Historias de Matemáticas

Series Trigonométricas, Sistema Solar y Poesía

Trigonometrical Series, Solar System and Some Poetry

Rosa M. Herrera

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen VI, Número 1, pp. 033–040, ISSN 2174-0410
Recepción: 2 Mar'15; Aceptación: 15 Dic'15

1 de abril de 2016

Resumen

El estudio matemático del Sistema Solar forma parte del corpus más consolidado de la ciencia, y al mismo tiempo es siempre joven; algunos aspectos son muy conocidos pero existen otros estudios menos difundidos a veces incluso relegados solo a grupos de especialistas que contribuyen más silenciosamente a la comprensión de este sistema dinámico. Comentarios poéticos u otras situaciones de belleza intrínseca, en ocasiones, abren la puerta a nuevas intuiciones que sirven en el lento avanzar del conocimiento. Estas notas suponen un brevísimo comentario sobre la riquísima y variada relación entre las matemáticas, la física y la literatura.

Palabras Clave: sistema solar, series trigonométricas, movimientos periódicos.

Abstract

The mathematical study of the Solar System is a part of the consolidated corpus of science, at the same time is always young, some issues are well known but there are some other studies less «popular», quietly contributing to the understanding of this system. Sometimes poetic comments or situations of intrinsic beauty open the door to new insights that serve in the slow development of knowledge.

Keywords: solar system, trigonometrical series, periodical motions.

La ciencia no es una colección de hechos, así como un amasijo de piedras no es una casa[1]. *(Henri Poincaré)*

1. Introducción

Muchos problemas matemáticos emergen del mundo físico o mejor sería más atinado decir que emergen de la física[2]. Históricamente esta ciencia ha dado pie, por una parte, a teorías y

[1] Los errores de interpretación van de mi cuenta, se trata de una traducción.
[2] Como el comentario o ejemplo que da lugar y título a estas notas.

conceptos, y, por otra, a copiosos desarrollos que partiendo de lo concreto se han movido[3] a lo más abstracto.

En la mayor parte de las situaciones, las cuestiones matemáticas han evolucionado en varios caminos diferentes a veces útiles para la propia ciencia de la que partían, pero en otras ocasiones con gran interés matemático, pero carente de él para otras ciencias.

La geometría es un ejemplo paradigmático o un prototipo de esta condición natural; a pesar de que nació con una finalidad práctica para resolver problemas concretos, muy pronto creo su propio mundo. *Los elementos*, de Euclides, fueron durante siglos un caso perfecto de la lógica pura.

Algunas concepciones geométricas con las que se trabaja en nuestro siglo, como la geometría no conmutativa debida a Connes (1947-) coincide básicamente con las abstracciones de la física; esto es, la geometría diferencial sobre una variedad real suave no conmutativa, en esencia consiste en generalizar la idea física de espacio al caso no conmutativo. Pero esta abstracción no es una elegancia avanzada, sino que surge con naturalidad en muchos ocasiones y esto ocurre por el cruce entre la geometría y otras áreas, como la teoría de ecuaciones diferenciales o la teoría de números, esto es de la visión causal y relacional de la representación física de la naturaleza, además la modelística matemática de la física que procede de la evolución natural de la mirada diferencial (local), pero también global y que supone intrínsecamente una concepción pictórica de la comprensión del universo.

Aun hay otros discursos y caminos que se cruzan con la matemática y que están en un estadio similar de evolución conceptual, veamos: la música, por ejemplo, y el arte en general en alguna de sus formas … Ferreirós y Gray[4] se refieren a «The architectural metaphor» como a una de las más antiguas en ciencia (y en particular en matemáticas), y todos los que estamos un poco familiarizados con la astronomía cultural hemos oído a los arqueoastrónomos aludir a las construcciones en las posiciones de los equinoccios, los solsticios y otras efemérides, cedamos la palabra a estos expertos autores:

> *[…] To be an architect, and not a mere artisan, it was essential to know geometry and to calculate strengths -mathematics was the keystone for turning the art into science. But, reciprocally, architecture has often been the source of analogies applied to science in general and mathematics in particular: the whole world has been seen as an edifice, but so have been each of sciences. […]*

Me detengo en la literatura que es uno de esos ambientes o mundos que se cruzan con la matemática y aporta ideas singulares, modos de pensar propios que aportan conocimiento y otra mirada, y además son fuente señalizadora de sutiles diferencias entre los lenguajes de ambas (o entre ambas consideradas como lenguajes).

Para comprobar el contenido de la realidad que conlleva el pensamiento abstracto, suponga el lector, por ejemplo, el conjunto de los buenos poemas que existen en todos los idiomas, no es fácil imaginar que estén mal escritos, parece una contradicción intrínseca del discurso literario, si un poema es bueno no puede ser malo (o por puntualizar, parece difícil que un buen pensamiento -razonamiento- verbal esté mal verbalizado; pero quizá no sea imposible …, no soy capaz de efectuar una afirmación categórica, ignoro algunos puntos clave, pero dejo abierta la idea de que tal vez una noción poética e interesante puede ser expresada no atinadamente (o al menos con poca «gracia») léase tal vez precisión, si se analiza racionalmente - por exceso o por defecto.

Sin embargo, las características del pensamiento matemático y su expresión idiomática per-

[3] Deliberadamente escribo movido y no elevado, que es lo más usual por quienes consideran la abstracción despegada del mundo exterior al pensamiento cualidad superior, hay una interesante polémica al respecto, y yo no estoy segura.

[4] *The Architectures of Modern Mathematics Essays in History and Philosophy*. OUP (2006).

miten, en ocasiones, hacer buenas matemáticas con un lenguaje poco exquisito y/o farragoso, quizá no es lo más usual ni común, pero este conjunto no debe estar vacío, intuyo.

Mientras que si esta hipótesis es correcta, la buena literatura no parece muy compatible con un lenguaje poco perfeccionado (al menos no concuerda con lo habitual), la buena matemática presenta otras alternativas. Apoyo esta afirmación en la idea de que la condición de la buena matemática tiene carácter «global» quizá en el sentido de que es algo más de que es algo más que la consecuencia de unas cuantas características «locales» de calidad, a pesar de que en efecto existan algunas cualidades locales fascinantes por bellas y valiosas (o útiles, dirán algunos).

La cita siguiente, perteneciente al libro de Kac y Ulam *Mathematics and Logic* [p. 62] esclarece, en mi opinión, el carácter de la creatividad matemática, y en cierto sentido justifica los párrafos precedentes y posiblemente los sucesivos. Las intrincadas relaciones son difíciles de desentrañar, pero en ocasiones se halla la luz.

> *The art of mathematical proof often consists in finding a framework in which what one is trying to prove becomes nearly obvius. Mathematical creativity consists largely in finding such frameworks. Sometimes one finds them in the rich world of material objects, sometimes (and this is the highest form of creativity) one invents them. More often than not, one recognizes that what one is interested in happens to fit into an already existing framework that was introduced originally for entirely different purposes. (When a framework is used repeatedly in different contexts, it becomes a theory and is studied for its own sake.)*

2. Generalidades sobre las matemáticas y las ciencias físicas

La relación entre las ecuaciones diferenciales y los sistemas mecánicos es bien conocida, debido a que los movimientos de los sistemas de partículas[5] y de los sólidos se estudian muy bien en este lenguaje; uno de los ejemplos clásicos es el sistema solar. Pero los sistemas mecánicos tienen una relación muy interesante con otras ramas matemáticas; por ejemplo, observe el lector un objeto en el espacio y trate de fijar el centro del mismo y notará que el objeto pasa de un punto a otro mediante una rotación. Expresado de otro modo, el objeto se halla situado en un espacio de 6 dimensiones: el grupo de rotaciones del espacio euclídeo y $\mathbb{R}^3$ de aquí a la geometría diferencial (el mundo riemanniano) hay abierto un camino; en el cual se considera la energía cinética (cuerpo en movimiento); ¿dónde empieza la física, dónde acaba la matemática?, ¿cómo discernir ambas?, ¿acaso ese empeño será siempre fructuoso?

Quizá conviene recordar que no sólo se trata de una buena relación, sino que en sentido estricto el cálculo diferencial nació en las proximidades de los desarrollos teóricos de la mecánica; guiado, al menos parcialmente, por el anhelo de comprender el movimiento; se enriqueció y creció notablemente con las teorías de la elasticidad y de los fluidos, la termodinámica y la teoría electromagnética de Maxwell.

La predicción maxwelliana derivada de la brillante teoría electromagnética de la luz (según la cual los vectores eléctrico y magnético verifican la ecuación de ondas, y las perturbaciones electromagnéticas se propagan siguiendo la ecuación de ondas) se confirmó experimentalmente en 1886 cuando Hertz produjo ondas electromagnéticas. Así posiblemente no es exagerado afirmar que la física está entregada totalmente en los brazos de la matemática. Véase Kac and Ulam *Mathematics and Logic* [p. 163].

> *[...] useful transformations can be in formulating «qualitative» properties of motions of physical systems. A dynamical system of n mass points was represente earlier by a single point in 6n dimensions; the change of its configuraiton in time was pictured as a motion of*

[5] buena abstracción física enraizada con la pura matemática.

a point in this 6n-dimensional «phase» space. «In general», such a flow that is volume- or mesure-preserving is ergodic; that is representative points of the system travel with uniform density through all the available space.

Si seguimos observando logros y nos detenemos junto a Minkowski, nos damos cuenta de lo impresionado que estaba este científico por la similitud de las ideas de Einstein en física y las de Klein en geometría. Aquí cabe la reflexión puntualizadora acerca de la complejidad que en una de ellas (la física o las matemáticas) no es necesariamente pareja con el grado de complicación en la otra, Kan y Ulam [5] señalan a modo de ejemplo que el aparato técnico de la matemática implicada en la teoría de la relatividad especial es elemental en extremo; sin embargo, la física asociada conlleva conceptos e ideas físicas profundas y sutiles. En sentido contrario, en no pocas ocasiones, matemáticas de complicada estructura no aportan gran cosa al conocimiento del mundo natural, Wigner escribió en relación con esta idea en *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*.

The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning.

El mundo exterior (al ser humano) es demasiado complejo y los científicos están contentos de comprender sus características más sencillas.

3. La teoría de números y el sistema solar

Una vieja pregunta que se han hecho los estudiosos de la dinámica de nuestro sistema planetario se refiere a su persistencia en el tiempo, este interrogante también se lo han planteado otros creadores y pensadores, por ejemplo, los poetas, los filósofos, los músicos y otros pensadores, veamos.

¿Cuánto durará el sistema solar? Parece una curiosidad natural dada la condición propia de nuestra especie, como habitante del sistema, aquí cabrían muchas ideas de muchos campos, como los citados y seguramente alguno más, pero nosotros nos vamos a fijar en un aspecto no excesivamente conocido en el que entablamos una relación entre la teoría de números y el sistema solar.

Para ayudar a la reflexión, formulemos la pregunta anterior de una manera más científica que nos dirija hacia la respuesta que buscamos: ¿Habrá algún planeta que se escape del sistema?, ¿chocará algún planeta con el Sol o con otro planeta? Si aceptamos sencillamente las leyes de Kepler para cada planeta y su relación con el Sol, sin considerar los demás cuerpos, parece que el sistema solar duraría para siempre, pero el problema es más complejo, y aquí las matemáticas avisaban de la dificultad que se nos avecina: el problema de los n cuerpos. Para un problema de tipo planetario, quizá convenga señalar al lector que ya se sabía que hay condiciones inciales que permiten soluciones sin colisiones (para siempre) y acotadas (sin fugas planetarias).

En el tiempo en que Fourier andaba ocupado en tratar de buscar expresiones eficaces de funciones periódicas como series de senos y cosenos, y en el mundo de la ciencia física se trabajaba para encontrar la evolución del enfriamiento de la Tierra (el ambiente propicio para desarrollar y establecer y formular una teoría de éxito del calor). Encontrémonos con Fourier y sus funciones periódicas y veamos a continuación un caso de aplicación inmediata.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n x + b_n \operatorname{sen} 2\pi n x)$$

En muchas situaciones físicas hay que afrontar y resolver problemas que conllevan perturbaciones de tipo periódico (un ejemplo típico es el de los instrumentos musicales en los que se desean producir sonidos puros), en este campos de este tipo, el estudio desarrollado por Fourier cobró gran importancia y se potenció y perfeccionó con entusiasmo asociándolo a diferentes situaciones relativamente análogas.

En el asunto relativo al sistema solar que quería destacar aquí, que, como ya se ha señalado, se enmarca en la situación del problema de los n cuerpos, hay que considerar algunas diferencias sutiles con las series convencionales de Fourier que hay que buscar en la forma de las frecuencias. Si se piensa y se escribe una expresión similar a la anterior, pero en la que las frecuencias son arbitrarias.

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega t + b_n \operatorname{sen} \omega t)$$

Es posible encontrar un tipo de soluciones que nos resultan interesantes y que Weierstrass ya veía venir, pero que sabía que hacerlas converger no siempre era posible y ni siquiera fácil, de hecho hasta la mitad del siglo xx no se encontraron las condiciones que deben cumplir dichas frecuencias que en efecto resultó un asunto bastante sutil, cuya explicación matemática requiere salirse un poco del problema de los planetas y el sol (y por tanto del asunto de los n cuerpos) y mirar la teoría de números buscando los consejos de Liouville para encontrar números trascendentes.

Las ecuaciones diferenciales más sencillas inducidas del cálculo de primitivas se pueden hacer converger usando algunas ideas sobre los pequeños divisores (cuando se ponen las condiciones buscadas), Liouville aprendió a tratarlos cuando estaba estudiando los irracionales algebraicos y los trascendentes, en ese ambiente encontró la condición diofántica[6] de los pequeños divisores, y aprendió a construir los primeros números trascendentes buscando irracionales que se aproximen bastante a racionales. Un trascendente conocido que se aproxima bien a racionales usando la condición diofántica es

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0,110001000000000000000001000 0\ldots$$

Los números que no cumplen la condición diofántica se llaman de Liouville de medida cero.

4. Un ejemplo de relación entre los lenguajes matemático y literario

En este apartado voy a intentar entablar un pequeño diálogo entre la literatura y las matemáticas y algunos aspectos o ideas esclarecedoras que parecen compartir y que aparentan contradicciones en sus visiones, pero que en mi opinión no lo son más allá de una lectura poco reposada, pero que convergen en una mirada más serena.

4.1. Poincaré y la mecánica celeste

Henri Poincaré en *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* escribió:

[6] desigualdad basada en la diferencia entre un número algebraico y el polinomio irreducible que lo anula.

> *Étant donnés des équations de la fome définie dans le nº 13 et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la périod peut, il este vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut. D'ailleurs, ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable.*

La forma definida en el nº 13 se refiere a que este problema está contextualizado en la teoría de perturbaciones considerando el caso de 3 cuerpos como una perturbación del caso de 2 cuerpos (movimiento periódico ($H < 0$ en una órbita kepleriana, sistema hamiltoniano integrable).

Las soluciones periódicas (asunto de índole matemático) en este caso son la rendija por la cual el ser humano se escapa a un lugar inasequible de otro modo, la luz del conocimiento que nos conduce a la interpretación comprensiva de nuestro sistema solar.

Verhulst en *Henri Poincaré impatient genius* [p. 100], señala el interés amplio y abierto por la cultura y la ciencia literalmente escribió «He was far from being a narrow-minded specialist.» y el mismo Verhulst nos recuerda lo que Vito Volterra había escrito sobre Poincaré [Volterra et al. 1914]:

> *«He is among the scientists as an impressionist among the artists.» His writing is like as a discourse, he presents an exposition of his ideas about a problem to the reader. The turn of phrase he uses most often in the middle of an article is «ce n'est pas tout» (this is not all). It is true that Poincaré often takes big leaps where non trivial details have to be filled in; his impatience and his urgent wish to move on show all the time. But the engaging, readable style and the wealth of new ideas more than make up for all that.*

4.2. Un poema matemático de Borges

Jorge Luis Borges escribió un poema que tituló *Para una versión del I King* en él, el poeta realiza la siguiente afirmación pareja a la presentada en el epígrafe precedente, aunque sutilmente diferente, se encuentra similitud en esa diferencia si se mira con serenidad y hondura:

> *El porvenir es tan irrevocable como el rígido ayer. No hay cosa que no sea una letra silenciosa de la eterna escritura indescifrable cuyo libro es el tiempo. Quien se aleja de su casa ya ha vuelto. Nuestra vida es la senda futura y recorrida. El rigor ha tejido la madeja.*

Me resulta suficientemente fácil ver un planeta en una órbita elíptica en torno a un Sol fijo en un foco, y pienso en Kepler (y en Newton y en los demás), en los sistemas dinámicos, en el caos determinista . En el siguiente grupo de versos que, con cierto grado de osadía, vuelvo a presentar como prosa encuentro el lado más humano de la historia: la luz que nos salva gracias a la grieta.

> *No te arredres. La ergástula es oscura. La firme trama es de incesante hierro, pero en algún recodo de tu encierro puede haber una luz, una hendidura. El camino es fatal como la flecha. Pero en las grietas está Dios, que acecha.*

4.3. Poincaré vs. Borges y las metáforas

Jugando con la aparente contradicción entre el poeta y el científico. La rendija (hendidura) es la liberación de los límites físicos de la cárcel que supone el mundo para el espíritu del poeta. La rendija (*brèche*) es la comprensión del mundo físico que el rigor matemático posibilita.

Alguien podría pensar que lo que supone para uno de los dos liberación es cárcel para el otro; sin embargo, en mi opinión la rendija es la oportunidad de vislumbrar un poco más allá de los límites que en realidad, creo yo, para un individuo son tanto del mundo físico como de la mente finita. En fin, que la metáfora de la rendija y la luz (que se cuela a través de ella tal vez) supone que la liberación es la visión comprensiva de los límites cualesquiera que estos sean.

4.4. Comentarios sobre una visión literaria de la ciencia

En los epígrafes precedentes he pretendido realizar una pequeña incursión comparativa del mundo científico y el literario, un intento de distanciamiento positivo más interesado en evitar la «ceguera disciplinar» de la visión del mundo, pero esta interdisciplinariedad buscada y levemente bosquejada procede de la mirada científica. El siguiente fragmento extraído de *Figures of Thought: A Literary Appreciation od Maxwell's Treatise on Electricity and Magnetism* de Thomas K. Simpson (vía Brian Hayes, *Notices of the AMS*, volume 60, number 9, pp. 1173-1176) me interesa mostrarlo en el sentido de que representa una mirada literaria de la ciencia.

> *A scientific work evidences literary character when it is imbued with a vision or a goal towards which its parts are organized throughout. Achieving this organization is the business of the art of poetics, which teaches us that there must be a story.*

La interrelación de la literatura y la ciencia no es una cosa reciente, hay muchos testimonios de buena ciencia y buena expresión literaria que van de la mano, en siglos anteriores; por ejemplo, pienso en *Las lecciones académicas* de Evangelista Torricelli[7] ejemplo brillante de uso de la literatura en forma de alegoría científica, de una belleza extraordinaria. El sentido del humor culto y la ironía perfectamente imbricado en la explicación científica.

Dejo una ventana abierta a la constatación del enriquecimiento mutuo. Hay mucho por explorar y no sabemos lo que nos espera en cada recodo del camino, ni siquiera podemos imaginar cuántos recodos nos reserva el camino. Esta metáfora del camino y el caminar parece dar buenos resultados, pero hay otras.

5. Conclusión

Una ventana abierta a posibles vías de reflexiones provisionales e incompletas (nunca últimas ni cerradas) en muchas dimensiones o aspectos, tantas como seamos capaces de abarcar. Crear nuevas formas mixtas de representación del mundo y de las ideas. Explorar los modos de pensamiento de que disponemos: pictórico-relacional-funcional, musical-literario-matemático. Cruzar e imbricar miradas, buscar ejemplos en todas direcciones es una de las más bellas tareas a las que podemos entregarnos. Esas u otras posibilidades que ni siquiera soy capaz de imaginar, nos esperan, encontremos la rendija.

Referencias

[1] FERREIRÓS, J., *Matemáticas y pensamiento: en torno a imágenes, modelos, abstracción y figuración*, F. Zalamea, ed., Rondas en Sais, 2012.

[2] HERRERA, R. M., *Ecuaciones, teorías y ciencias que las usan*, Pensamiento matemático, Vol. II, Nº 2, pp. 105–114, 2012.

[7] E. Torricelli (1608-1647), al respecto he publicado el artículo titulado *Las lecciones académicas de Evangelista Torricelli* en la revista «Pensamiento matemático».

[3] HERRERA, R. M., *Las "lecciones académicas"de Evangelista Torricelli*, Pensamiento matemático, Vol. III, Nº 1, pp. 121–133, 2013.

[4] HERRERA, R. M., *La simulación como elemento innovador en el método científico. Un ejemplo en Astrodinámica*, Revista Iberoamericana de Argumentación, Nº 7, 2013.

[5] KAC, M., ULAM, S., *Mathematics and Logic*, Dover Publications, INC, New York, 1992.

[6] SIMPSON, T., *Figures of Thought: A Literary Appreciation of Maxwell's Treatise on Electricity and Magnetism*, Green Lion Press, 2005.

[7] VERHULST, F., *Henri Poincaré impatient genius*, Springer, New York, 2010.

[8] WIGNER, E., *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Communications in Pure and Applied Mathematics, vol. 13, No. I, John Wiley and Sons, INC, New York, 1960.

Sobre la autora:
Nombre: Rosa María Herrera
Correo electrónico: herrera.rm@gmail.com
Institución: Fundación APYCE.