / 1.2039	58.16%	5.82 / 1.2323
<b>Liga Adelante</b>	40.19%	4.42 / 1.5666	45.69%	5.02 / 1.9260

Tabla 3. Comparación de aciertos entre ELO estático y optimizado a 38 jornadas.

En la figura 1 podemos observar el número de aciertos por jornada en la liga BBVA, donde podemos apreciar que aun existiendo jornadas con un número de aciertos bajo para cada uno de los procedimientos, en el caso optimizado a 38 jornadas, el número de aciertos es más estable en este caso que en el caso estático.

En la figura 2 podemos analizar los comportamientos de ambos procesos de predicción jornada a jornada, siendo en este caso, menos estable que el que corresponde a la primera división, y además existen no más de un 20% jornadas de las 38 donde el modelo estático posee más aciertos que el optimizado, tanto para las primera como la segunda división.

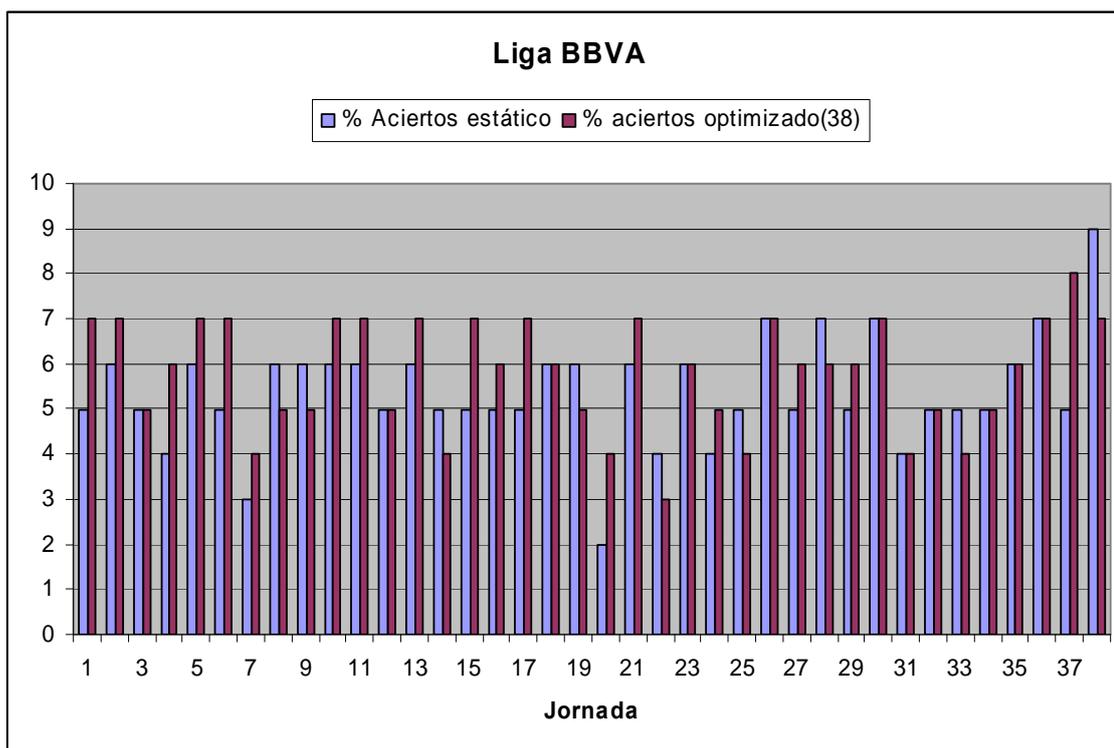


Figura 1. Número de partidos acertados (por jornada) para la Liga BBVA aplicando ELO estático y ELO optimizado para 38 jornadas.

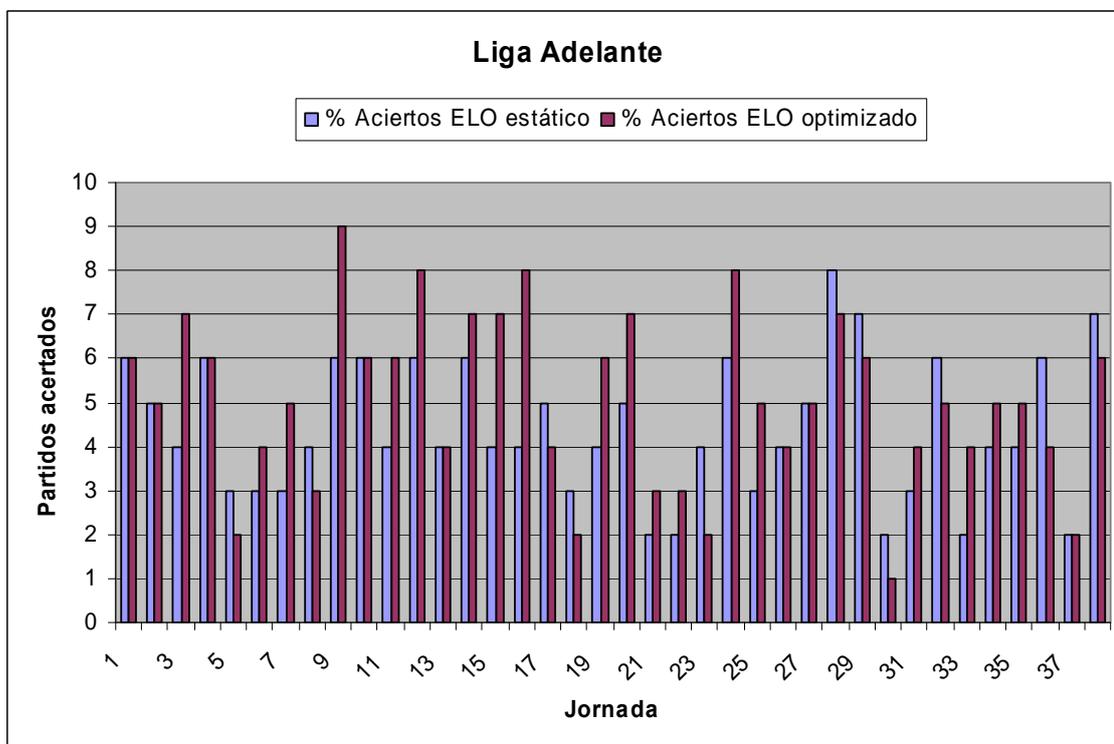


Figura 2. Número de partidos acertados (por jornada) para la Liga Adelante aplicando ELO estático y ELO optimizado para 38 jornadas.

A continuación, en la Tabla 4, comparamos los valores de las 5 variables/parámetros para las dos primeras metodologías propuestas. Cabe destacar que las diferencias encontradas en  $K$  para todos los casos, y los umbrales de empate claramente superiores para la liga Adelante.

	<b>K</b>	<b><math>\lambda</math></b>	<b>Umbral Empate Superior UES</b>	<b>Umbral Empate Inferior UEI</b>	<b>ELO extra casa <math>h</math></b>
<b>ELO estático</b>	25/30/40/50	1	0.05	0.05	100
<b>Liga BBVA ELO optimizado(38)</b>	9.0240	1.2937	0.0184	0.0025	155.9760
<b>Liga Adelante ELO optimizado(38)</b>	90.7808	0.6433	0.1208	0.1325	194.5000

Tabla 4 Parámetros del ELO estático y optimizado a 38 jornadas.

Es claro, que el procedimiento anteriormente empleado no puede ser usado para la predicción de resultados en la práctica, pues deberíamos esperar a la conclusión de la liga para poder estimar los parámetros, es por ello que en segundo lugar, tal como se ha comentado en las secciones anteriores, se ha desarrollado un experimento en el cual los parámetros/variables del modelo son optimizados en bloque consecutivos de  $n$  jornadas (que denominamos en la Tabla 5 como conjunto de entrenamiento o training set) y, a partir de los valores obtenidos, se predicen los resultados de las siguientes  $n$  jornadas (o conjunto de prueba o test set). Los valores de  $n$  que se han considerado son  $n = 4, 5, 6, 7$  y  $8$ .

% aciertos training/ % aciertos test	Tamaño (n) de los bloques a optimizar/predecir				
	4	5	6	7	8
Liga BBVA ELO optimizado(nxn)	59.44 / 49.72	60.57 / 52.28	58.33 / 48.05	59.71 / 51.33	<b>59.37 / 56.56</b>
Liga Adelante ELO optimizado(nxn)	52.20 / 39.39	<b>52.46 / 41.38</b>	50.25 / 40.15	51.16 / 38.09	52.55 / 38.35

Tabla 5. Aciertos del ELO optimizado por bloques.

En el mejor de los casos obtenido para la liga BBVA,  $n = 8$ , mostramos los valores pormenorizados.

Bloque	K	$\lambda$	Umbral Empate Superior UES	Umbral Empate Inferior UEI	ELO extra casa $h$	% Aciertos Training	% Aciertos Test
0	25	1	0.05	0.05	100	0.5	0.55
1	42.4270	0.6746	0.0018	0.0300	177.4060	0.6125	0.5500
2	5.5	0.6233	0.0425	0.0684	129.5000	0.5875	0.5875
3	7.5	0.6100	0.0125	0.1258	133.5000	0.5875	0.5750
4	20.5	0.7500	0.0608	0.0642	164.5000	0.5875	0.5500

Tabla 6. Parámetros del ELO BBVA optimizado en bloques de 8 jornadas.

Con respecto a los porcentajes de acierto obtenidos por bloque, apreciamos cómo se obtienen porcentajes similares entre el bloque optimizado y el bloque que se trata de predecir (últimas dos columnas de la Tabla 6 y Figura 3).

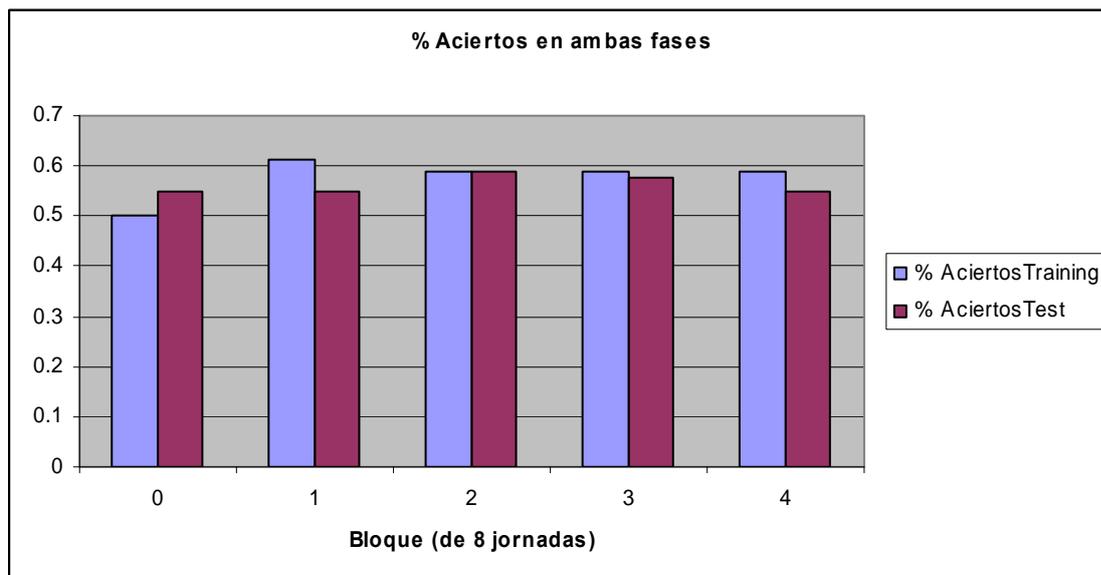


Figura 3. Porcentajes de ELO por bloques de 8 jornadas.

Con respecto a la evolución de los parámetros tanto en la Tabla 5 como en las figuras 4 y 5 apreciamos que la importancia de jugar en casa es más determinante que lo formulado en el modelo estático, mientras que los valores relativos a K adquieren mucha importancia en el primer y segundo bloque pasando a tener menor importancia en los siguientes. Por otro lado, la importancia de la diferencia de goles parece más determinante en la primera y última parte de la liga. Lo más resaltable y discutible de dichos resultados puede parecer los umbrales de empate pues parecen muy pequeños dichos valores con respecto a los normalmente considerados.

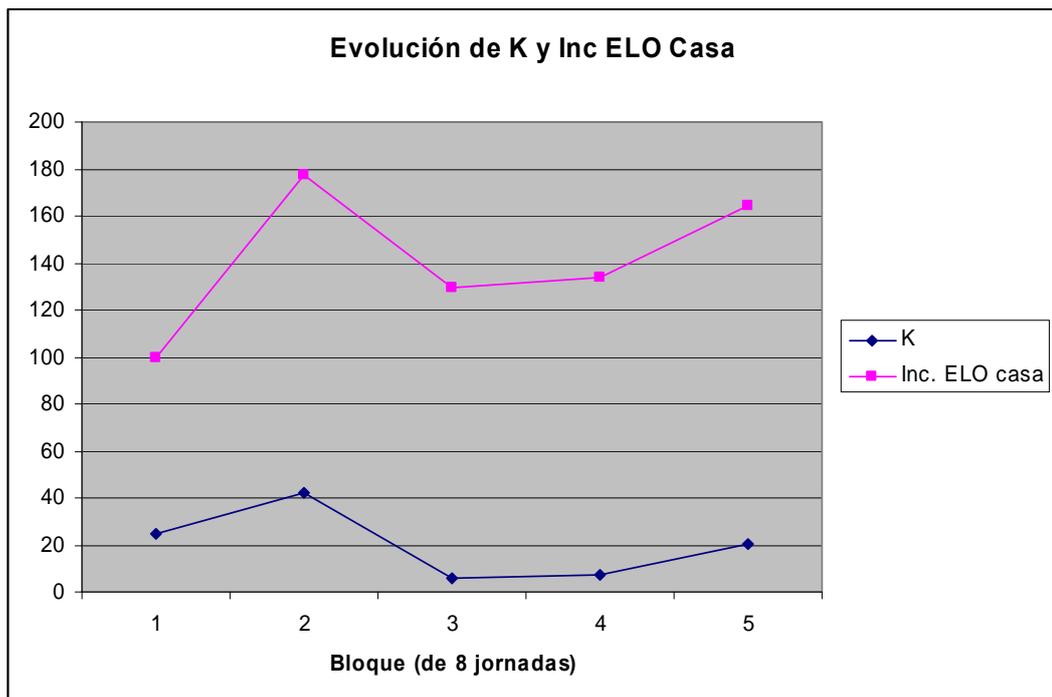


Figura 4. Evolución de K y “ventaja en casa” para la liga BBVA.

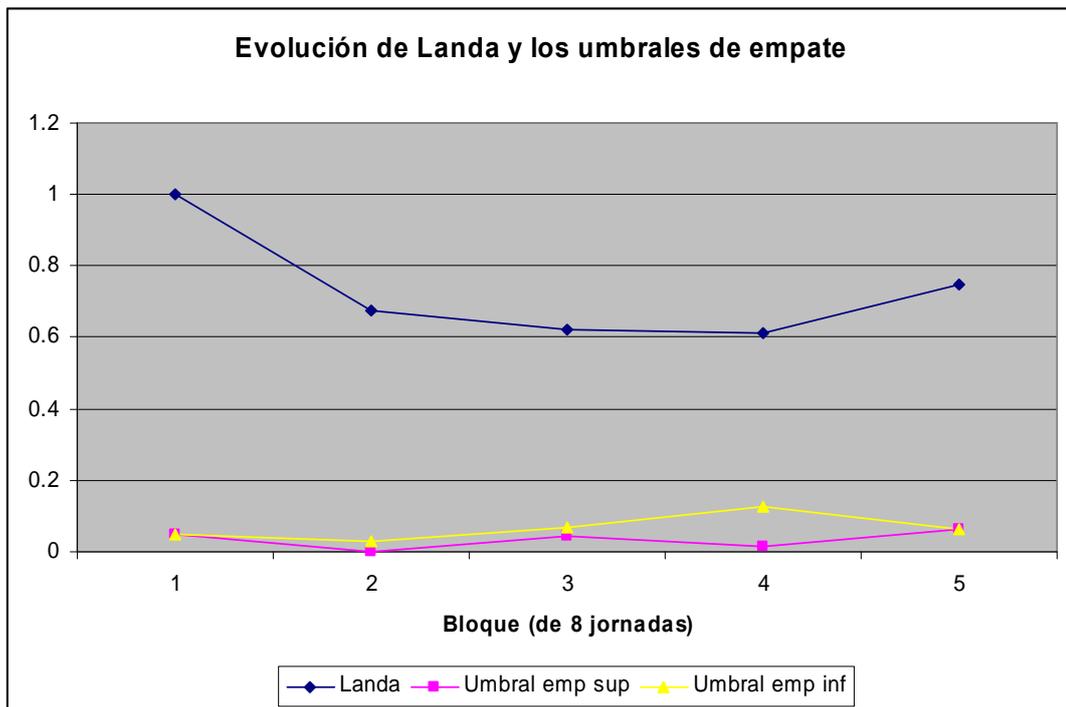


Figura 5. Evolución de  $\lambda$  y umbrales de empate en la liga BBVA.

LIGA	% EMPATES SOBRE EL TOTAL DE LOS PARTIDOS DE LA LIGA				
	Alemania	España	Francia	Inglaterra	Italia
2009/10	28,1%	25,0%	25,5%	25,3%	26,8%
2008/09	24,2%	21,8%	29,5%	25,5%	25,0%
2007/08	25,5%	22,9%	30,5%	26,3%	29,5%
2006/07	25,8%	25,8%	30,8%	25,8%	30,0%
2005/06	31,4%	27,6%	31,1%	20,3%	28,4%
2004/05	21,2%	26,3%	34,7%	28,9%	32,9%
2003/04	23,5%	25,0%	26,1%	28,4%	29,4%
2002/03	25,2%	27,6%	27,9%	23,7%	30,1%
2001/02	22,2%	26,6%	28,1%	30,0%	28,4%
2000/01	22,5%	26,1%	27,5%	26,6%	28,8%
1999/00	28,4%	29,5%	26,1%	24,2%	30,7%
1998/99	28,4%	25,5%	29,1%	30,3%	26,5%
1997/98	27,8%	28,9%	25,2%	25,0%	28,4%
1996/97	22,9%	25,8%	30,5%	31,3%	33,3%
1995/96	35,3%	28,1%	30,3%	25,8%	26,1%
1994/05	28,1%	29,7%	28,7%	28,8%	25,2%
1993/04	27,1%	27,9%	32,6%	30,5%	34,0%
<i>MEDIA</i>	26,3%	26,5%	29,1%	26,9%	29,0%

Tabla 7. Porcentajes de empate en las ligas europeas.

En el caso de la liga Adelante el mejor de los valores obtenido ha sido  $n = 5$ . Para este valor, los valores obtenidos para cada uno de los 7 bloques optimizados son los siguientes:

Bloque	K	$\lambda$	Umbral Empate Superior UES	Umbral Empate Inferior UEI	ELO extra casa $h$	% Aciertos Training	% Aciertos Test
0	25	1	0.05	0.05	100	0.436364	0.4
1	30.5	1.2833	0.1708	0.0575	176.5000	0.5455	0.4364
2	3.5	0.7033	0.1275	0.1492	195.6310	0.5636	0.5273
3	98.5	0.5900	0.0192	0.0575	188.5000	0.5636	0.3636
4	1.5	0.5033	0.2082	0.2242	61.5000	0.5455	0.3455
5	42.5526	1.0389	0.1745	0.1727	162.8230	0.4727	0.3636
6	6.5	0.7300	0.1108	0.1708	136.5000	0.4545	0.4364
7	31.5	0.8500	0.0928	0.0158	199.5000	0.5273	0.4242

Tabla 8. Valores de los parámetros para la liga Adelante optimizada por bloques.

De nuevo, en la Figura 6 mostramos los porcentajes obtenidos para el entrenamiento y la predicción. La liga Adelante es más difícil de predecir y los resultados son sustancialmente peores que en la primera división especialmente en los tramos centrales de la temporada.

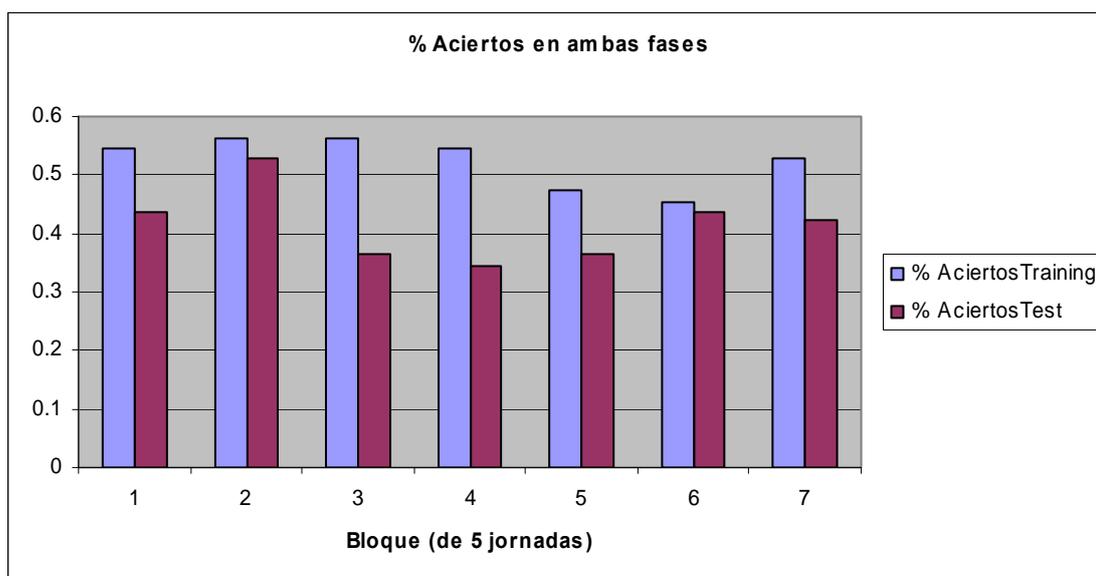


Figura 6. Porcentajes de aciertos en la liga Adelante en bloques de 5 jornadas.

Con respecto a los parámetros, las figuras 7 y 8 muestran la evolución de los mismos. Así, la importancia de jugar en casa sale muy significativo en 6 de los 8 tramos, mientras que es el cuarto periodo cuando tienen más importancia los partidos. La importancia de la diferencia de goles es algo similar a los resultados en primera división mientras que es de resaltar los umbrales en caso de empate que son muchos más amplios que los que se obtenían en primera lo que nos puede indicar lo comentado anteriormente de que los resultados son más impredecibles en segunda que en primera división.

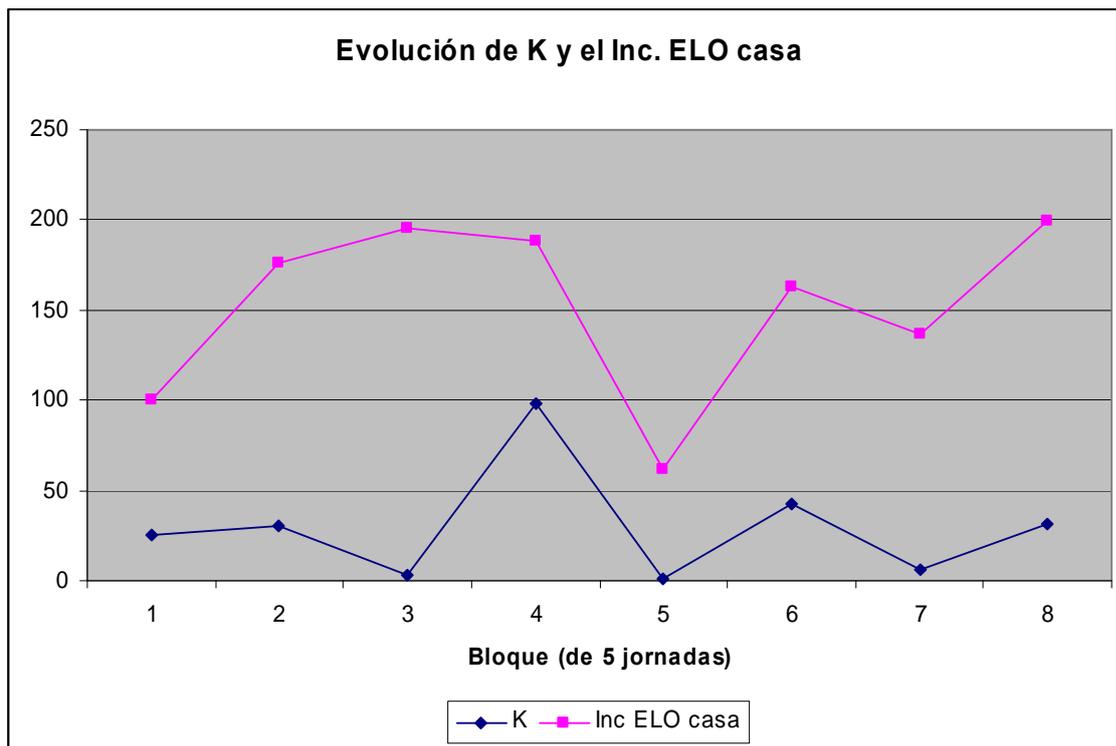


Figura 7. Evolución de K y “ventaja en casa” para la liga Adelante.

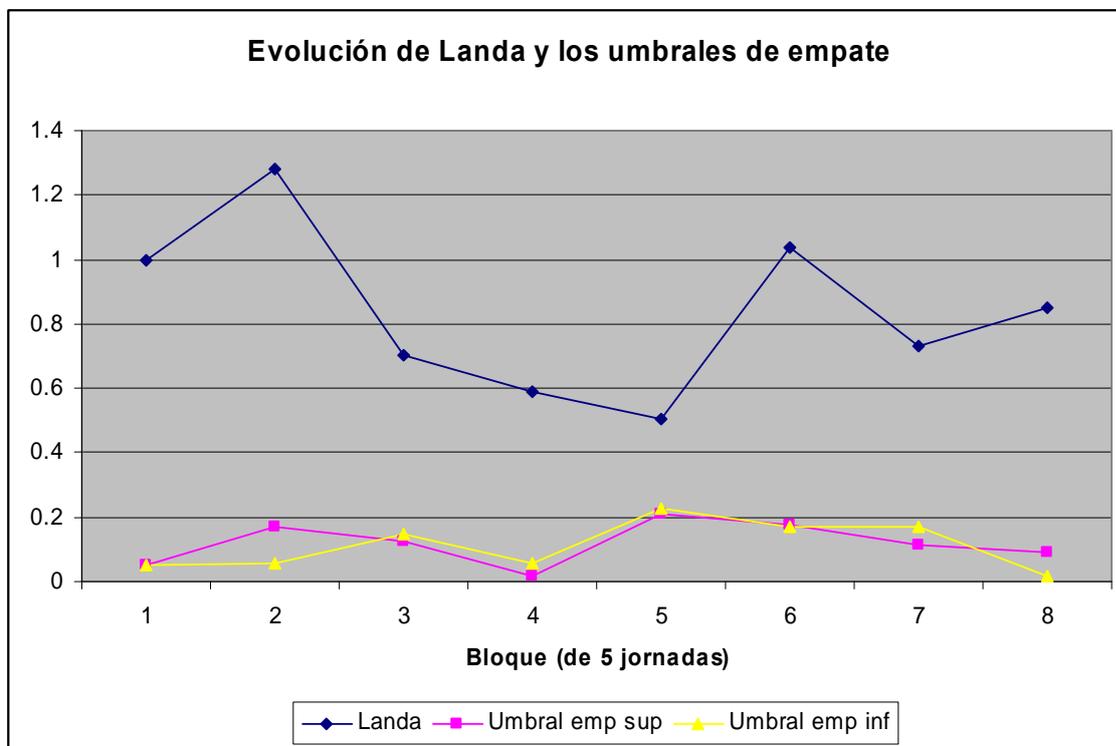


Figura 8. Evolución de  $\lambda$  y umbrales de empate en la liga Adelante.

## 4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos tratado de ver si los parámetros que intervienen en el modelo ELO pueden ser optimizados con el fin de mejorar la predicción del número de aciertos en cada jornada. Se ha probado que el número de aciertos por jornada puede ser mejorado sin alcanzar unos valores muy superiores a los alcanzados por ELO tradicional. Ello lleva a que el porcentaje de aciertos esté en consonancia con los que obtienen las webs de apuestas por Internet, que se sitúan en el margen del 55-60 por ciento de aciertos.

Una alternativa es desarrollar otras formas de optimizar los parámetros, así como utilizar métodos complementarios al ELO para el pronóstico de los partidos. Una posibilidad a considerar es el desglose del rating ELO en casa y fuera, ya que como se ha comprobado el factor “home-advantage” tiene una alta influencia.

No obstante, no debe olvidarse unos de los ingredientes “básicos” del fútbol, y en particular en el fútbol español, y es la capacidad de que cualquier equipo a un partido puede vencer a cualquier otro equipo de la liga, y con ello, la capacidad de obtener un resultado “sorpresa” es bastante alta, y estas “sorpresas” difícilmente pueden ser recogidas por los modelos matemáticos.

## 5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andersson, P., Edman, J. y Ekmanc M. (2005). “Predicting the World Cup 2002 in soccer: Performance and confidence of experts and non-experts”, *International Journal of Forecasting* 21(3), pp. 565-576.
- Dobson S. and Goddard, J. (2001): *The Economics of football*. Cambridge. Cambridge University Press.
- Dobson S. and Goddard, J. (2004): Revenue divergence and competitive balance in a divisional sports league *Scottish Journal of Political Economy*, 51(3), 359-376.

- Eckard, E. W. (2001): Free agency, competitive balance and diminishing returns to pennant contention. *Economic Inquiry*. 39(3). 430-443.
- Elo, A. E. (1978), The rating of chess players, past and present. *Ed. Arco* New York.
- Hvattum, L.M., Arntzen, H. (2010). "Using ELO ratings for match result prediction in association football", *International Journal of Forecasting* 26(3), pp. 460-470.
- Koning, R. H. (2000): Balance in competition in Dutch soccer. *The Statistician*. 49, 419-431
- Laguna, M., Molina, J., Pérez, F., Caballero, R. y Hernández-Díaz, A. G. (2010). "The Challenge of Optimizing Expensive Black Boxes: A Scatter Search / Rough Set Theory Approach", *Journal of the Operational Research Society* 61, pp. 53-67.
- Leitner, C., Zeileisa, A. y Hornik, K. (2010). "Forecasting sports tournaments by ratings of (prob)abilities: A comparison for the EURO 2008", *International Journal of Forecasting* 26(3), pp. 471-481.
- Mocholí, M. y Sala, R. (2009). "La incertidumbre de los resultados en las ligas española, inglesa e italiana (2008/09) mediante el rating ELO", *Rect@ Vol Actas\_17*, 105.
- Neale, W. (1964): The peculiar economics of professional sports. *Quarterly Journal of Economics*, 78, 1-14.
- Peel, D. and Thomas, D. (1988): Outcome uncertainty and the demand for football: An analysis of match attendances in English Football League. *Scottish Journal of Political Economy*, 35(3), 242-249.
- Rottemberg, S. (1956): The baseball players' Labor Market. *Journal of Political Economics*. 64, 242-258.
- Scully, G. W. (1989): *The Business of Major League Baseball*. Chicago. The Chicago University Press.
- Scully, G. W. (1995): *The Market Structure of Sports*. Chicago. The Chicago University Press

- Stefani, R. and Pollard, R. (2007), Football rating system for top-level competition: A critical Survey. *Journal of Quantitative Analysis in Sports*. 3 (3), art. 3.
- Szymanski, S. (2001): Income inequality, competitive imbalance and the attractiveness of team sports: some evidences and a natural experiment from English soccer. *Economic Journal*, 111, F59-F84.
- USB Wealth Management: Copa de fútbol europea 2008 (3 de Abril de 2008). <http://financialservicesinc.ubs.com/wealth/Home.html>
- Vrooman, J. (1995): A general theory of sports league. *Southern Economic Journal*. April, 971-990