Sobre los Modelos Matemático–Financieros para la Valoración de los Derivados Financieros

Villalón, Julio G. y Martínez Barbeito, J.

RESUMEN

Durante los últimos 30 años los mercados financieros se han desarrollado enormemente. La introducción de los derivados financieros tales como opciones y futuros sobre subyacentes (títulos, obligaciones, divisas, etc.) ha conducido a una nueva calidad de garantización de los riesgos financieros. La valoración de los instrumentos financieros se basa en una teoría matemática avanzada, llamada "cálculo estocástico Itô". El modelo básico asociado a un precio aleatorio se describe mediante un movimiento Browniano y ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, la valoración de una opción call Europea mediante el modelo Black, Scholes y Merton de 1973 fue un interesante avance en la comprensión y valoración de los derivados financieros. Su enfoque ha llegado a ser la base para las matemáticas financieras modernas que utiliza instrumentos avanzados tales como la "teoría de las martingalas y el control estocástico" para obtener soluciones a la valoración de un amplio y creciente número de derivados.

Palabras clave: Derivados financieros; Cálculo Estocástico Itô; movimiento Browniano; martingalas.

Área temática: Matemáticas Financieras y Actuariales

ABSTRACT

Over the last therteen years the financial markets have gone through an enormous development. The introduction of financial derivatives such as options and futures on underlings (stocks, bonds, currencies, etc.) has led to a new quality of the securitization of financial risks. The pricing of this financial instruments is based on a advanced mathematical theory, called Itô stochastic calculus. The basic model for an uncertain price is described by Brownian motion and related defferential equations. For example, the pricing of a European call option by Black, Scholes and Merton in 1973 was a breakthrough in the understanding become and valuing of financial derivatives. Their approach has become the firm basis for modern financial mathematics which uses advanced tools such as "martingale theory and stochastic control" to find adequate solutions to the pricing of a world-wide enormously increasing number of derivatives.

Keywords: Financial derivatives; Itô Stochastic Calculus; Brownian movement; martingale.

Thematic Area: Matematics Financial and Actuaries

1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas financieras modernas han llegado a tener uno de los más recientes éxitos de las matemáticas y de la teoría de la probabilidad. En contraste con muchos logros matemáticos que solamente han sido conocidos por los especialistas, el modelo de valoración Black-Scholes (1973) ha logrado popularidad no solamente entre prácticos en financiera. Su fama ha atraído la atención de economistas, físicos, económetras, ingenieros de sistemas, estadísticos, etc.

Los modelos matemáticos se han utilizado en economía durante mucho tiempo. Por nuestra parte, haremos referencia al enfoque iniciado por F. Black (1938-1995), M. S. Scholes (1941-) y R. C. Merton (1944-) que fue tan novedoso que Scholes y Merton fueron galardonados con el premio Nóbel de Economía en 1997, dos años después de la muerte de Fisher Black.

En 1973 se empezaron a negociar en la Bolsa de Chicago las llamadas "opciones", "futuros" y otros "derivados financieros". Black, Scholes y Merton enfocaron el problema de la valoración de opciones de una forma física. Comenzaron considerando un modelo adecuado para valorar un activo arriesgado. La investigación (estadística, econométrica) empírica ha mostrado que los cambios de los precios en el futuro son difícilmente predecibles mediante modelos matemáticos. En la bibliografía económica este hecho se le conoce con el nombre de "hipótesis de camino aleatorio". Un camino aleatorio está definido en instantes temporales equidistantes discretos. Sin embargo, en financiera, estamos principalmente interesados en modelar los precios en cada momento. Denominamos a este modelo tiempo continuo**.** El "movimiento Browniano" es análogo a un camino aleatorio en tiempo continuo. Es un modelo físico asociado al movimiento de una pequeña partícula suspendida en un líquido estudiado en la literatura física desde comienzos del siglo XX. Uno de los famosos contribuidores a esta teoría fue Albert Einstein (1879-1955). Ahora bien, antes de Einstein, un joven matemático francés llamado Louis Bachelier (1870-1946) propuso en su tesis doctoral "Teoría de la Especulación" (1900) el movimiento Browniano como modelo asociado a los precios especulativos. Una de las imperfecciones de su modelo fue que el movimiento Browniano puede tomar valores negativos y ésta fue una de las razones por las que el modelo de Louis Bachelier fue olvidado durante largo tiempo. Solamente en 1960 el maestro de la economía moderna Paul S. Samuelson (1915-2009), premio Nobel de Economía en 1970, propagó la exponencial del movimiento Browniano (llamado "movimiento Browniano geométrico") para modelar los precios que están sujetos a incertidumbre.

En el trabajo de Black, Scholes y Merton (1973), el movimiento Browniano geométrico es el modelo matemático básico asociado a los movimientos de los precios. Además, observaron que el movimiento Browniano está íntimamente ligado a la teoría matemática del "Cálculo Estocástico de Itô", llamado así porque fue el matemático japonés Kiyosi Itô (1915-2008) quien desarrolló esta teoría en 1940. El cálculo clásico consta de la diferenciación e integración de funciones "suaves". En contraste con la situación posterior, las trayectorias del movimiento Browniano son funciones extremadamente irregulares (no-diferenciables) y, por tanto, el cálculo clásico no era el instrumento adecuado. Aunque el Cálculo Itô ha sido conocido y utilizado por algunos físicos, ingenieros y otros durante algún tiempo, éste no ha llegado a ser muy popular a parte de algunos grupos de especialistas. Sin embargo, en la actualidad todo el que trabaja (teórica o prácticamente) en financiera conoce las reglas básicas del Cálculo Itô.

Ahora bien, la principal contribución de los padres del modelo de valoración de opciones fue una idea completamente nueva por parte de la economía. Arguyeron que el vendedor de una opción call Europea (generalmente una institución financiera) no debería esperar pasivamente hasta el momento del vencimiento. Por el contrario, si fuera una persona racional debería invertir una cierta cantidad de dinero en el mismo título (por ejemplo, Telefónica) y en un "activo sin riesgo" (por ejemplo, una cuenta de ahorro a tanto de interés fijo) de acuerdo con una estrategia de negociación dinámica tal que el valor de la cartera al vencimiento fuera exactamente el valor de la opción al vencimiento: cero si el precio de la opción estuviera por debajo del precio del ejercicio o, en otro caso, la diferencia positiva entre la acción y el precio de ejercicio. Una estrategia de negociación que reproduzca el valor de la opción al vencimiento se llama "cobertura". La existencia de tal cobertura es una justificación del precio de una opción, pero es importante en sí mismo para la práctica financiera. La cantidad de dinero que el vendedor de la opción tiene que invertir para su cobertura debería se el precio equitativo para la opción. Además, Black, Scholes y Merton arguyeron que, si la opción se vendiera a un precio distinto del precio Black-Scholes, una persona racional podría utilizar esta situación para obtener beneficios ilimitados sin correr ningún riesgo (llamado "arbitraje"). El precio Black-Scholes, expresado en la fórmula Black-Scholes, debido a su persuasión racional, llegó a tener un gran éxito y fue bien aceptado por los prácticos en los mercados financieros.

A pesar de algunas imperfecciones del modelo matemático subyacente, el enfoque Black-Scholes fue un punto de partida para valorar otras clases de derivados financieros. Por ejemplo, en la práctica las calls Europeas son menos frecuentemente negociadas que las opciones que pueden ejercitarse en cualquier momento antes o en el momento del vencimiento (las opciones Americanas). Además, una opción, futuro, etc., no tiene que necesariamente estar ligada a un precio de una opción, sino a un índice de títulos compuesto tal como el Dow Jones, etc, o a precios de obligaciones, a los tantos de cambio extranjeros, o a cualquier otro subyacente que está ligado a la incertidumbre. El fin básico de un derivado financiero es la "garantización de los riesgos"; el enfoque Black-Scholes permite al vendedor y al comprador de un derivado adecuadamente valorado cubrir riesgos futuros debido a la incertidumbre de los movimientos de los precios.

La gran variedad de productos financieros que han sido creados por las instituciones financieras ha dado lugar a un cambio en las matemáticas y en particular para los especialistas del cálculo Itô. Puesto que a finales de 1970, han dinamizado el desarrollo de las matemáticas financieras haciendo uso de los instrumentos más avanzados, en el análisis funcional particular, la teoría de martingalas, control estocástico, ecuaciones diferenciales parciales. Por ahora, las matemáticas financieras es una teoría bien establecida con un gran futuro que se enseña en los departamentos de matemáticas y economía en todo el mundo.

Evidentemente, el mundo Black-Scholes es una idealización del mundo financiero real. Por ejemplo, la hipótesis matemática del movimiento Browniano Geométrico como modelo asociado a un precio arriesgado sabemos está en contradicción con los datos de los precios de la vida real. Una vez el mercado de títulos está afectado por shocks (debido a acontecimientos políticos, recesiones, ráfagas de actividad económica, etc.) que producen saltos inesperados de los precios. Tal comportamiento no puede acontecer en el mundo de Black-Scholes. En los últimos 20 años varios acontecimientos muestran las limitaciones del modelo. En octubre de 1987 (lunes negro) un gran crash afectó a la Bolsa de Nueva York causando pérdidas financieras de varios billones de dólares. Aunque esto no tuvo un mayor impacto en el mercado, el crash del Banco Barings produjo un fallo mundial de que los derivados financieros pueden ser muy peligrosos cuando se manejan por una dirección poco cautelosa. Recientemente, en octubre de 1998, la confusión en torno a la Dirección del Capital a Largo Plazo (DCLP), un fondo de cobertura vale cientos de billones de dólares, con Scholes y Merton como miembros fundadores, proporcionaron las razones para tener menos confianza en unas fórmulas matemáticas (aparentemente perfectas). Los acontecimientos en torno a la DCLP causaron en una semana un 13,7% de pérdida del dólar frente al yen japonés.

Las fórmulas matemáticas pueden ayudarnos a tomar decisiones racionales en el campo de las operaciones financieras. Sin embargo, los ejemplos anteriores muestran evidentemente que demasiada confianza en las fórmulas puede dar lugar a decisiones erróneas de la dirección; pueden conducir a consecuencias fatales no solamente para una compañía particular, sino para las economías nacionales. En vista de las enormes cantidades de dinero invertidas en derivados realizada en la década de los noventa la industria financiera trató de facilitar la medida del riesgo. En 1992, el llamado Comité de Basilea del Banco para los Establecimientos Internacionales (que representa a 27 miembros europeos más Estados Unidos, Canadá, Japón, Austria y Sud-África) presentó propuestas para estimar el riesgo del mercado y definir los requisitos de capital resultantes para ejecutarse en el sector bancario. La unión Europea aprobó una directiva, efectiva en enero de 1996, que ordena a los bancos y empresas de inversión establecer el capital al lado para cubrir los riesgos de mercado. En Estados Unidos los títulos y las comisiones de cambio cumplen una función reguladora similar. La medición y estimación de los riesgos financieros en sus diversas formas han llegado a ser otro cambio en las matemáticas, en particular la estadística. Basados en modelos probabilísticos, se han desarrollado varios métodos estadísticos para cuantificar los riesgos. Entre otros, el Valor en Riesgo (VAR) ha llegado a ser el más popular. Las compañías tales como "Risk Metrics" se han especializado en informar a la industria financiera cómo medir y estimar los riesgos y a las instituciones financieras de control regulador del gobierno cómo tienen que satisfacer ciertos riesgos estándar.

Un interesante nuevo desarrollo es el nacimiento del seguro bancario: comprobamos una convergencia del pensamiento financiero y actuarial. Un interesante cliché es la Transferencia del Riesgo Alternativo (TRA). Como ejemplos, las obligaciones de las catástrofes; el pago del cupón (y posiblemente el reembolso principal), es aleatorio respecto al acaecimiento o no del suceso catastrófico. Pensemos, por ejemplo, en los últimos temblores de tierra o huracanes.

2. LA VALORACIÓN MATEMÁTICA DE LOS DERIVADOS FINANCIEROS

2.1. El Enfoque Black, Scholes y Merton

Sea P_t el precio de un activo arriesgado, por ejemplo, el precio de una acción de un determinado título, descrito por medio de un movimiento Browniano Geométrico:

$$P_t = P_0 \cdot e^{\left(\sigma B_t + \mu \cdot t - 0.5 \cdot \sigma^2 t\right)},$$

donde $\left(B_t, t \geq 0\right)$ representa el movimiento Browniano (un proceso estocástico con incrementos estacionarios independientes, trayectorias muestrales continuas y tal que B_t tiene una distribución normal con media cero y varianza t; μ es el "tanto de rendimiento medio" y $\sigma > 0$ es la "volatilidad". En particular, para t fijado, P_t tiene una distribución lognormal. Cuanto mayor sea σ más resistentes serán las oscilaciones de P_t en torno a su media. Por tanto, σ describe el grado de variabilidad del precio. Alternativamente, P_t satisface la "Ecuación Diferencial Estocástica (EDE) de Itô":

$$dP_t = P_t \cdot \left[\mu_t \cdot dt - \sigma \cdot dB_t\right].$$

La anterior (EDE) se tiene que interpretar como la "ecuación integral de Itô":

$$P_t = P_0 + \mu_t \cdot \int_0^1 P_s \, ds + \sigma \cdot \int_0^1 P_s \, dB_s,$$

donde la primera integral es una integral Riemann ordinaria, la segunda una integral de Itô. Esto significa que conserva el límite de las sumas

$$\int_0^1 P_s \, dB_s = \sum_i P_{t_{i-1}} \cdot \left[B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \right], \tag{1}$$

a lo largo de todas las particiones $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n$ del intervalo [0,t] con máx. $(t_i - t_{i-1}) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Puesto que las trayectorias del movimiento Browniano no son de variación acotada, diferente de la integral Riemann-Stietjes, el límite "no puede tomarse a lo largo de la trayectoria Browniana fijada", sino en sentido media cuadrática. Por la definición de la integral de Itô es crucial que las sumas del segundo miembro de la (1) tienen que constituirse de una forma no-anticipada, es decir, tomando el integrando al comienzo de los intervalos temporales y suponiendo que no depende de los valores futuros del movimiento Browniano geométrico, es decir, valores futuros del precio.

El valor β_t de un activo sin riesgo (una "obligación en efectivo" tal como una cuenta de ahorros) con "tanto de interés sin riesgo" $r > 0$ evoluciona de acuerdo con

$$\beta_t = \beta_0 \cdot e^{rt}.$$

En el momento t, la cartera consta de a_t partes en títulos y b_t partes en obligaciones. (a_t, b_t) pueden tomar cualquier valor real; un valor negativo de a_t corresponde a ventas en descubierto del título, un negativo b_t pedir prestado dinero al tanto de interés sin riesgo r). Por tanto, la cartera tiene el valor

$$V_t = a_t P_t + b_t \beta_t$$

Una hipótesis crucial es que la estrategia de negociación (a_t, b_t) es "autofinanciera":

$$dV_t = a_t dP_t + b_t d\beta_t, \tag{2}$$

es decir, los cambios de riqueza son debidos solamente a los cambios en los precios. La ecuación posterior tiene que ser de nuevo interpretada en el sentido de Itô:

$$V_t = V_0 + \int_0^t a_s \, dP_s + \int_0^t b_s \, d\beta_s,$$

donde la primera integral está definida de forma similar a la (1).

En el momento del vencimiento T, el valor de una "opción call Europea" con precio de ejercicio K viene dado por

$$(P_T - K)_+ = \max(0, P_T - K),$$

es decir, el comprador de la opción gana $\left(P_T - K\right)_+$. Para simplificidad, omitimos el pago de la prima para la opción. El comprador de la "opción put Europea" tiene el derecho (pero no la obligación) de vender una acción del título al precio de ejercicio K al vencimiento, es decir, gana $\left(K - P_T\right)_+$ u.m. El valor final de una opción también puede estar basado en la trayectoria Browniana total. Por ejemplo, una "opción call Asiática" da derecho a un pago de $\left(T^{-1} \cdot \int_0^T P_s \, d_s - K\right)_+$ u.m. Tal contrato puede típicamente usarse en el mercado petrolífero. El valor de un derivado financiero se llama "obligación aleatoria". Es una variable aleatoria H que depende del desarrollo del precio P_t hasta el vencimiento.

La forma clásica de valorar una reclamación aleatoria es suponer que V_t puede representarse como una función suave de P_t y t:

$$V_t = U\left(T - t, P_r\right),$$

tal que $V_t = U\left(0, P_T\right) = H$, es decir, la obligación aleatoria depende del precio al vencimiento. Una aplicación de la regla de la cadena del cálculo Itô, la "fórmula Itô" o el "Lema Itô", combinado con la propiedad auto-financiadora (2) conduce a la ecuación diferencial parcial

$$U_t\left(t, x\right) = 0.5 \cdot \sigma^2 \cdot x^2 \cdot U_{xx}\left(t, x\right) + r \cdot x \cdot U_x\left(t, x\right) - r \cdot U\left(t, x\right),$$

con $U(0,x) = H,\ x > 0,\ t \in [0,T]$.

Para el caso de una opción call Europea, es decir, $H = (P_T - K)_+$, la última ecuación tiene la solución

$$U(t,x) = x \cdot \Phi\left[g(t,x)\right] - K \cdot e^{-rt} \cdot \Phi\left[h(t,x)\right],$$

donde,

$$g(t,x) = \left[\sigma^2 t\right]^{-0.5} \cdot \left[\log(x/K) + \left(r + 0.5 \cdot \sigma^2\right) \cdot t\right].$$

$$h(t,x) = g(t,x) - \sigma \cdot t^{0.5},$$

y $\Phi(x) = [2\Pi]^{-0.5} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-0.5 \cdot y^2} dy$ es la función de distribución normal típica.

El precio Black-Scholes de la reclamación aleatoria $(P_T - K)_+$ es el valor de la cartera en el momento cero, es decir,

$$V_0 = U(T,P_0) = P_0 \cdot \Phi\left[g(T,P_0)\right] - K \cdot e^{-rT} \cdot \Phi\left[h(T,P_0)\right]. \tag{3}$$

Una estrategia auto-financiadora (a_t, b_t), una "cobertura" se puede también deducir de la función $U(t,x)$.

2.2. La valoración mediante cambios de medida

El enfoque anterior es análogo al enfoque físico que necesita describir el movimiento de un cierto objeto que satisface las ecuaciones diferenciales adecuadas. La nueva dimensión de este enfoque es la incertidumbre de la trayectoria del movimiento del precio. Sin embargo, existe también un enfoque puramente probabilista para el problema de valoración. Esto fue tempranamente reconocido por Davis Kreps, Michel Harrison y Stan Pliska, quienes indicaron la relación con la teoría de las martingalas. Su enfoque tiene la ventaja de que la reclamación aleatoria H puede depender del movimiento del precio total hasta el momento T, incluyendo toda clase de "opciones exóticas".

Observaron que, de acuerdo con la representación del Teorema de Itô, "toda" derivada actualizada del movimiento Browniano geométrico tiene la representación integral estocástica:

$$e^{-rT} \cdot H = H_0 + \int_0^T a_t^{(H)} \, d\left[e^{-rt} \cdot P_t\right], \tag{4}$$

para cierta constante H_0 y un proceso $\left(a_t^{(H)}\right)$ que en el momento t sólo depende del movimiento de los precios hasta dicho momento. Como próximo paso, se observa que el precio actualizado $\left(e^{-rt} \cdot P_t\right)$ se puede transformar en una martingala, dado un cambio en la medida de la probabilidad subyacente.

La noción de "martingala" se utiliza en teoría de la probabilidad para describir un "juego equitativo". Esto significa que suponemos el juego se juega de forma continua con valor M_t en el momento t con la información $\mathcal{F}_t$ respecto al juego hasta el momento t (En teoría de la probabilidad lo último se describe mediante una familia creciente de $\sigma-$álgebras, llamada "filtración"). El juego es "equitativo" si la esperanza matemática de los valores futuros M_{t+h}, $h > 0$, proporcionan la información $\mathcal{F}_t$ es el valor del juego en el momento t: M_t. Esto significa que la mejor predicción (en el sentido media cuadrática) de los valores futuros M_{t+h} del juego es el valor actual M_t. En términos probabilistas esto se escribe como la esperanza condicionada $E\left(M_{t+h} \mid F_t\right) = M_t$.

En realidad, la última esperanza se toma según una medida de probabilidad "dada” P. En el caso del movimiento Browniano geométrico una elección natural de P es la "medida Wiener". Según esta medida $\left(e^{-rt} \cdot P_t\right)$ "no" es una martingala con respecto a la filtración $\mathcal{F}_t$ a "menos" que el tanto medio de rendimiento μ coincida con el tanto de interés r. Sin embargo, lo último puede lograrse si se "cambia" la distribución P por una medida de probabilidad unívocamente determinada equivalente Q tal que el movimiento Browniano con tendencia $\tilde{B}_t = B_t + [\mu - r] \cdot \sigma^{-t} \cdot t$ se convierta en el movimiento Browniano típico. Este cambio de medida se justifica mediante la transformación Girsanov. Según Q, el proceso $\left(e^{-rt} \cdot P_t\right)$ tiene una representación integral Itô con respecto al movimiento Browniano $\left(\tilde{B}_t\right)$, en particular es una martingala y, por tanto, Q obtuvo el nombre de "medida martingala". Según Q, la integral estocástica en la (4) tiene media cero y, por tanto, se obtiene una expresión simple para el precio equitativo H_0 de la reclamación aleatoria H en el momento cero:

$$H_0 = E_Q\left(e^{-rT} \cdot H\right),$$

donde $E_Q(x)$ es la esperanza de la variable aleatoria x con respecto a la medida de probabilidad Q. En el caso de una opción call Europea con $H = \left(P_T - K\right)_+$, la última fórmula se puede valorar según la expresión Black-Scholes (3).

En el caso anterior (Black-Scholes): hay un precio único para cada reclamación aleatoria H (la Q anterior es única), H puede perfectamente compensarse o reproducirse. La realidad frecuentemente no es tan adecuada: hay "costes de transacción", "carteras condicionadas" los procesos de los precios típicamente presentan "saltos aleatorios", etc. En todos estos y muchos más casos, la valoración (es decir Q) no es única y H no puede ser perfectamente compensada. Nociones como la varianza-mínima, cuantila o supercobertura completamente imposible para reproducir perfectamente la H en tales mercados.

2.3. Ejemplo de "Fondo de Garantía"

Se trata de un nuevo producto financiero que combina las ventajas de los productos tradicionales, obligaciones y fondos de inversión. Éste ofrece a un inversor la posibilidad de participar en la evolución de cierto índice del mercado de títulos llamado IBEX, limitando el riesgo de descenso mediante un pago mínimo previamente fijado, la garantía. Por tanto, si los mercados de títulos se comportan bien, las ganancias de una inversión en un fondo de garantía será considerablemente más altas que los resultados obtenidos de una inversión en obligaciones sin riesgo, Por otra parte, en el caso de una evolución del mercado de un título sea desfavorable, el inversor puede estar seguro de recibir al menos la garantía. Véase Figura 1.

Por tanto, un Fondo de Garantía, proporciona una nueva oportunidad de inversión que se puede considerar como un suplemento atractivo para las provisiones de jubilación de un inversor privado.

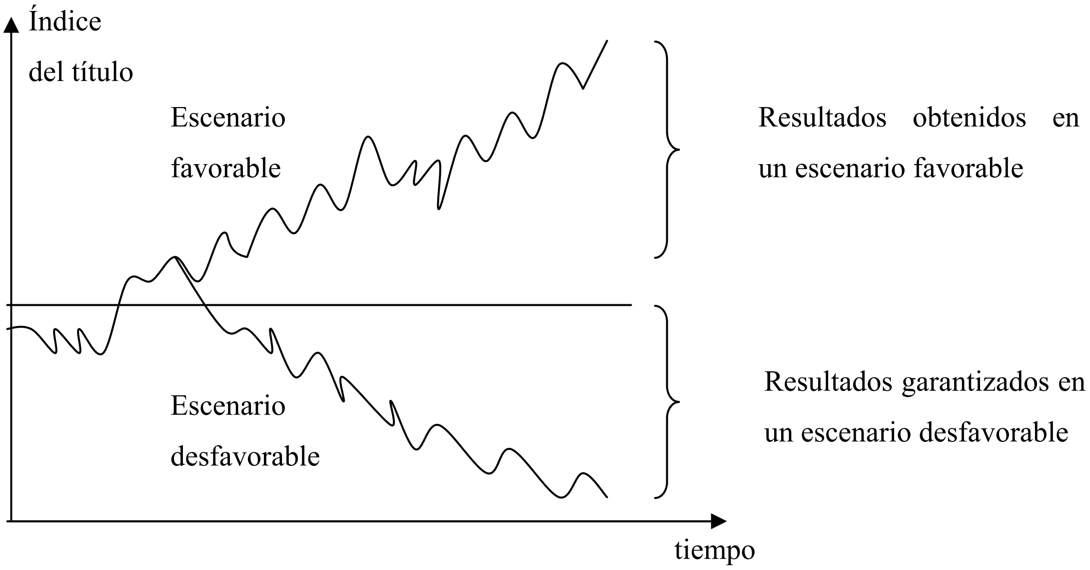

Figura 1: Resultados de un Fondo de Garantía en dos escenarios diferentes del mercado de títulos

Hay una variedad de productos financieros más complejos que proporcionan oportunidades adecuadas no solamente para particulares sino también para inversores institucionales. La posible complejidad de estos productos reclama nuevas técnicas y conceptos para controlar el riesgo. Por ejemplo, un Banco que ha vendido un gran número de acciones en fondos de garantía, se enfrenta con el riesgo de que un mercado de títulos que sube conducirá a un gran incremento del pago total de sus obligaciones. Por otra parte, cuando los mercados de títulos bajan, el Banco necesita pagar la garantía. Entonces, la cuestión será la siguiente ¿cómo puede asegurarse el Banco para hacer frente a ambas situaciones al mismo tiempo? La contestación económica será la "cobertura": el Banco debe invertir parte de los derechos adquiridos en los títulos que subyacen en los fondos de garantía mediante un "seguro" frente al riesgo de que suban los mercados de los títulos y debería invertir las comisiones restantes en obligaciones sin riesgo para asegurar el pago garantizado. Esto plantea el problema al Banco de obtener el balance óptimo entre las inversiones sin riesgo e inversiones en títulos con riesgo, es decir, determinar este balance mediante los métodos matemático-financieros avanzados. La introducción de estos métodos la iniciaron F. Black y M. Scholes (1973) y R. Merton (1969). Sólamente a M. Scholes y R. Merton se les concedió el premio Nóbel de Economía en 1997 ya que F. Black había fallecido en 1995.

Otro ejemplo sencillo es, un modelo de valoración de opciones binomial en el que hay dos momentos 0 y 1 y se trata de deducir el precio de una opción call en el momento 0 con precio de ejercicio K que vence en el momento 1.

En esta simple economía, suponemos que existen otros dos títulos financieros: una obligación sin riesgo que paga un tanto de rendimiento r (por ejemplo, si la obligación produce un rendimiento del 5%, entonces r=1,05) y un título arriesgado con precio en el momento 0 de P_0 y en el momento 1 el precio P_1 que suponemos es una variable aleatoria Bernouilli:

$$P_1 = \begin{cases} P_0\,\text{up(u) con prob. } \pi \\ P_0\,\text{down(d) con prob. } 1-\pi, \end{cases} \qquad (1')$$

donde 0 < d < u. Puesto que el precio del título toma solamente dos valores en el momento 1, el precio de la opción toma solamente dos valores en el momento 1 también:

$$C_1 = \begin{cases} C_u \equiv \text{Max } [uP_0 - K, 0] \text{ con prob. } \pi \\ C_d \equiv \text{Max } [P_0 d - K, 0] \text{ con prob. } 1-\pi. \end{cases} \qquad (2')$$

Dada la estructura simple que hemos supuesto hasta aquí, ¿es posible determinar unívocamente el valor C_0 de la opción en el momento 0? Parece excepcionalmente, puesto que no hemos dicho nada respecto a las preferencias de las inversiones ni la oferta de la seguridad. Sin embargo, C_0 es en realidad completa, excepcionalmente determinado y es una función de K, r, P_0 , d y u. Sorprendentemente C_0 es una función de π !

Para ver cómo y por qué, consideremos construir una cartera de Δ acciones del título y B u.m. de obligaciones en el momento 0 a un coste total de $X_0 = P_0\,\Delta + B$. El resultado X_1 de esta cartera en el momento 1 es simplemente:

$$X_1 = \begin{cases} uP_o\,\Delta + rB \ \text{ con prob. } \pi \\ dP_o\,\Delta + rB \ \text{ con prob. } 1-\pi. \end{cases} \tag{3'}$$

Ahora, elegimos Δ y B de modo que las dos ecuaciones lineales siguientes se satisfagan simultáneamente:

$$\begin{cases} uP_o\,\Delta + rB = C_u \\ dP_o\,\Delta + rB = C_{d,} \end{cases} \tag{4'}$$

lo cual es siempre factible ya que las dos ecuaciones son linealmente independientes. Esto se asegura si $u \neq d$, en cuyo caso tenemos:

$$\Delta^* = \frac{C_u - C_d}{(u-d)P_0}, \qquad B^* = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r} \tag{5'}$$

Puesto que el resultado de la cartera X_1 según la (5) es idéntico al resultado de la opción call C_1 en ambos estados el coste total X_0 de la cartera debe ser igual al precio de la opción $C_{0,}$ en otro caso, es posible construir un "arbitraje", una estrategia de negociación que proporcione beneficios sin riesgo. Por ejemplo, supongamos que $X_0>C_0$. Comprando la opción y vendiendo la cartera en el momento 0, se genera una entrada de $X_0 - C_0$ y en el momento 1 la obligación X_1 creada por la venta de la cartera es exactamente compensada por el resultado de la opción C_1. Un argumento similar excluye el caso en el que $X_0>C_0$.

Por tanto, tenemos la ecuación de valoración siguiente:

$$C_0 = P_0\Delta^* + B^* = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{r-d}{u-d}\right)C_u + \left(\frac{u-r}{u-d}\right)C_d\right] = \frac{1}{r}\left[\pi^* C_u + (1-\pi^*)C_d\right], \tag{6'}$$

$$\pi^* \equiv \frac{r-d}{u-d}. \tag{7'}$$

Esta ecuación de valoración es interesante en varios aspectos. En primer lugar, no parece depender de las aptitudes hacia el riesgo de los inversores, sino meramente requiere que los inversores prefieran más a menos dinero (en cuyo caso las oportunidades de arbitraje son excluidas). En segundo lugar, en ninguna parte de la (7) aparece la probabilidad π que implique que dos inversores con gustos muy diferentes respecto a π, no obstante, se pongan de acuerdo en el precio C_0 de la opción.

Finalmente, la (7) muestra que C_0 puede considerarse como un valor actual esperado del resultado de la opción – en otras palabras, una teoría del "primer momento" pero donde la esperanza se calcula no con respecto a la probabilidad original π, sino con respecto a la "pseudo-probabilidad" π^*, frecuentemente llamada probabilidad "riesgo-neutral" o "medida martingala equivalente". Esto fue anunciado por Samuelson y Merton (1969) concepto de una "distribución util-prob", una distribución de probabilidad ponderada por una utilidad marginal del inversor.

La π^* es una probabilidad no inmediatamente aparente y requiere justificación posterior. Una condición necesaria y suficiente para que $\pi^* \in [0,1]$ es la desigualdad $d \leq r \leq u$. Pero esta desigualdad se deduce del hecho de que hemos supuesto la co-existencia de títulos y obligaciones sin riesgo en nuestra economía. Por ejemplo, supongamos que $r < d \leq u$; en este caso, ningún inversor poseerá obligaciones porque incluso en el peor de los casos, los títulos producirían un rendimiento más alto que r, por tanto, no pueden existir, es decir, tendrán precio cero. Alternativamente, si $d \leq r < u$, ningún inversor poseerá títulos, por tanto no pueden existir los títulos. Es decir, $d \leq r \leq u$ debe verificarse, en cuyo caso π^* se puede interpretar como una probabilidad. El hecho de que el precio de la opción esté determinado no por la probabilidad original π, sino por la medida martingala equivalente π^*, es una idea interesante que ha conducido a un enorme cuerpo de investigación en el que la teoría matemática de las martingalas juega un inesperadamente papel interesante en la valoración de los títulos financieros complejos.

En particular, la deducción de Merton (1973b) de la célebre fórmula de Black-Scholes para el precio de una opción call hace uso del Cálculo Itô, una teoría sofisticada de los procesos estocásticos tiempo continuo basada en el movimiento Browniano. Quizás la idea más importante del trabajo inicial de Merton (1973b) - con el que compartió el premio Nobel en economía con Myron Scholes – es el hecho de que bajo ciertas condiciones la negociación frecuente de un pequeño número de títulos antiguos (títulos y obligaciones sin riesgo) puede crear nuevas oportunidades de inversión (opciones y otros títulos derivados) que en otro caso no serían disponibles para los inversores. Estas condiciones – ahora colectivamente conocidas como "generación dinámica o mercados dinámicamente completos" y los modelos financieros correspondientes sobre los que están basados han generado una interesante literatura y una industria de derivados multi-millonarios de u.m., en la que títulos financieros exóticos tales como caps (límites superiores), collars (contratos de cobertura suelo-techo), swaptions (opciones sobre permutas financieras) y opciones rainbow (opciones que ofrecen el mejor comportamiento de dos o más mercados seleccionados), etc. son sintéticamente reproducidas mediante estrategias de negociación sofisticadas que implican títulos considerablemente más simples.

5. CONCLUSIONES

Las secciones precedentes han ilustrado cómo han avanzado drásticamente los métodos financieros matemáticos. En particular, los relacionados con la teoría de la probabilidad y la estadística han llegado a ser instrumentos importantes en el uso de las técnicas e ideas matemáticas en el campo económico-financiero. "Las matemáticas han emergido como una tecnología clave en los Modelos Financieros". También hemos descrito cómo la pericia de una gran variedad de áreas de investigación, que van desde la mecánica estadística a la toma de decisiones económicas, proporcionan en nuestros centros de investigación la posibilidad de hacer frente a los "nuevos enfoques de la Matemática Financiera Moderna".

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BACHELIER, L. (1900). " Theorie de la speculation ". Ann SCI Ècole Norm. Sup., III,17, pp. 21-86.
- BAXTER, M. y RENNIE, A. (1996). Financial Calculus. An Introduction to Derivate Pricing. Cambridge University Press, Cambridge.
- BLACK, F. and M. SCHOLES (1973). Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy 81, pp. 637-54.

- COX, J.R. y RUBINSTEIN, M. (1985). Options Markets. Prentice Hall.
- HARRISON, J. and D. KREPS (1979). Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. Journal of Economic Theory 20, pp. 381-408.
- HULL, J. (1997). Options, Futures and Other Derivatives. 3rd. Edition. Prentice Hall.
- ITÔ, K. y KAWADA, Y. (1996). On Stochastic Processes (infinitely divisible laws of probability). Japanese Journal of Mathematics.
- ITÔ, K. (1951). On a Stochastic Differentials Equations. Japanese Journal of Mathematics.processes (infinitely divisible laws of probability). Japanese Journal of Mathematics.

  - (1948). On the Stochastic Integral Equation. Japanese Journal of Mathematics.processes (infinitely divisible laws of probability). Japanese Journal of Mathematics.

  - (1946). On a Stochastic Integral. Japanese Journal of Mathematicsprocesses (infinitely divisible laws of probability). Japanese Journal of Mathematics.
- LAMBERTON, D. y LAPEYRE, B. (1996). Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. Chapman and Hall, London.
- MERTON, R. (1973b). Rational Theory of Option Pricing. Bell Journal of Economics and Management Science 4, pp. 141-83.
- MIKOSCH, T. (1998). Elementary Stochastic Calculus with Finance in View. World scientific, singapore.
- PROTTER, P. (1992). Stochastic Integration and Differential Equations. springer, Berlín.
- SAMUELSON, P. (1969). Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming. Review of Economics and Statistics 51, pp. 239-46.