Un proyecto de taller de matemáticas en torno a la construcción de una función de costes

Sarmiento Escalona, Antonio (asarmiento@udc.es)
Departamento de Economía Aplicada II
Universidad de A Coruña

RESUMEN

Este trabajo muestra un proyecto de actuación en el aula a la búsqueda de una mejor interrelación entre la Matemática y la Economía en las clases de matemáticas de los nuevos grados universitarios. Para ello hemos descrito un posible recorrido de estudio e investigación, que podría desarrollarse como un taller de matemáticas en un primer curso de Matemáticas para la Economía y Empresa. El tema que nos sirve como motivo inspirador del taller es la forma en que normalmente suele representarse la función de costes a corto plazo de una empresa en los textos de microeconomía y la presentación que de la misma se hace en los ejercicios resueltos y propuestos en los libros de Matemáticas

***Palabras claves*:** Función de Costes; Matemáticas; Economía; Empresa

***Área temática*:** Metodología y Didáctica

ABSTRACT

This paper shows a project of performance in the classroom, to the research of a better interrelation between the Mathematics and the Economics in the classroom of mathematics. For get this purpose, we have described a possible route of study and investigation that could develop like a workshop of mathematics in a first course of Maths for Economics and Business. The subject that serves us like reason of the workshop is the form in that usually represent the function of costs in the short term of a firm in the texts of microeconomics and the presentation that of the same does in the resolved and proposed exercises in the books of Mathematics.

***Keywords*:** Total Cost; Mathematics; Economics; Business

***Clasificación JEL (Journal Economic Literature)*:** A22, C69

1. INTRODUCCIÓN

Durante muchos años las matemáticas que se han estudiado en las Facultades de Economía y Empresa han sido muy formales, más próximas a las correspondientes a enseñanzas técnicas ó científicas que a las necesarias para unas enseñanzas de ámbito social. La consecuencia es que los currículos se han limitado a dar una panorámica general de una serie de temas que se suponía "importantes" para posteriores estudios en Economía y Empresa. Para mostrar el interés de lo que se estudiaba de cara a su aplicación en la Economía se solían poner unos ejercicios al final de cada tema de "contenido económico". Esta forma de hacer las cosas está en coherencia con un sistema de enseñanza apoyado en la clase magistral en la que se buscaba (se evaluaba) que el alumno reprodujese lo mejor posible lo que el profesor contaba en el aula.

Sin embargo, de manera bastante general, en los últimos años se está cuestionando tanto esta forma de docencia (ver Hoy & al. 2001, Renshaw 2005, Simon & Blume 1994, Turkington 2007) como algunos apartados que parecían imprescindibles en el currículo de la asignatura. Podemos citar un ejemplo de esto último para el Cálculo y otro para el Algebra Lineal (Señalar que el currículo de la asignatura *Matemáticas I* que se estudia en el primer curso de los grados en Economía y/o Empresa recorre los temas clásicos del Calculo Diferencial en una variable y del Algebra Lineal). En la enseñanza secundaria ha sido reconocida la imposibilidad de introducir el Cálculo formalmente por lo que la enseñanza actual se apoya en una concepción dinámica del límite basada en exploraciones gráficas y numéricas, así como en el uso de algunas técnicas algebraicas (Artigue, 2003). Esto permite a los alumnos resolver simples, pero a la vez interesantes problemas de variación y optimización. La transición hacia aproximaciones más formales, que tiene lugar en la Universidad, representa un salto tremendo, tanto conceptual como técnicamente. Desde un enfoque conceptual se busca una respuesta a las necesidades de fundamento, unificación y generalización. No es fácil sensibilizar a los alumnos de Economía con estas necesidades ya que no forman parte de su cultura matemática. Análogamente, en el Algebra Lineal el concepto de espacio vectorial abstracto, en su forma axiomática, ha demostrado compartir algunas características comunes con el concepto formal de límite (Dorier & Sierpinska 2003).

Cuando entró en el escenario matemático, su valor como concepto generalizador, unificador y formalizador fue mucho más fuerte que su potencial para resolver nuevos problemas y no fue fácilmente aceptado por los matemáticos. La misma situación sucede con nuestros estudiantes, que piensan que no necesitan esta construcción abstracta para resolver la mayoría de los problemas de un primer curso de Algebra Lineal.

Cada vez más, la Matemática que demanda la comunidad de estudiantes y profesionales de la Economía y Empresa, deja de lado el formalismo para ser esencialmente pragmática y operativa. Por otra parte, el profesor de estas matemáticas se mueve en el difícil equilibrio de dar unos contenidos aislados, que le pueden hacer caer en el fenómeno didáctico llamado "*monumentalismo*"[1], o intentar nuevas experiencias que permitan romper esta dinámica y dar un sentido más global a la asignatura. La pregunta es, ¿existen otras posibilidades exploradas o no que ofrezcan las matemáticas para que los estudiantes puedan profundizar en la propia Matemática e incluso, si es posible, en la propia Economía en un primer curso del grado correspondiente? En todo caso, tenemos la obligación de experimentar lo máximo y mejor posible para encontrarlas.

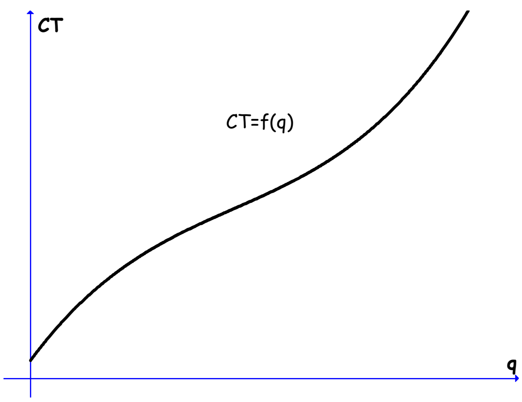
Intentando responder a preguntas como la anterior presentamos el distinto tratamiento que se hace de la función de costes de una empresa a corto plazo en un problema de un tratado de matemáticas para la Economía y en el estudio teórico de un tratado de Microeconomía. A continuación, presentamos una reflexión personal sobre una manera posible de conectar ambos tratamientos utilizando lo aprendido en las clases de matemáticas. Se trataría de que los alumnos a través de una situación de "*plantear y resolver problemas*" se encontraran en algo parecido a "*hacer matemáticas*".

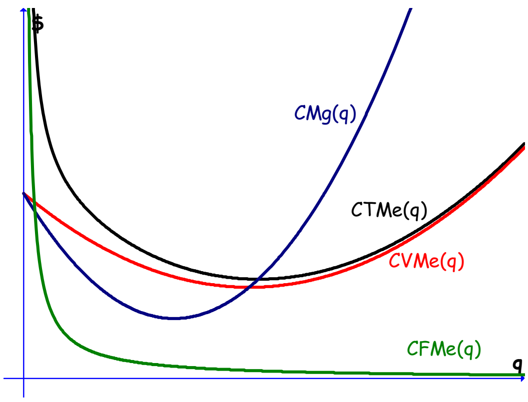
[1] Este fenómeno se refiere a la enseñanza que se limita a hacer que los alumnos coleccionen saberes como monumentos que se visitan y olviden otras cuestiones a las que la actividad matemática debería responder (ver Chevallard 2004).

2. LA RAZON DE SER DE LA EXPERIENCIA

En la enseñanza de las matemáticas para la Economía se presentan como colofón de las clases "teóricas" algunos ejercicios de aplicaciones aisladas que relacionan lo estudiado con temas económicos. Un ejemplo sencillo de lo anterior podría ser el siguiente problema (Renshaw 2005): *Sea la función coste total a corto plazo de una empresa* $CT(q) = 2.2q^3 - 16q^2 + 48q + 150$. *Se pide: (a) Hallar el valor del output para el que el coste medio CMe alcanza su mínimo. (b) Hallar el output en el que el coste marginal CMg alcanza su mínimo. (c) Demostrar que CMg es igual al CMe en el output mínimo del CMe. (d) Representar en los mismos ejes las gráficas de las funciones CMg y CMe. (e) Representar la gráfica de la función CT.*

Por otra parte, en un texto clásico de microeconomía (Henderson & Quandt 1979) en relación al mismo tema se dice lo siguiente: *los economistas creen que una forma razonable de representar el coste total de una empresa a corto plazo es una función f(q), siendo q la cantidad de output que produce la empresa, tal que: 1) f se puede suponer continua; 2)* $f(0) > 0$, *f tiene una intersección positiva con el eje OY que se denominan los costes fijos; 3)* $f'(q)>0$, *f tiene pendiente positiva; f es creciente; 4)* $f''(q)>0$, *f tiene curvatura positiva (convexa), los costes aumentan proporcionalmente más rápido que la producción*[2]. Con esa información indican que las funciones de coste pueden adoptar varias formas diferentes. *En las figuras siguientes se han dibujado unas entre las posibles que gozan de las propiedades habitualmente supuestas por los economistas. El coste total es función cúbica del output:*





[2] Observar que en el dibujo primero $f'' < 0$, f cóncava y luego $f'' > 0$, f convexa

A continuación se añade: *Las curvas correspondientes al CTMe (coste total medio), CVMe (coste variable medio), y CMg (coste marginal) son todas curvas de segundo grado que, a medida que se aumenta el output, primero disminuyen y luego aumentan. El CMg alcanza su mínimo antes que CTMe y CVMe, y CVMe alcanza su mínimo antes que CTMe. El lector observará que la curva CMg pasa por los puntos mínimos de CTMe y CVMe. La curva CFMe (coste fijo medio) es una hipérbola equilátera, independientemente de las formas de las otras curvas de coste; cuando aumenta el output, el coste fijo se reparte entre un número mayor de unidades y, por tanto, decrece. La distancia vertical entre las curvas CTMe y CVMe es igual al CFMe, de aquí que disminuya cuando aumenta el output*.

Estos dos enfoques señalan el *statu quo* actual aceptado por ambas comunidades la matemática y la económica y que, quizás, se podría resumir diciendo que el razonamiento matemático se sustancia sobre fórmulas y expresiones analíticas siendo la representación gráfica la culminación del trabajo hecho mientras que los economistas razonan expresándose por medio de gráficas y recurren a las fórmulas sólo cuando necesitan dar un mayor formalismo o consistencia a lo expresado gráficamente.

En el salto de lo económico a lo formal hay algunas lagunas que pueden llenar sólo un conjunto de posibles actividades matemáticas. ¿Pueden servir estas actividades para que los estudiantes valoren la necesidad de las matemáticas en la economía? Un posible punto de partida pudiera ser a partir de la *gráfica de la izquierda* en el texto de microeconomía plantear e intentar resolver una serie de cuestiones: ¿cuál es su expresión matemática?, ¿hay una o muchas soluciones?, ¿sólo la función cúbica puede tener esta forma?, ¿cómo se comportan funciones polinómicas de menor grado?, ¿cómo las de mayor grado?, ¿podríamos encontrar funciones no polinómicas que se ajusten a la gráfica?, etc …. Algunas de estas cuestiones pueden resolverse con un primer nivel de matemáticas, otras pueden mostrarnos las limitaciones del nivel matemático en que estamos, otras pueden quedarse como cuestiones abiertas para el futuro. En cualquier caso, nos van a obligar a reflexionar sobre distintos temas, a tomar decisiones, que van a replantear y modificar los problemas, etc… Antes de comenzar, se intuye la necesidad en algún momento de recurrir al uso de nuevas tecnologías para hacer cálculos y representaciones gráficas e incluso de hacer alguna consulta de tipo económico.

Creemos que la *situación generatriz* de la actividad es suficientemente rica, abierta y adecuada para la institución para la que está pensada. El entusiasmo del profesor y los alumnos puede lograr aumentar el atractivo de la actividad. La *viabilidad* de la propuesta viene del hecho que se parece a lo que normalmente se hace en las clases pero la diferencia viene marcada por el sentido "más global" de la propuesta. Una *evaluación* final de la actividad será necesaria para extraer un juicio más exacto del trabajo requerido y realizado.

3. ¿UN MODO DE HACER MATEMÁTICAS?

Con las anteriores premisas en mente y suponiendo que nuestros alumnos han cursado varios temas de la asignatura "Matemáticas I" (a la que ya nos hemos referido), tales como el cálculo diferencial e integral en una variable. Hacemos una propuesta de trabajo (*un posible taller de matemáticas*), que podría realizarse en *clases interactivas*. El punto de partida es la lectura de los dos enfoques en torno a la función de costes a corto plazo de una empresa anteriormente señalados. Contamos con que de esa lectura surjan situaciones problemáticas nuevas que abran perspectivas a analizar desde el punto de vista matemático. Lo que sigue no es más que una posibilidad de trabajo.

1) Partimos de las gráficas que aparecen en el tratado de microeconomía. Una forma de empezar es *hallar una expresión analítica para la gráfica de la izquierda y comprobar su parecido mediante el uso de una calculadora gráfica o un programa informático*. Es una actividad que se puede hacer en primer lugar con lápiz y papel usando las matemáticas elementales que conocemos. En el texto nos dicen que se trata de una función *cúbica* del output. Aparcaremos, de momento, la posibilidad de estudiar otras funciones más simples (lineales y cuadráticas), o más complicadas, (cuárticas, …). Podemos, entonces, considerar una función general de coste total de tercer grado como: $CT(q) = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d$.

El problema es *determinar a, b, c y d para obtener una gráfica semejante a la de la figura mostrada.* Para no aumentar el número de parámetros *nos vemos obligados a* *tomar una nueva decisión*: fijar unas restricciones numéricas concretas para la gráfica. La decisión se ve corroborada por el hecho de las futuras necesidades informáticas previstas (los programas informáticos de representaciones gráficas van a pedirnos unas coordenadas numéricas concretas). Hacemos, pues, los siguientes supuestos: 1) existen unos costes fijos de, por ejemplo, *100 u. m.* (la gráfica corta al eje de ordenadas en el punto *(0,100)*), y 2) hay un punto de inflexión en la gráfica, donde la función cambia de cóncava a convexa (el punto central de la gráfica es $(10{,}500)$ que es de inflexión). Por tanto vamos a buscar la expresión de una función definida en el primer cuadrante: la variable *X* variando de *0* a *20* y la variable *Y* de *0* a *1000*.

Concretado el esquema del problema, deducimos derivando:

$$CT'(q) = 3a \cdot q^2 + 2b \cdot q + c \qquad CT''(q) = 6a \cdot q + 2b$$

Del hecho que la gráfica pasa por *(0,100)* y que en $q = 10$ hay un punto de inflexión obtenemos:

$$d = 100 \qquad 6a \cdot 10 + 2b = 0 \Rightarrow b = -30a$$

Y utilizando el hecho que la gráfica pasa también por $(10{,}500)$ obtenemos:

$$500 = a \cdot 10^3 + (-30a) \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 100 \Rightarrow c = 40 + 200a$$

Con lo que vemos que el problema planteado, con las restricciones que le hemos impuesto para resolverlo, tiene infinitas soluciones dependientes de un parámetro *a*.

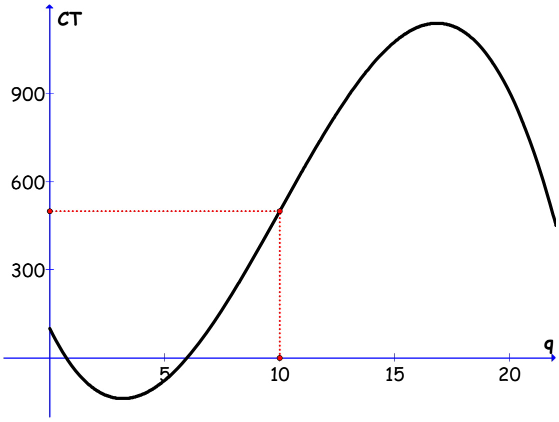
$$CT(q) = a \cdot q^3 + (-30a) \cdot q^2 + (40 + 200a) \cdot q + 100$$

¿Cualquier valor de *a* nos dará una solución correcta? En este momento, podemos sentir la necesidad de ver las gráficas correspondientes para distintos valores de *a*. Podemos utilizar una calculadora gráfica o un programa informático que permita representaciones gráficas (*Mathematica, Mapple, Derive, Graph,* …) e intentar representar

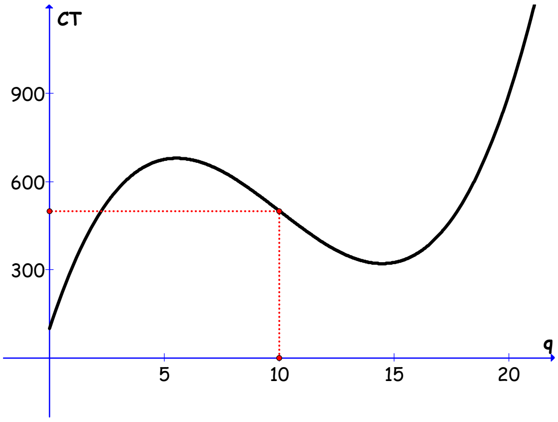
$$CT(q) = a \cdot q^3 + (-30a) \cdot q^2 + (40 + 200a) \cdot q + 100$$

para distintos valores de *a*.

Por ejemplo para $a = -1$ y para $a = 1$ obtenemos:



$CT(q) = -q^3 + 30 \cdot q^2 - 160 \cdot q + 100$



$CT(q) = q^3 - 30 \cdot q^2 + 240 \cdot q + 100$

Estas gráficas cumplen las restricciones que pedimos a la función pero nos muestran que cualquier valor de *a* no se ajusta a la gráfica planteada en el texto de microeconomía. Esto nos lleva a retomar el estudio analítico de la función en el sentido de hallar más restricciones que se deben cumplir para *a*.

2) Retornamos al lápiz y papel y buscamos una característica aún no usada de nuestra curva inicial. La primera posibilidad es estudiar la concavidad/convexidad. Necesitamos volver a la segunda derivada:

$$CT''(q) = 6aq - 60a = 6a(q - 10)$$

De donde:

$$\begin{cases} para\ a > 0, & \begin{array}{l} si\ 0 < q < 10\ entonces\ CT''(q) < 0 \Rightarrow CT(q)\ cóncava \\ si\ 10 < q < 20\ entonces\ CT''(q) > 0 \Rightarrow CT(q)\ convexa \end{array} \\ para\ a < 0, & \begin{array}{l} si\ 0 < q < 10\ entonces\ CT''(q) > 0 \Rightarrow CT(q)\ convexa \\ si\ 10 < q < 20\ entonces\ CT''(q) < 0 \Rightarrow CT(q)\ cóncava \end{array} \end{cases}$$

Luego tenemos que añadir la condición de ser $a > 0$ a la familia de funciones $CT(q) = a \cdot q^3 + (-30a) \cdot q^2 + (40 + 200a) \cdot q + 100$. Afinamos más en nuestro estudio observando que la función es *creciente* en el intervalo *[0, 20]* en que estamos considerando el dibujo. Estudiamos para ello la primera derivada de la familia de funciones *CT(q)* dependientes del parámetro *a*, o sea:

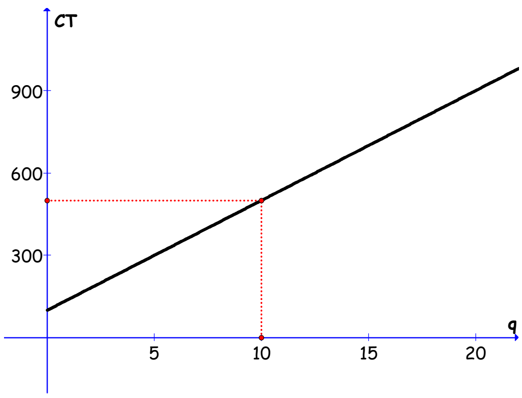
$$CT'(q) = 3a \cdot q^2 + (-60a) \cdot q + (40 + 200a)$$

y vamos a ver cuánto debe valer *a* para que sea la primera derivada positiva en el intervalo considerado. La expresión anterior para $CT'(q)$ nos da una *familia de parábolas* con un extremo local (máximo si *a* < *0*, mínimo si *a* > *0*) en *q* = *10*. La simetría de cada parábola de esta familia, $CT'(q)$, nos lleva a desarrollar una tabla como la siguiente:

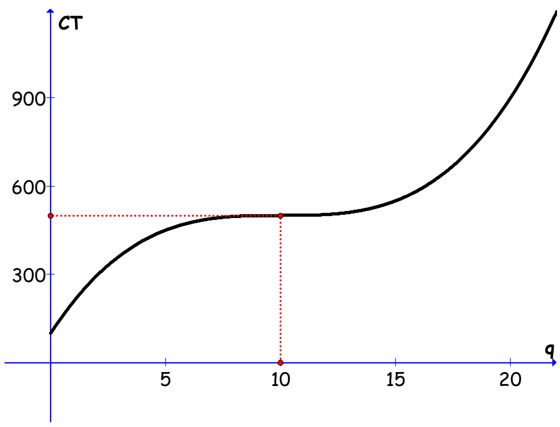
q	*CT'(q)*
0	*40 + 200a*
5	*40 - 25a*
10	*40 - 100a*
15	*40 - 25a*
20	*40 + 200a*

Entonces como además queremos que la función sea siempre creciente en el intervalo contemplado, la derivada ha de ser positiva: $40 - 100a > 0 \Rightarrow a < 0,4$. En definitiva, $0 < a < 0,4$ utilizando el hecho anterior que *a* debe ser mayor que *0*.

Podemos comprobar los valores límites: para *a* = *0* tenemos una función lineal y para *a* = *0,4* ocurre que en *q* = *10* se anula la primera y la segunda derivada luego la tangente en *q* = *10* es paralela al eje OX.



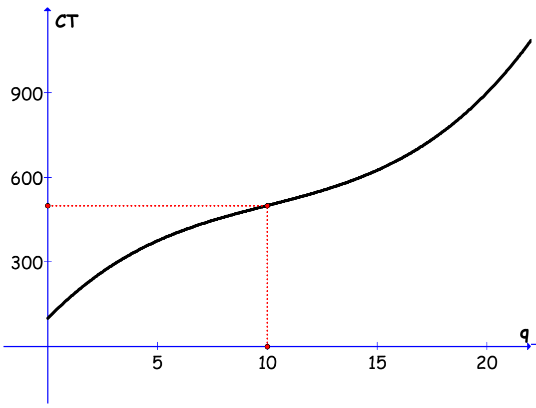
$$CT(q) = 40 \cdot q + 100$$



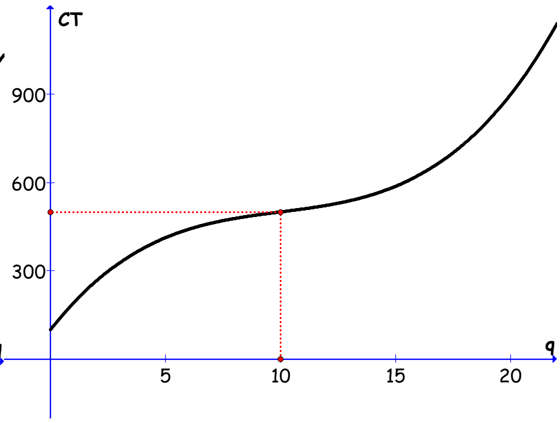
$$CT(q) = 0,4 \cdot q^3 - 12 \cdot q^2 + 120 \cdot q + 100$$

Podemos, generalizando, añadir estos dos casos como solución del problema planteado. La familia de cúbicas $CT'(q) = 3a \cdot q^2 + (-60a) \cdot q + (40 + 200a)$ cumple las condiciones de la gráfica para *a* tal que $0 \leq a \leq 0,4$.

Dos ejemplos válidos son:



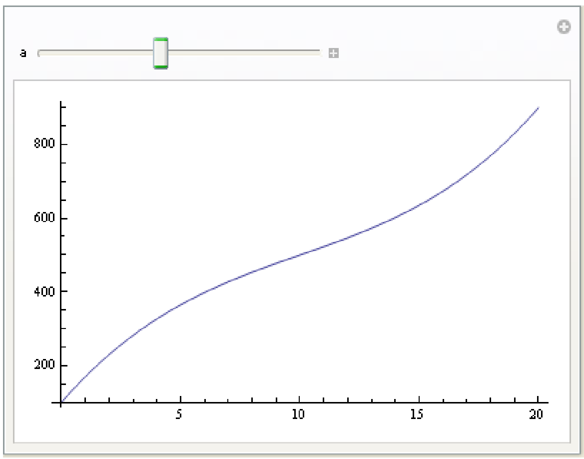
$CT(q) = 0{,}2 \cdot q^3 - 6 \cdot q^2 + 80 \cdot q + 100$



$CT(q) = 0{,}3 \cdot q^3 - 9 \cdot q^2 + 100 \cdot q + 100$

Una visión global de todas las funciones posibles se puede obtener con un programa como *Mathematica* con la orden:

Manipulate[Plot[ax^3-30ax^2+(40+200a) x+100,{x,0,20}],{a,0,0.4}]]



3) Existen varias posibilidades para avanzar en nuestro trabajo; por ejemplo, hacer variables los costes fijos y el punto de inflexión con lo que aumentaríamos el número de parámetros y la complejidad de los cálculos, etc … Otra posibilidad de continuar el trabajo sería ver qué pasaría si la función fuese un polinomio de cuarto grado.[3] Si seguimos este último camino, hacemos nuevos supuestos para que el problema sea, en principio, más asequible. Podríamos, por ejemplo, considerar polinomios incompletos como:

$$CT(q) = aq^4 + bq^2 + cq + d \text{ ó } CT(q) = aq^4 + bq^3 + cq + d$$

En el primer caso llegamos a:

$$CT(q) = a \cdot q^4 - 600a \cdot q^2 + (5000a + 40) \cdot q + 100$$

Además, para que *CT(q)* sea cóncava en *(0, 10)* y convexa en *(10, 20)* la segunda derivada ha de ser negativa en el primer intervalo y positiva en el segundo:

$$CT'(q) = 4a \cdot q^3 - 1200a \cdot q + (5000a + 40)$$

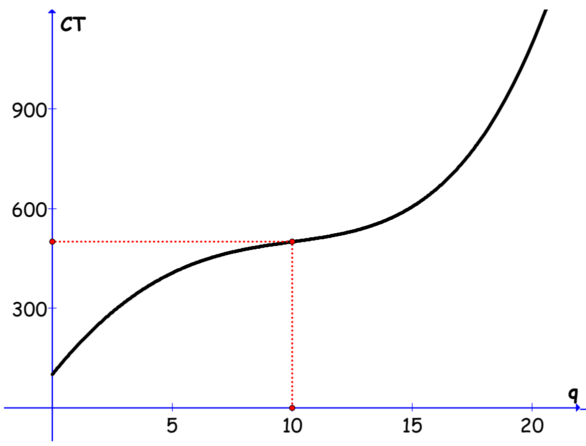
$$CT''(q) = 12a \cdot q^2 - 1200a = 12a(q^2 - 100)$$

Es inmediato que la condición anterior sólo se cumple si $a>0$. Además para que la función sea creciente en (0,20), observamos que la primera derivada toma los siguientes valores en los extremos y centro del intervalo:

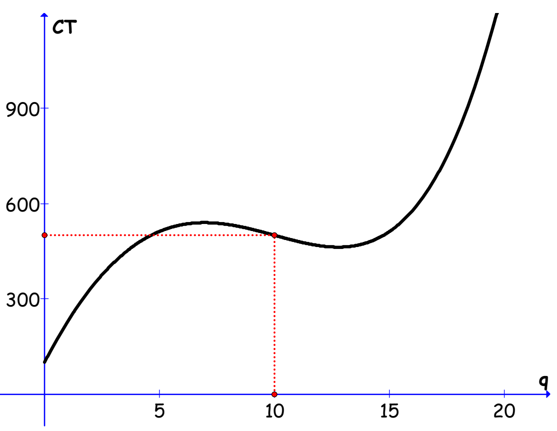
$$CT'(0) = 5000a + 40 \quad CT'(10) = -3000a + 40 \quad CT'(20) = 13000a + 40 .$$

Para $a > 0$ en *10* hay un mínimo local (ver *CT''(q)* y *CT'''(q)*) luego para cumplir las condiciones del problema basta que 0< $a < \dfrac{40}{3000} \approx 0{,}01333...$.

Tomamos, por ejemplo, $a = 0{,}01$ para ver que se cumplen las condiciones del problema y $a = 0{,}02$ para ver que no se cumplen.



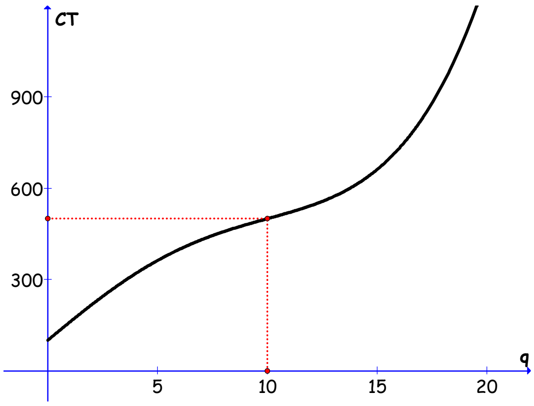
$$CT(q) = 0{,}01 \cdot q^4 - 6 \cdot q^2 + 90 \cdot q + 100$$



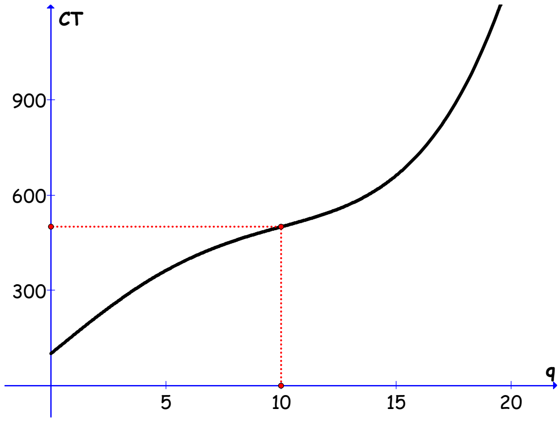
$$CT(q) = 0{,}02 \cdot q^4 - 12 \cdot q^2 + 140 \cdot q + 100$$

[3] Es muy extraño encontrar en la literatura una función de costes de grado mayor que 3.

De manera similar se puede estudiar la función $CT(q) = aq^4 + bq^3 + cq + d$, obtener $CT(q) = aq^4 - 20aq^3 + (40 + 1000a)q + 100$; y como antes se puede encontrar que a debe tomar un valor en el intervalo $0 < a < 0{,}04$ por lo que tomamos por ejemplo $a = 0{,}01$ y $a = 0{,}02$ cuyas gráficas son:



$CT(q) = 0{,}01 \cdot q^4 - 0{,}2 \cdot q^3 + 50 \cdot q + 100$



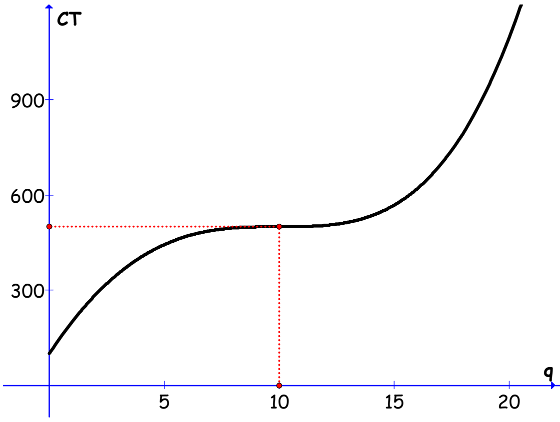
$CT(q) = 0{,}02 \cdot q^4 - 0{,}4 \cdot q^3 + 60 \cdot q + 100$

¿Hemos descubierto posibles funciones de coste de *4º* grado para proponer como ejercicio de refuerzo de los estudios de la asignatura de Matemáticas? ¿Tiene interés este resultado? ¿Será el pequeño tamaño del coeficiente de q^4 lo que justifica el hecho que no se utilicen funciones polinómicas de grado mayor que *3*? ¿Intentaremos trabajar con $CT(q) = aq^4 + bq^3 + cq^2 + dq + e$ para obtener resultados más generales?

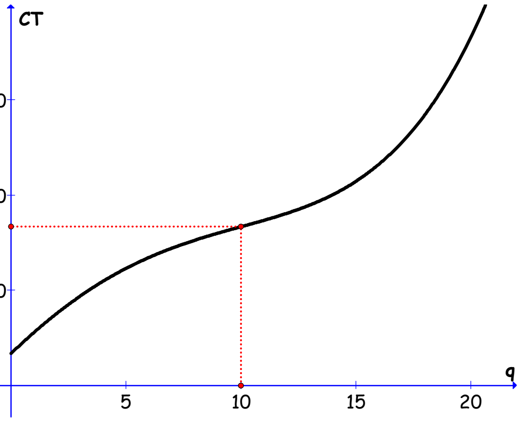
Se obtiene:

$$CT(q) = aq^4 + bq^3 - (600a + 30b)q^2 + (40 + 5000a + 200b)q + 100$$

Una condición que deben cumplir a y b para que en el intervalo $[0,20]$ se cumplan las condiciones impuestas es que $12a(q + 10) + 6b > 0$. Por ejemplo, $a = 0{,}01$ y $b = \pm 0{,}1$



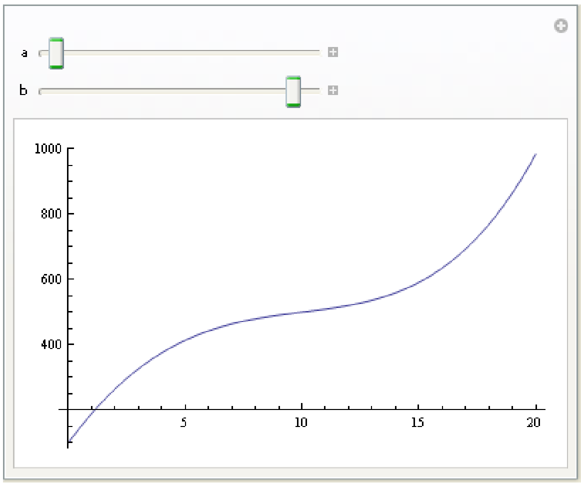
$$CT(q) = 0{,}01q^4 + 0{,}1q^3 - 9q^2 + 110q + 100$$



$$CT(q) = 0{,}01q^4 - 0{,}1q^3 - 3q^2 + 70q + 100$$

Podemos, de nuevo, obtener una visión global de las funciones válidas posibles con el programa *Mathematica*:

Manipulate[Plot[ax^4 *+ bx*^{3} *-(600a + 30b)x*^{2} *+ (40 + 5000a + 200b)x + 100, {x, 0, 20}],{a,0,0.1},{b,0,0.2}]]]*

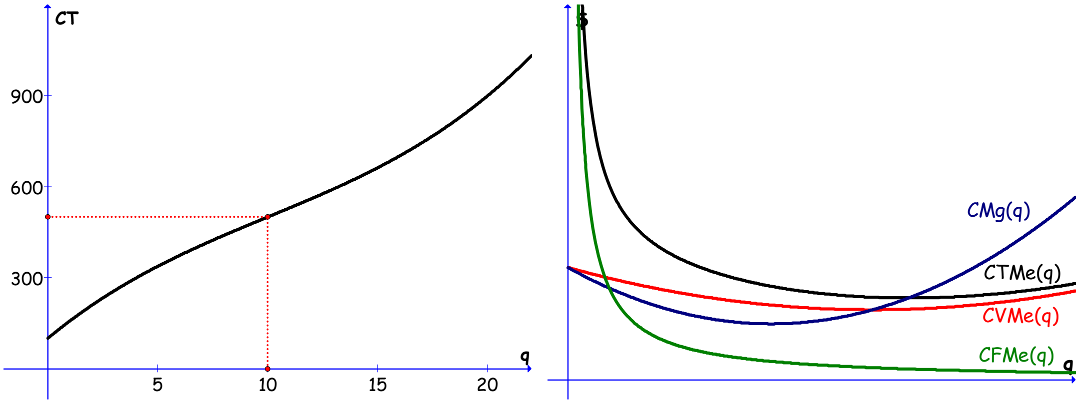


4) Deberíamos fijarnos en la gráfica de la derecha del texto de microeconomía y ver si los resultados conseguidos hasta ahora funcionan de la misma manera. Es de esperar que las cosas funcionen correctamente para:

$$CT(q) = 0{,}1 \cdot q^3 - 3 \cdot q^2 + 60 \cdot q + 100$$

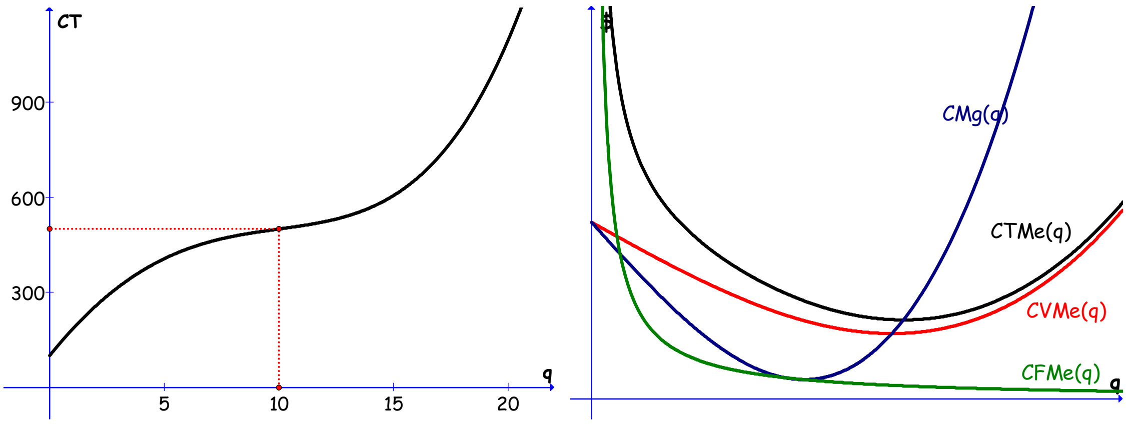
$$CMg(q) = 0{,}3 \cdot q^2 - 6 \cdot q + 60 \qquad CTMe(q) = 0{,}1 \cdot q^2 - 3 \cdot q + 60 + \frac{100}{q}$$

$$CVMe(q) = 0{,}1 \cdot q^2 - 3 \cdot q + 60 \qquad CFMe(q) = \frac{100}{q}$$

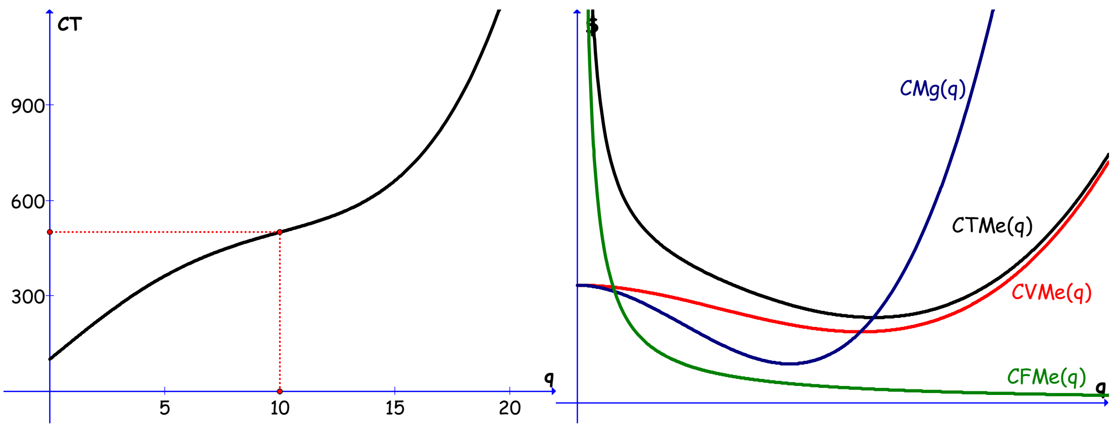


Podemos albergar dudas en el caso de las funciones de cuarto grado:

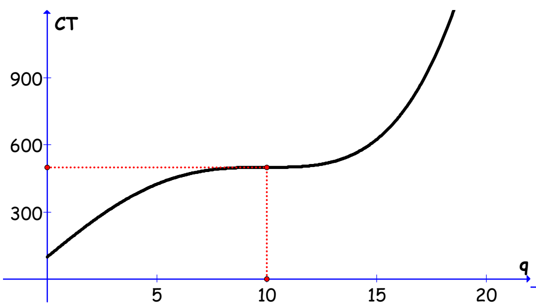
$$CT(q) = 0{,}01 \cdot q^4 - 6 \cdot q^2 + 90 \cdot q + 100$$

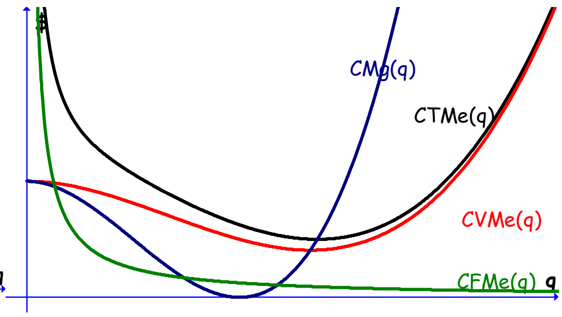


$$CT(q) = 0{,}02 \cdot q^4 - 0{,}4 \cdot q^3 + 60 \cdot q + 100$$

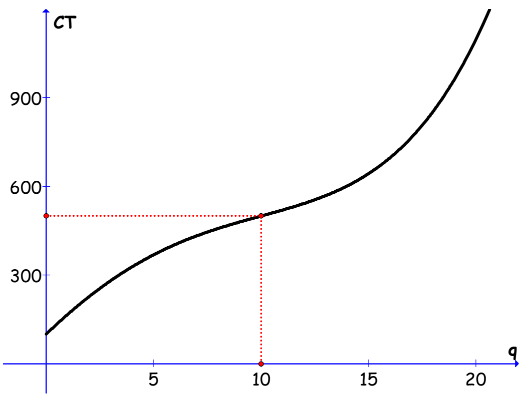


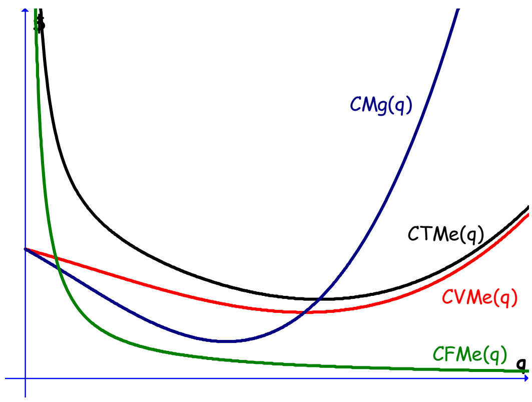
$$CT(q) = 0{,}04 \cdot q^4 - 0{,}8 \cdot q^3 + 80 \cdot q + 100$$





$$CT(q) = 0{,}01q^4 - 0{,}1q^3 - 3q^2 + 70q + 100$$

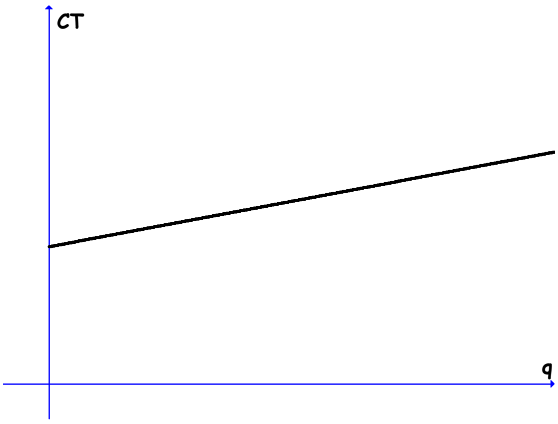


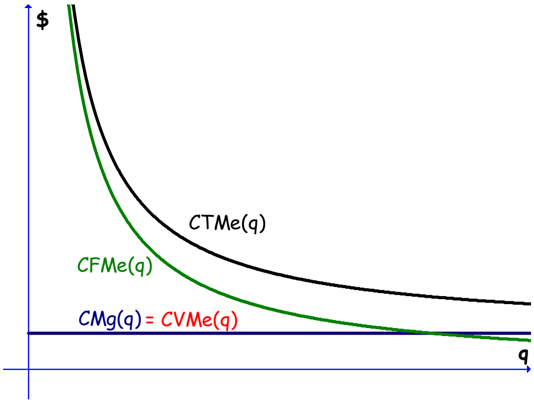


Surgen una serie de problemas de cálculo en las funciones de cuarto grado como el cálculo del mínimo del *CTMe* y el del *CMg*, comprobar que el *CTMe* y *CMg* coinciden para el valor mínimo del *CTMe*. ¿Qué pasa con el *CVMe*? Etc …

¿Podríamos investigar funciones de grado mayor? ¿Añadirán algún resultado nuevo a la interpretación económica? ¿Se comportarán siempre igual las funciones deducidas a partir de la función *CT*? Es evidente que el siguiente paso es el estudio teórico que justifica lo que hemos obtenido.

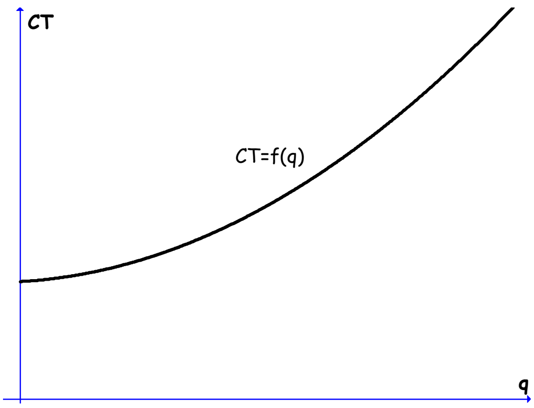
5) Por supuesto entre otras líneas que hemos aparcado, esencialmente porque ya está más estudiado, es disminuir el grado de la función de costes, y fijarnos en la segunda gráfica del tratado de microeconomía para ver el comportamiento de todas las gráficas allí establecidas. Se puede pensar en explorar en principio una función de coste total lineal *CT(q)* = *a q* + *b*. En este caso las curvas citadas se convierten en *CMg(q)* = *a*; *CTMe(q)* = *a* + *b/q*; *CVMe(q)* = *a*; *CFMe(q)* = *b/q*. Las propiedades citadas en el tratado de Microeconomía son un poco diferentes como muestran las gráficas siguientes:

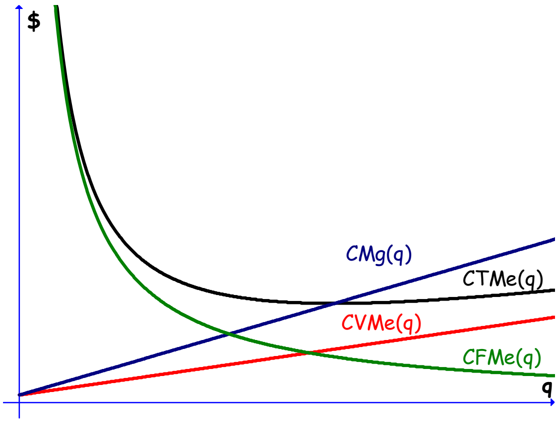




El *CMg* y el *CVMe* son iguales, independientes ambos de los costes fijos. Ocurre que el *CTMe* excede al *CMg* en una cantidad *CFMe*, los costes fijos por unidad de output. Estos últimos se diluyen, se aproximan a *0*, cuando *q* se hace muy grande (el *CTMe* se aproxima al *CMg* cuando $q \to +\infty$).

Si se considera una función de coste total cuadrática $CT(q) = aq^2 + bq + c$ se presentan novedades sobre el caso anterior; por ejemplo el *CTMe* tiene un mínimo que se puede calcular con facilidad.





Se comprueba que el *CTMe* y *CMg* coinciden para el valor mínimo del *CTMe*; etc …

4. CONCLUSIONES

Esta es una experiencia pensada como una forma de trabajo en el aula (Una idea similar aplicada al tránsito Secundaria/Bachillerato puede verse en Ruiz, Bosch, Gascón 2007). El interés de la experiencia se evalúa por tanto por lo que aporte o pueda aportar en ese sentido. ¿Ha supuesto alguna diferencia para nuestros alumnos hacerla respecto a la forma más tradicional de trabajo? ¿Han notado algún enriquecimiento respecto a sus conocimientos matemáticos y/o económicos? ¿Esta forma de trabajo se aproxima a la forma en que los economistas utilizan las matemáticas?

Como ya dijimos en la introducción se trata de un proyecto de trabajo con todas las posibles modificaciones que se puedan hacer en su puesta a punto y desarrollo: cambiar las restricciones, convertirlas en nuevos parámetros, etc…

Una evaluación positiva de la experiencia permitiría abrir probablemente nuevas posibilidades en el desarrollo de la asignatura y en general en las relaciones "*docentes*" de la Matemática y la Economía.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue M. (2003), *Crucial Questions for Contemporary Research in Education*. In Holton D. et al. The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study, Kluwer Academic Publishers, pp. 207-230.
- Chevallard, Y. (2004): *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire*, 3e Université d'été Animath, Saint-Flour (Cantal), 22-27 août 2004.
- Dorier, J.L., Sierpinska, A. (2003), *Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra*. In Holton D. et al. The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study, Kluwer Academic Publishers, pp. 151-176.
- Henderson, J.M., Quandt R.E., (1979) *Teoría Microeconomica*. Editorial Ariel.
- Hoy M., Livernois J., McKenna C., Ress R., Stengos T. (2001) *Mathematics for Economics*. The MIT Press.

- Gascón, J. (1999): *Fenómenos y problemas en didáctica de las matemática*. En Ortega T. (ed.) Actas III Simposio de la SEIEM Universidad de Valladolid., 129-150
- Renshaw, G. (2005), "*Maths for Economics*", Oxford University Press.
- Ruiz, N., Bosch, M., Gascón, J. (2007): *La modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris*. En Ruiz-Higueras L., Estepa A., García F. J. (eds.) Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) Universidad de Jaen. 2007.
- Simon C.P., Blume L. (1994), "*Mathematics for Economists*". W. W. Norton & Company.
- Turkington, D. A. (2007), "*Mathematical Tools for Economics*". Blackwell Publishing.