

Un nuevo modelo para el problema de control óptimo de semáforos

Lema Fernández, Carmen Socorro [colito@udc.es]
Pedreira Andrade, Luís Pedro [lucky@udc.es]
*Dpto. Economía Aplicada II
Universidade da Coruña*

Bouza Allende, Gemayqzel [gema@matcom.uh.cu]
Allende Alonso, Sira [sira@matcom.uh.cu]
Universidad de La Habana (La Habana-Cuba)

RESUMEN

En cruces regulados por semáforos puede suceder que haya largas colas de vehículos esperando, mientras que en la vía con luz verde sean muy pocos los que están pasando. En este trabajo proponemos un nuevo modelo para el problema de control óptimo de luces de semáforos que evita esta situación. Para ello definimos dos constantes r_1 y r_2 que denotan, respectivamente, la situación ideal de que haya, en el momento del cambio de luz, no más de r_1 autos en los carriles a los que corresponde la luz verde y al menos r_2 vehículos esperando en carriles con luz roja. Entonces penalizamos cuadráticamente el hecho de que, en el momento del cambio de luz, no se tenga la situación antes descrita. Presentamos también algunos ejemplos numéricos correspondientes a un cruce de dos calles con dos sentidos de circulación.

Palabras claves:

Control óptimo de semáforos; penalización; esquema de cambio.

Área temática:

Programación matemática.

ABSTRACT

At some intersections controlled by traffic lights, there are a lot of vehicles waiting while almost no car crossing. In this work we propose a model to determine the switch times of the traffic lights such that similar (uncomfortable) cases are rare for a two two-way streets intersection. First we define r_1 , r_2 , two integer constants, where r_1 (respectively r_2) denotes the largest (smallest) desirable number of cars at the lanes now crossing (waiting) when the lights change. Then, those switch moments where the previously defined situation is not taking place, are penalized leading us to a new model for controlling traffic lights. Some numerical experience is presented.

Keywords:

Optimal traffic light control; penalization; switching scheme.

1. INTRODUCCIÓN

El problema de congestión del tráfico es un problema grave, presente en la mayor parte de las ciudades del mundo, dado que causa, tanto problemas económicos (pérdida del tiempo de trabajo, aumento del precio de los productos como consecuencia del retraso en el movimiento de las mercancías, etc.), como medioambientales (aumento de la contaminación debido al incremento del consumo de combustible). Es una constante preocupación para las administraciones públicas la resolución de este problema, para ello se buscan alternativas como el establecimiento de nuevas infraestructuras viarias (túneles, pasos elevados, etc.) con el coste que suponen y la optimización en la gestión de los elementos que regulan el tráfico dentro de la ciudad (semáforos, rotondas, pasos de peatones, etc.).

Uno de los elementos fundamentales dentro de la gestión del tráfico urbano es el funcionamiento de los semáforos que regulan una intersección vial. Tradicionalmente, y todavía en la práctica en muchos casos, los semáforos tienen un ciclo de duración fija durante un cierto período de tiempo, siguiendo un plan que, en los lugares críticos varía según la hora del día o el día de la semana. Para establecer estos planes, los especialistas encargados de controlar el tránsito, se basan principalmente en información estadística sobre la circulación a diferentes horas del día y en diversos días de la semana. Sin embargo, en la actualidad el objetivo principal es la optimización de los ciclos de los semáforos, es decir, la optimización de la secuencia de estados (rojo, verde, etc.) por la que pasan los semáforos y que se repite de manera cíclica, con el objeto de proporcionar una circulación suave y evitar largas colas en unas calles y circulación escasa en otras. Cada ciclo está asociado a una intersección, o sea, puede regir a varios semáforos. Cada fase del ciclo (o stage) se compone de los estados en los que están todos los semáforos de esa intersección durante un tiempo determinado.

Para optimizar los ciclos de los semáforos, se han empleado diversas técnicas matemáticas que van desde la programación matemática con restricciones de equilibrio [de Schutter, B. and de Moor, B. (1998)] útiles para la realización de análisis estratégicos del tráfico, hasta las técnicas de optimización aplicadas a modelos de simulación [Wiering, M. et al. (2004)]. Además de estas técnicas matemáticas existen

trabajos que han basado su funcionamiento en diferentes técnicas de soft-computing [Lim. G. Y. et al. (2001)]. En el campo del control borroso se han definido diferentes alternativas, estableciendo como variables de entrada la densidad de tráfico y la velocidad de los vehículos durante el estado verde del semáforo y como salida el tiempo que debe durar cada uno de los estados dentro del ciclo del semáforo [López, J. et al. (2007)]. Dentro del ámbito de las soluciones evolutivas destaca el trabajo presentado por [Sánchez, J. J. et al. (2008)] en el que se presenta una arquitectura basada en algoritmos genéticos que optimiza de forma adaptativa los ciclos de los semáforos.

La aparición de nuevas tecnologías de monitorización (sensores en pavimento, cámaras, etc.) permite disponer en tiempo real de datos precisos sobre las condiciones del tráfico, para poder tomar decisiones ante demandas cambiantes en cada instante del día.

En este trabajo exponemos un problema de control de semáforos en un cruce de dos carreteras con los dos sentidos de circulación en un entorno urbano. Los resultados están organizados así: en las dos próximas secciones presentamos dos modelos matemáticos para dicho problema: el formulado en [Lema, C. et al. (2009)] como variante del de [de Schutter, B. and de Moor, B. (1998)] del cual discutimos sus características, y nuestra nueva propuesta, donde el tráfico influye en los tiempos de duración de las luces. En la siguiente exponemos nuestro método de solución (válido para ambos modelos, usando en cada caso la función objetivo correspondiente) que combina una heurística, tipo recocido simulado, con un algoritmo quasi-Newton para problemas de optimización no suaves, a continuación mostramos algunos resultados numéricos obtenidos mediante la programación con MATLAB de dicho algoritmo, comparando las soluciones obtenidas para cada uno de los modelos y para finalizar enumeramos algunas conclusiones y líneas futuras de investigación.

2. MODELO Y PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO

En esta sección presentamos un modelo matemático para el problema de control de tráfico en un cruce simple. Se tiene una intersección a la que confluyen dos calles, ambas doble vía y en las cuales no es posible doblar hacia la izquierda. En cada esquina del cruce hay un semáforo. Se quiere hallar los períodos en que deben permanecer en

verde los semáforos T_1 y T_3 , (rojo T_2 y T_4) y en cuales T_1 y T_3 muestran la luz roja (verde T_2 y T_4), de forma que no haya mucha congestión, ver figura 1. Para ello se consideran distintos criterios: largo de la cola, tiempo de espera y largo de la peor cola o una combinación de ellas.

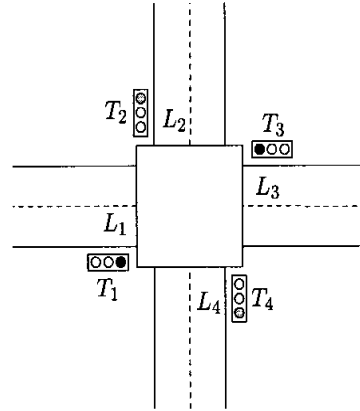


Figura 1: Cruce Simple

Usaremos los siguientes parámetros:

N : cantidad de veces que los semáforos tienen la luz verde.

δ_{amb} : tiempo de duración de la luz ámbar (constante que fluctúa entre los 3 y los 4 segundos).

Como simplificaciones del modelo trabajaremos con el comportamiento promedio por lo que asumimos que la cantidad de autos es continua. Sean:

λ_i : tasa media de llegada de vehículos en el carril L_i (dada en vehículos por segundo).

μ_i : tasa media de salida en el carril L_i cuando el semáforo está en verde.

κ_i : tasa media de salida en el carril L_i cuando el semáforo está en ámbar.

$$b_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \mu_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 - \mu_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 - \mu_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 - \mu_4 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} (\mu_1 - \kappa_1)\delta_{amb} \\ 0 \\ (\mu_3 - \kappa_3)\delta_{amb} \\ 0 \end{bmatrix}, b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ (\mu_2 - \kappa_2)\delta_{amb} \\ 0 \\ (\mu_4 - \kappa_4)\delta_{amb} \end{bmatrix},$$

$$b_5 = \begin{bmatrix} \max((\lambda_1 - \kappa_1)\delta_{amb}, 0) \\ 0 \\ \max((\lambda_3 - \kappa_3)\delta_{amb}, 0) \\ 0 \end{bmatrix}, b_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ \max((\lambda_2 - \kappa_2)\delta_{amb}, 0) \\ 0 \\ \max((\lambda_4 - \kappa_4)\delta_{amb}, 0) \end{bmatrix}$$

Definimos las siguientes variables:

δ_k : tiempo de duración de la luz verde en el k -ésimo cambio de luz (incluyendo el ámba).

$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, x_{k,3}, x_{k,4})^t$ cantidad promedio de autos en los carriles L_1, L_2, L_3, L_4 en el momento del k -ésimo cambio de luz. Entonces:

$$x_{2k+1} = \max(x_{2k} + b_1 \delta_{2k+1} + b_3, b_5) \text{ para } k=0, 1, \dots, N-1,$$

$$x_{2k+2} = \max(x_{2k+1} + b_2 \delta_{2k+2} + b_4, b_6) \text{ para } k=0, 1, \dots, N-1,$$

Podemos imponer algunas condiciones extras, tales como las duraciones mínimas y máximas para los tiempos verde y rojo, así:

$\delta_{min.verde,i}$: cota mínima de duración de la luz en semáforo $i=1,2$.

$\delta_{max.verde,i}$: cota máxima de duración de la luz en semáforo $i=1,2$.

El problema a resolver es el siguiente:

$$\text{Minimizar } J \tag{1}$$

sujeto a:

$$\delta_{min.verde,1} \leq \delta_{2k+1} - \delta_{amb} \leq \delta_{max.verde,1} \text{ para } k=0, 1, \dots, N-1, \tag{2}$$

$$\delta_{min.verde,2} \leq \delta_{2k} - \delta_{amb} \leq \delta_{max.verde,2} \text{ para } k=1, \dots, N, \tag{3}$$

$$x_{2k+1} = \max(x_{2k} + b_1 \delta_{2k+1} + b_3, b_5) \text{ para } k=0, 1, \dots, N-1 \tag{4}$$

$$x_{2k+2} = \max(x_{2k+1} + b_2 \delta_{2k+2} + b_4, b_6) \text{ para } k=0, 1, \dots, N-1, \tag{5}$$

donde J es el criterio a optimizar, el cual puede ser:

- Longitud de la cola sobre todas las colas

$$J_1 = \sum_{j=1}^4 w_j \sum_{i=1}^{2N} x_{ij} \delta_i \tag{6}$$

- Longitud de la cola sobre la peor cola

$$J_2 = \max_j w_j \sum_{i=1}^{2N} x_{ij} \delta_i \tag{7}$$

- Longitud de cola en el peor caso

$$J_3 = \max_{i,j} w_j x_{ij} \tag{8}$$

- Tiempo de espera sobre todas las colas

$$J_4 = \sum_{j=1}^4 \frac{w_j}{\lambda_j} \sum_{i=1}^{2N} x_{ij} \delta_i \tag{9}$$

- Tiempo de espera sobre la peor cola

$$J_5 = \max_j \frac{w_j}{\lambda_j} \sum_{i=1}^{2N} x_{ij} \delta_i \quad (10)$$

donde (w_1, \dots, w_4) representan la importancia que se le otorga a cada uno de los cuatro carriles.

Se puede analizar una sexta opción que consiste en considerar una combinación de los criterios anteriores. Esto nos lleva a un modelo multi-objetivo que podemos resolver tomando una combinación positiva de las distintas funciones objetivo.

$$J_6 = \sum_{i=1}^5 \alpha_i J_i \quad (11)$$

donde los valores α_i corresponden a los pesos que se les dan a los distintos usuarios.

Como consecuencia de lo anteriormente expuesto, conocido δ (vector de los tiempos de cada luz), la cantidad de autos en cada carril quede determinado mediante las ecuaciones (4) – (5). Denotamos por $x(\delta)$ la matriz de $2N$ filas y 4 columnas donde $x_{ij}(\delta)$ indica la cantidad de autos en el carril j en el momento del cambio de luz i .

Sea el parámetro:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv j(2) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Una forma más compacta de escribir el problema, sin tener que diferenciar entre índices pares (correspondientes al cambio de luz rojo-verde del semáforo 1-3) y los impares (donde cambia la luz del semáforo 2-4) es la siguiente:

$$\text{Minimizar } J \quad (12)$$

sujeto a:

$$\Delta_{k1} \delta_{\min.verde,1} + \Delta_{k2} \delta_{\min.verde,2} \leq \delta_k \leq \delta_{amb} \leq \Delta_{k1} \delta_{\max.verde,1} + \Delta_{k2} \delta_{\max.verde,2} \text{ para } k=1, \dots, 2N \quad (13)$$

$$x_{k,j} = \max[x_{k-1,j} + (\lambda_j - \Delta_{kj} \mu_{j,j}) \delta_k + \Delta_{kj} (\mu_j - \kappa_{j,j}) \delta_{amb}, \max(\Delta_{kj} (\lambda_j - \kappa_{j,j}) \delta_{amb}, 0)] \text{ para } k=1, \dots, 2N; j=1, 2, 3, 4 \quad (14)$$

Este modelo es un problema de optimización con restricciones de complementariedad y de grandes dimensiones. Se puede asumir que las variables δ_i son enteras, aunque no es una hipótesis que se tome en cuenta en [de Schutter, B. and de Moor, B. (1998)], pues hace más complejo el problema. En cuanto a su solución, el tamaño del problema en un caso real (10N variables, 4N restricciones suaves y 8N no suaves) hace que sea muy costoso aplicar un algoritmo iterativo [de Schutter, B.

(2002)]. Es por eso que para su solución proponemos un método híbrido que combina una heurística, tipo recocido simulado, con un algoritmo quasi-Newton para problemas de optimización no suaves [Lema, C. et al. (2009)].

3. NUEVO MODELO

En este modelo consideramos que en el semáforo hay sensores que permiten conocer la cantidad de autos en cada carril y, por ende, se puede decidir si, dado el tráfico, se mantiene el estado actual, por cuánto tiempo, o si debe cambiar la luz. Esta decisión permite menores tiempos de espera, pues elimina situaciones indeseadas como sería que no hubiera autos en el carril con la luz verde mientras otros carriles esperan.

Para la estrategia de cambio consideramos que si hay al menos r_2 vehículos esperando en carriles con luz roja, entonces es recomendable cambiar, así como si hay a lo más r_1 autos en los carriles a los que corresponde la luz verde. Dado que puede ser muy restrictivo asumir que los cambios de luces ocurren en estas situaciones, suavizamos el modelo planteando que se minimiza el error cuadrático de aproximar la cantidad de autos en los momentos de cambio en los carriles en espera por r_2 y en los carriles de servicio por r_1 .

O sea si la cantidad de autos en el carril al que corresponde la luz verde en el momento i es $\sum_j \Delta_{ij} x_{ij}$, debemos agregar a la función objetivo el cuadrado de la diferencia entre este valor y r_1 , pero solo si $\sum_j \Delta_{ij} x_{ij} > r_1$. Agregando la variable auxiliar ρ_i^{max} y la restricción $\sum_j \Delta_{ij} x_{ij} \leq \rho_i^{max}$, entonces al minimizar $(\rho_i^{max} - r_1)^2$ se cumple lo deseado. Realizando un razonamiento análogo para los autos que esperan por el cambio de luz para pasar y con la ayuda de la variable ρ_i^{min} , la penalidad quedaría

$$\sum_{i=1}^{2N} (\rho_i^{max} - r_1)^2 + \sum_{i=1}^{2N} (\rho_i^{min} - r_2)^2 \quad (15)$$

donde $\sum_j (1 - \Delta_{ij}) x_{ij} \geq \rho_i^{min}$, $i = 1, \dots, 2N$ $\sum_j \Delta_{ij} x_{ij} \leq \rho_i^{max}$, $i = 1, \dots, 2N$

Usando un parámetro c para controlar el peso que se le da a esta nueva función en el objeto a minimizar, el modelo final es:

$$\min F = J + c \left[\sum_{i=1}^{2N} (\rho_i^{\max} - r_1)^2 + \sum_{i=1}^{2N} (\rho_i^{\min} - r_2)^2 \right] \quad (16)$$

sujeto a:

$$\Delta_{k1} \delta_{\min.verde,1} + \Delta_{k2} \delta_{\min.verde,2} \leq \delta_k - \delta_{amb} \leq \Delta_{k1} \delta_{\max.verde,1} + \Delta_{k2} \delta_{\max.verde,2} \quad \text{para } k=1, \dots, 2N \quad (17)$$

$$x_{k,j} = \max[x_{k-1,j} + (\lambda_j - \Delta_{kj} \mu_j) \delta_k + \Delta_{kj} (\mu_j - \kappa_j) \delta_{amb}, \max(\Delta_{kj} (\lambda_j - \kappa_j) \delta_{amb}, 0)] \quad \text{para } k=1, \dots, 2N; j=1, 2, 3, 4 \quad (18)$$

$$\sum_j (1 - \Delta_{ij}) x_{ij} \geq \rho_i^{\min}, \quad i = 1, \dots, 2N \quad (19)$$

$$\sum_j \Delta_{ij} x_{ij} \leq \rho_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, 2N \quad (20)$$

Para su solución proponemos un método híbrido que combina una heurística, tipo recocido simulado, con un algoritmo quasi-Newton para problemas de optimización no suaves.

4. PROPUESTA DE SOLUCIÓN

El método de recocido simulado es una heurística en que se resuelve un problema de optimización $\min F(x) \quad x \in M$, simulando el proceso de enfriamiento en el que a medida que baja la temperatura el movimiento de los átomos es menos probable [S. Kirkpatrick, S. et al. (1983)]. Dado un candidato a solución Ω el algoritmo busca en una vecindad del mismo, un punto con mejor evaluación de la función objetivo. De no existir, se toma un punto con peor evaluación como nueva solución con una cierta probabilidad. Esta probabilidad que se calcula a partir de la ley de Boltzman, es proporcional a la temperatura del sistema e inversamente proporcional a la variación de los valores de la función objetivo al pasar al nuevo punto. Cada cierto número de iteraciones se disminuye la temperatura del sistema. Los distintos criterios de parada son: encontrar un punto con un valor adecuado de la función objetivo y alcanzar una temperatura suficientemente baja en el sistema.

Su pseudo-código se presenta a continuación.

- 0) Fijar $\Delta > 0$, valor pequeño, $t_0 > \Delta t > 0$ (temperatura inicial y variación de temperatura, respectivamente). Escoger $J_i, i=1, \dots, 6$, y construir F , función objetivo del problema. Q cantidad de pasos con igual temperatura. T menor temperatura a alcanzar por el sistema..

- 1) Construir un vector δ_0 y la solución $x(\delta_0)$ asociada. $F_{mejor} = F(x(\delta_0), \delta_0)$, $\delta_{mejor} = \delta_0$
temperatura $t=t_0$, $i=0$.
- 2) Mientras $t > T$,
 - 2.1) $q = 1$
 - 2.2) Mientras $q < Q$
 - 2.2.1) Tomar δ un punto vecino de δ_i y hallar $x(\delta)$. Si $F(x(\delta), \delta) < F_{mejor}$,
 $\delta_{i+1} = \delta$, $\delta_{mejor} = \delta$ e ir a 2.2.4)
 - 2.2.2) Generar r , número aleatorio de acuerdo a la ley uniforme en $(0,1)$.
 - 2.2.3) Si $r < \exp\left(\frac{F_{mejor} - F(x(\delta), \delta)}{t}\right)$, $\delta_{i+1} = \delta$, si no, $\delta_{i+1} = \delta_i$ $\delta_{mejor} = \delta_{i+1}$ y
construir la solución $x(\delta_{i+1})$ asociada.
 - 2.2.4) $q = q+1$ e ir a 2.2)
 - 2.3) $t = t + \Delta t$ e ir a 2).
- 3) Mejor solución δ_{mejor} con valor de la función objetivo $F(x(\delta_{mejor}), \delta_{mejor})$. Fin

Se dice que δ es vecino de δ^* si difieren en solo una componente y $\|\delta - \delta^*\| = 1$. En aras de mantener factibilidad se tiene en cuenta que el nuevo punto cumpla las restricciones en (17). Claramente las vecindades así definidas, son un subconjunto discreto del conjunto de soluciones factibles, pero es una forma rápida de explorar soluciones factibles.

Teniendo en cuenta las restricciones (18) podemos reducir el modelo implícitamente y calcular los valores de las funciones involucradas y sus derivadas de forma iterativa. Así resolvemos el problema con un algoritmo determinístico tipo quasi-Newton para funciones no suaves [Beliakov, G. and Bagirov, A. (2006)]. La estrategia es:

1. Escoger un vector inicial δ_0 y la solución $x(\delta_0)$ asociada y $k=0$. Fijar sucesiones $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \zeta_k \rightarrow 0^+$, $k \rightarrow \infty$ y números $c_1 > c_2 > 0$.
2. Fijar $s=0$, $\delta_{k,s} = \delta_k$.
3. Buscar una dirección de descenso d , estimando ∇F por el método de gradiente discreto [Beliakov, G. and Bagirov, A. (2006)], con $(\alpha, \beta, \gamma, \zeta, c) = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \zeta_k, c_1)$.
4. Si $|d| \leq \alpha_k$, $\delta_{k+1} = \delta_{k,s}$, $k=k+1$ ir a 2

5. Sea $\sigma_s = \operatorname{argmax}\{\sigma \geq 0, F(\delta_{k,s} + \sigma d/|d|) - F(\delta_{k,s}) \leq -c_2 \cdot \sigma |d|\}$.
6. $\delta_{k,s+1} = \delta_{k,s} + \sigma_s d/|d|$.
7. $s = s + 1$. Ir a 3.

La dirección de descenso se calcula de la siguiente manera

1. Fijar $g, |g_1|=1$ y fijar e , vértice del cubo unitario en \mathbb{R}^n .
2. Calcular el gradiente discreto $v_1 = \Gamma^i(\delta, g_1, e, \beta, \gamma, \zeta)$. $D = \{v_1\}, |g_i| > \sqrt{\frac{I}{2n}} \quad k=1$.
3. Hallar $w_k = \operatorname{argmin}\{|w| / w \in D\}$
4. Si $|w_k| < \alpha$ fin
5. Hallar $g_{k+1} = w_k/|w_k|$. Si $F(\delta + \gamma g_{k+1}) - F(\delta) \leq c\gamma |w_k|$ fin.
6. Calcular el gradiente discreto $v_{k+1} = \Gamma^i(\delta, g_{k+1}, e, \beta, \gamma, \zeta), |g_i| > \sqrt{\frac{I}{2n}} \quad D = D \cup \{v_k\}$ e ir a 3.

El gradiente discreto $\Gamma^i(\delta, g_1, e, \beta, \gamma, \zeta)$ se calcula componente a componente mediante un esquema de diferencias divididas entre puntos consecutivos que difieren en $\zeta^j \beta$ unidades en la componente j , a lo que se agrega una combinación de las componentes $j \neq i$ para la i -ésima componente.

Este método arrojó en la mayoría de los casos mejores resultados que la heurística, pero a un coste computacional superior. Usando las ventajas de ambos algoritmos, proponemos buscar una buena aproximación a la solución mediante el método de recocido simulado. Luego se mejora el comportamiento en una vecindad del punto mediante el algoritmo quasi-Newton para funciones no suaves ya expuesto.

Presentamos ahora un ejemplo para ilustrar el comportamiento del algoritmo, así como los resultados obtenidos mediante la programación en MATLAB de los modelos propuestos.

5. EJEMPLO

Datos: 5 ciclos, tiempo de ámbar 3 sg.

Tabla 1: Parámetros

	Carril1	Carril2	Carril3	Carril4
Tasa-llegada	0.3	0.3	0.2	0.25
Tasa-sal. ver.	0.7	0.7	1	0.5
Tasa-sal.ámb.	0.25	0.25	0.5	0.5

En cuanto a las cotas del tiempo de las luces, se tomaron:

$$\delta_{min,verde,1} = \delta_{min,verde,2} = 5 \text{ y } \delta_{max,verde,1} = \delta_{max,verde,2} = 30. \text{ Pesos } w=[1 \ 1 \ 1 \ 1], r_1 = 2, r_2 = 8$$

Se obtuvo aleatoriamente un δ_0 inicial (para cada una de las 6 opciones) y se utilizó para evaluar los dos modelos. Veremos que en todos los casos, los resultados obtenidos con el nuevo modelo expuesto en este trabajo son mejores que los del modelo de [Lema C. et al. (2009)] aunque el tiempo computacional sea sensiblemente mayor.

Para $J = J_l$ obtuvimos los siguientes resultados numéricos:

Tabla 2: Duración de la luz verde en cada ciclo

	Ciclo1	Ciclo2	Ciclo3	Ciclo4	Ciclo5
Semáforos 1-3	5	7,37	10,34	19,64	6,80
Semáforos 2-4	6,66	8,90	13,50	5,65	7,82

Tabla 3: Promedio de autos en el momento del cambio de luz

	Carril1	Carril2	Carril3	Carril4
Ciclo1-1 ^{er} cambio	0,15	1,5	0	1,25
Ciclo1-2 ^o cambio	2,15	0,18	1,33	0
Ciclo2-1 ^{er} cambio	0,55	2,39	0	1,84
Ciclo2-2 ^o cambio	3,22	0,18	1,78	0
Ciclo3-1 ^{er} cambio	0,43	3,29	0	2,58
Ciclo3-2 ^o cambio	4,48	0,15	2,7	0
Ciclo4-1 ^{er} cambio	0,15	6,04	0	4,91
Ciclo4-2 ^o cambio	1,84	5,13	1,13	3,5
Ciclo5-1 ^{er} cambio	0,47	7,17	0	5,2
Ciclo5-2 ^o cambio	2,82	5,40	1,56	3,24

Valor de la función objetivo 757,74. Peor cola: 7 autos. Tiempo computacional 13,9 sg.

Para $F = J_1 + c \left[\sum_{i=1}^{2N} (\rho_i^{max} - r_1)^2 + \sum_{i=1}^{2N} (\rho_i^{min} - r_2)^2 \right]$ obtuvimos los siguientes resultados numéricos:

Tabla 4: Duración de la luz verde en cada ciclo

	Ciclo1	Ciclo2	Ciclo3	Ciclo4	Ciclo5
Semáforos 1-3	5	7,44	9,42	7	6,08
Semáforos 2-4	5,44	8,17	7,42	10,68	6,18

Tabla 5: Promedio de autos en el momento del cambio de luz

	Carril1	Carril2	Carril3	Carril4
Ciclo1-1 ^{er} cambio	0,15	1,5	0	1,25
Ciclo1-2 ^o cambio	1,78	0,67	1,09	0
Ciclo2-1 ^{er} cambio	0,15	2,91	0	1,86
Ciclo2-2 ^o cambio	2,61	0,99	1,63	0
Ciclo3-1 ^{er} cambio	0,19	3,81	0	2,36
Ciclo3-2 ^o cambio	2,41	2,2	1,48	0,50
Ciclo4-1 ^{er} cambio	0,96	4,30	0	2,25
Ciclo4-2 ^o cambio	4,17	1,37	2,14	0
Ciclo5-1 ^{er} cambio	3,09	3,20	0	1,52
Ciclo5-2 ^o cambio	4,94	2,07	1,24	0

En este ejemplo hemos obtenido buenos resultados ya que las colas son cortas (peor cola aproximadamente 5 autos). Además observamos que se evitó la congestión con períodos largos sin cambio de luz cuando la cantidad de tráfico es grande y la situación no deseada de que haya largas colas de vehículos esperando, mientras que en la vía con luz verde sean muy pocos los que están pasando. El valor de la función objetivo es 574,44. Si hubiésemos utilizado sólo la heurística, el valor de la función objetivo sería 983,53. Se observa la mejoría del resultado utilizando el método híbrido, aunque el coste computacional es mayor, ya que sólo la heurística usaría 1,43 sg., sin embargo el híbrido necesita 14,1 sg.

Para $J = J_2$ obtuvimos los siguientes resultados numéricos:

Tabla 6: Duración de la luz verde en cada ciclo

	Ciclo1	Ciclo2	Ciclo3	Ciclo4	Ciclo5
Semáforos 1-3	5	6,70	6,10	7,52	23,69
Semáforos 2-4	5,69	6,11	11,21	8,09	11,82

Tabla 7: Promedio de autos en el momento del cambio de luz

	Carril1	Carril2	Carril3	Carril4
Ciclo1-1 ^{er} cambio	0,15	1,5	0	1,25
Ciclo1-2 ^o cambio	1,85	0,57	1,13	0
Ciclo2-1 ^{er} cambio	0,53	2,58	0	1,67
Ciclo2-2 ^o cambio	2,36	1,49	1,22	0,15
Ciclo3-1 ^{er} cambio	1,27	3,32	0	1,67
Ciclo3-2 ^o cambio	4,63	0,18	2,24	0
Ciclo4-1 ^{er} cambio	2,97	2,44	0	1,88
Ciclo4-2 ^o cambio	5,38	0,58	1,60	0
Ciclo5-1 ^{er} cambio	0,15	7,69	0	5,92
Ciclo5-2 ^o cambio	3,70	4,31	2,36	2,97

Valor de la función objetivo 315,76. Peor cola: 7,69 autos. Tiempo computacional 11,4 sg.

Para $F = J_2 + c \left[\sum_{i=1}^{2N} (\rho_i^{max} - r_1)^2 + \sum_{i=1}^{2N} (\rho_i^{min} - r_2)^2 \right]$ la solución fue:

Tabla 8: Duración de la luz verde en cada ciclo

	Ciclo1	Ciclo2	Ciclo3	Ciclo4	Ciclo5
Semáforos 1-3	5	7,52	10,02	12,86	6,14
Semáforos 2-4	5,91	8,49	12,21	10,42	5,71

Tabla 9: Promedio de autos en el momento del cambio de luz

	Carril1	Carril2	Carril3	Carril4
Ciclo1-1 ^{er} cambio	0,15	1,5	0	1,25
Ciclo1-2 ^o cambio	1,92	0,48	1,18	0
Ciclo2-1 ^{er} cambio	0,26	2,74	0	1,88
Ciclo2-2 ^o cambio	2,81	0,70	1,70	0
Ciclo3-1 ^{er} cambio	0,15	3,70	0	2,50
Ciclo3-2 ^o cambio	3,82	0,17	2,44	0
Ciclo4-1 ^{er} cambio	0,15	4,02	0	3,21
Ciclo4-2 ^o cambio	3,27	1,21	2,08	0,61
Ciclo5-1 ^{er} cambio	2,17	3,04	0	2,14
Ciclo5-2 ^o cambio	3,88	2,11	1,14	0,72

$F = 277,53$. Peor cola 4 autos. Tiempo computacional= 13,54 sg

Para $J = J_3$ obtuvimos:

Tabla 10: Duración de la luz verde en cada ciclo

	Ciclo1	Ciclo2	Ciclo3	Ciclo4	Ciclo5
Semáforos 1-3	6,81	5,55	10,15	9,76	7,78
Semáforos 2-4	5	6,55	8,87	5	19,64

La peor cola tuvo 7,25 autos. Tiempo computacional 12,62 sg.

Para $F = J_3 + c \left[\sum_{i=1}^{2N} (\rho_i^{max} - r_1)^2 + \sum_{i=1}^{2N} (\rho_i^{min} - r_2)^2 \right]$ obtuvimos:

Tabla 11: Duración de la luz verde en cada ciclo

	Ciclo1	Ciclo2	Ciclo3	Ciclo4	Ciclo5
Semáforos 1-3	9,38	6,31	7,54	9,36	7,75
Semáforos 2-4	6,71	8,91	7,46	5	10,99

La peor cola tuvo 6,27 autos. Tiempo computacional 12,93 sg.

Para $J = J_4$ obtuvimos:

Tabla 12: Duración de la luz verde en cada ciclo

	Ciclo1	Ciclo2	Ciclo3	Ciclo4	Ciclo5
Semáforos 1-3	17,6	5,79	16,39	8,44	6,84
Semáforos 2-4	5	16	6,72	5,98	5,25

Valor de la función objetivo 3990. Peor cola 8,4 autos. Tiempo 11,71 sg.

Para $F = J_4 + c \left[\sum_{i=1}^{2N} (\rho_i^{max} - r_1)^2 + \sum_{i=1}^{2N} (\rho_i^{min} - r_2)^2 \right]$ los períodos son:

Tabla 13: Duración de la luz verde en cada ciclo

	Ciclo1	Ciclo2	Ciclo3	Ciclo4	Ciclo5
Semáforos 1-3	5	8,57	7,53	10,03	10,80
Semáforos 2-4	5,52	8,43	5,27	7,82	19,33

El valor de la función objetivo es 2727, de ahí que el resultado no fuera muy bueno pues el tiempo de espera total fue alto, aunque es mucho mejor que si usásemos sólo la heurística, ya que en ese caso el valor de F es 5652. La mayor cola tuvo 7 autos. Tiempo computacional 14,15 sg.

Para $J = J_5$ obtuvimos:

Tabla 14: Duración de la luz verde en cada ciclo

	Ciclo1	Ciclo2	Ciclo3	Ciclo4	Ciclo5
Semáforos 1-3	6,99	6,92	7,69	16,21	7,14
Semáforos 2-4	5,03	7,25	5,35	5	11,22

Valor de la función objetivo 1436. Peor cola 9,83 autos. Tiempo computacional 11,31 sg.

Los resultados para $F = J_5 + c \left[\sum_{i=1}^{2N} (\rho_i^{max} - r_1)^2 + \sum_{i=1}^{2N} (\rho_i^{min} - r_2)^2 \right]$ son:

Tabla 15: Duración de la luz verde en cada ciclo

	Ciclo1	Ciclo2	Ciclo3	Ciclo4	Ciclo5
Semáforos 1-3	5,32	7,85	8,13	7,25	7,87
Semáforos 2-4	5,95	7,64	6,21	5	6,80

Los resultados fueron bastante buenos, la peor cola tuvo 6,40 autos y el valor de la función objetivo fue 930,55. Tiempo computacional 12,43 sg.

Culminamos con el problema multi-objetivo, modelado mediante la minimización de la función $J = J_6$, ver (11). Si utilizamos el vector de pesos $\alpha = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$ para no hacer diferencias entre los distintos criterios, los resultados son:

Tabla 16: Duración de la luz verde en cada ciclo

	Ciclo1	Ciclo2	Ciclo3	Ciclo4	Ciclo5
Semáforos 1-3	5,01	23,97	7,20	9,48	6,64
Semáforos 2-4	6,75	5,11	7	5,24	5

Valor de la función objetivo 7962. Peor cola 11,44 autos. Tiempo computacional 13,51 sg.

Los resultados para $F = J_6 + c \left[\sum_{i=1}^{2N} (\rho_i^{max} - r_1)^2 + \sum_{i=1}^{2N} (\rho_i^{min} - r_2)^2 \right]$ son:

Tabla 17: Duración de la luz verde en cada ciclo

	Ciclo1	Ciclo2	Ciclo3	Ciclo4	Ciclo5
Semáforos 1-3	11,07	12,08	10,13	13,50	11,33
Semáforos 2-4	11,97	15,53	7,92	5,31	5

El valor de la función objetivo fue 6036 y la cola mas larga tuvo 8 autos. Tiempo computacional 14,59 sg.

6. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

- En este trabajo hemos estudiado el problema de control óptimo de semáforos para un cruce de dos carreteras con los dos sentidos de circulación sin posibilidad de girar a la izquierda, obteniendo un nuevo modelo en el que se evita que haya pocos autos cruzando y muchos esperando por el cambio de luz.
- Hemos propuesto un método híbrido de solución donde se combina la filosofía de recocido simulado y un método quasi-Newton adecuado. Obtuvimos resultados bastante buenos (las colas son cortas), con un tiempo computacional no demasiado grande, ya que mediante la heurística fuimos capaces de explorar la región de

soluciones “escapando” de extremos locales, y mediante el algoritmo determinístico se mejoró considerablemente la solución obtenida a través de la heurística.

- Hemos comparado los resultados conseguidos con este nuevo modelo y con uno propuesto anteriormente, obtenido a partir del de Schutter-Moor, llegando a la conclusión de que funciona mejor, ya que los resultados mejoran a los anteriores, y el tiempo computacional sólo es ligeramente superior.
- En el futuro nos proponemos la experimentación con datos reales de flujo de vehículos sobre diferentes intersecciones, incluyendo en nuestro estudio diferencias entre los distintos carriles, un mayor número de ciclos y en el caso del problema multiobjetivo, vectores de peso que ponderen más un objetivo que otro, etcétera.
- Modelaremos también otros tipos de intersecciones en los que se permita girar a la izquierda, y cruces concatenados, es decir situaciones donde las salidas de algunas colas serán conectadas con las entradas de otras.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DE SCHUTTER, B. and DE MOOR, B. (1998) “Optimal traffic light control for a single intersection”. *European Journal of Control*, 4, 3, pp. 260-276.
- WIERING, M. et al. (2004). “Simulation and optimization of traffic in a city”. *IEEE Intelligent Vehicles Symposium*, pp. 453-458.
- LIM, G. Y. et al. (2001) “The optimization of traffic signal light using artificial intelligence”. *10th IEEE International Conference in Fuzzy Systems*, 3, pp. 1279-1282.
- LÓPEZ, J. et al. (2007) “Traffic lights Fuzzy control proposals to improve vehicular flow”, *Fourth Congress of Electronics, Robotics and Automotive Mechanics*, pp. 406-411.
- SÁNCHEZ, J. J.; GALÁN, M. J. and RUBIO, E. (2008). “Applying a traffic lights evolutionary optimization technique to a real case: Las Ramblas, Area in Santa Cruz de Tenerife” *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 12, 1, pp. 25-40.

- LEMA, C. et al. (2009) “Un método híbrido para resolver el problema de control óptimo de semáforos”. *Rect@*, 10, pp. 285-298.
- DE SCHUTTER, B. (2002) “Optimizing acyclic traffic signal switching sequences through an extended linear complementarity problem formulation”, *European Journal of Operational Research*, 139, 2, pp. 400-415.
- S. KIRKPATRICK, S.; GELATT, J.R. and VECCHI, M.P. (1983) “Optimization by simulated annealing”. *Science*, 220, pp. 671-680.
- BELIAKOV, G. and BAGIROV, A. (2006) “Non-smooth optimization methods for computation of the conditional value-at-risk and portfolio optimization”, *Optimization*, 55, 5-6, pp. 459-479.