Juegos y Rarezas Matemáticas

Una del Oeste

A tale of the Far West

Dionisio Pérez

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen V, Número 2, pp. 115–118, ISSN 2174-0410
Recepción: 24 Jun'15; Aceptación: 17 Sep'15

1 de octubre de 2015

Resumen

Con la excusa de un western típico, hacemos un estudio de las probabilidades asociadas a la elección al azar de n objetos por sus propietarios. La ley de Poisson se revela adecuada para describir la situación.

Palabras Clave: Probabilidad, Bernoulli, Poisson, Permutaciones, desarreglos.

Abstract

We study the probabilities associated to the random choice of n objects by their owners. Poisson's law shows its accuracy in the description of such a situation.

Keywords: Probability, Bernoulli, Poisson, permutations, derangements.

1. La cantina

La historia la hemos visto muchas veces: llega a la cantina un grupo de indeseables. Vienen a caballo, alborotando y disparando al aire; acaban de asaltar un rancho. Dejan los caballos en el establo y entran. Después de varias horas de puñetazos y whisky, oyen que llega el sheriff con sus hombres y salen apresuradamente: montan de nuevo en los caballos sin fijarse en cuál elige cada uno (ni la bebida ni las prisas se lo permiten) y se alejan galopando.

El sheriff se informa detalladamente y quedan claros los siguientes hechos: se trata de un grupo numeroso, de entre 15 y 20 hombres y otros tantos caballos; su huida ha sido precipitada, de modo que la elección de las monturas ha resultado totalmente aleatoria; van armados y bastantes bebidos. Llevan como una hora de ventaja a quienes salgan ahora en su persecución.

El sheriff, un hombre serio con cierto aire a Gary Cooper, cuenta con tres ayudantes eficaces pero no tan valientes como para enfrentarse a más de una docena de pistoleros siendo ellos apenas cuatro. Para convencerles y animarles, les hace estas reflexiones:

- Somos cuatro hombres armados y decididos, con la ley de nuestra parte, contra unos cuatreros medio borrachos que ni siquiera conocen al animal que montan. Con las prisas, es fácil que a lo sumo tres o cuatro de ellos vayan en su propio caballo, pero los que van en animal ajeno no cuentan porque no serán capaces de dominarlo. Y tres o cuatro forajidos ebrios no son rival para nosotros.

- Aunque fueran seis o siete, somos hombres para arrestarles y meterles en prisión, pero no tendríamos nada que hacer frente a diez o más, dice uno de sus ayudantes.

- Tranquilos. Os aseguro que no tendremos que enfrentarnos a más de seis u ocho, y seguramente no lleguen a ser más de dos o tres. ¿Alguna vez has tenido un póker?; sin hacer trampa, quiero decir. Pues es más difícil que ellos sean tanta gente. Apuesto mi alazán a que no nos doblan en número.

¿En qué se basa el sheriff para decir eso? ¿Sólo intenta dar ánimos a sus hombres, o hay algo más sólido en sus palabras? ¿Va de farol? ¿Es acaso el sheriff un matemático con una estrella de hojalata? ¿Corre peligro serio de perder el caballo?

Es posible que usted quiera resolver esas cuestiones por sí mismo. Le animo a que lo haga: ¿cuántos jinetes es de esperar que hayan atinado con su propio caballo? ¿cuál es la probabilidad de que sean más de 8? ¿y de que sean todos? ¿ninguno? ¿sólo uno? A vuelta de párrafo abordamos estas preguntas.

2. Echando cuentas

Sabemos que el número de los cuatreros anda entre 15 y 20: vamos a decir que es n. Para estudiar el problema, conviene desmenuzarlo, y a tal efecto empezamos por introducir unas variables aleatorias, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ que fijen la atención en cada jinete concreto y nos digan si el caballo que montaba a la salida era el mismo que llevaba al llegar. Definimos, para ello, X_k así:

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si el } k\text{-ésimo vaquero salió con su propio caballo} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Cada una de las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ es de Bernoulli y tiene esperanza $E[X_k] = \frac{1}{n}$, puesto que ésa es la probabilidad que tiene el jinete en cuestión de haber acertado con su animal. El número de vaqueros que han salido a lomos de su propia montura viene dado por la suma

$$S = S_n = X_1 + \ldots + X_n$$

Las preguntas que nos planteamos hace un rato se formulan cómodamente en términos de S: ¿cuál es la esperanza de S? ¿cuáles son las probabilidades de que S tome el valor 0, o 1, o sea menor que 8? Centramos, pues, nuestra atención en la variable aleatoria $S = S_n$.

Lo mismo que el sheriff y sus hombres no deben seguir pistas falsas, nosotros hemos de evitar la tentación de ver a S como una variable aleatoria binomial: aunque es suma de variables de Bernoulli, no son independientes. Esta observación, que nos ahorra un fracaso sonrojante, nos obliga a realizar los cálculos de las probabilidades sin acudir a las fórmulas bien conocidas de las variables binomiales, así que vamos a ello:

La esperanza de S es fácil de calcular:

$$E[S] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k] = 1$$

gracias a la linealidad de la esperanza. Así que podemos esperar encontrar (como promedio) un solo vaquero subido en su caballo. Buenas noticias para los perseguidores.

La varianza de S es algo laboriosa de calcular. Como no es relevante para esta película, no la calcularemos (que lo haga el lector curioso); diremos solamente que es igual a 1. La gran cuestión es: cuál es la probabilidad de que S sea igual a 0, a 1 o a un valor dado, k. Por ejemplo, ¿qué probabilidad hay de que todos los cuatreros hayan acertado con sus caballos? ¿y de que no haya atinado ninguno?

La respuesta a la primera pregunta es obvia: como el número de opciones posibles es $n!$ y cada una de las permutaciones de los n caballos tiene la misma probabilidad de darse (pues los cogen al azar), deducimos que $P(S = n) = \frac{1}{n!}$

También es evidente que $P(S = n - 1) = 0$. Pero la probabilidad clave, que nos va a permitir calcular todas es $P(S = 0)$, que abreviamos como p_n, para recordar que depende del número de los asaltantes. ¿Qué valor tiene p_n?

Para valores bajos de n, se puede calcular directamente:

n	p_n
2	0'500
3	0'333
4	0'375
5	0'367

En general, el valor de p_n viene dado por

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \ldots \pm \frac{1}{n!}$$

Esa expresión sale de dividir el número de casos favorables entre el de los posibles. El denominador está claro: $n!$; el numerador es el número de casos en que ningún vaquero lleva su propio caballo, es decir, el de las permutaciones de n elementos que no dejan ninguno fijo. Tales permutaciones se suelen conocer como 'desarreglos', pero yo prefiero el término 'desbarajustes', que no suena a desórdenes hormonales.

Para contarlos, nos fijamos en el conjunto A_1 formado por las permutaciones que fijan el primer elemento, $A_1 = \{\sigma : \sigma(1) = 1\}$, en el conjunto $A_2 = \{\sigma : \sigma(2) = 2\}$, etcétera. El conjunto en el que estamos interesados es precisamente el complementario de la unión $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. El cardinal de esa unión viene dado por la suma de los cardinales de los conjuntos A_i menos la suma de los cardinales de las intersecciones binarias $A_i \cap A_j$ más la suma de los cardinales de las intersecciones ternarias $A_i \cap A_j \cap A_k$ etcétera.

Si observamos que

$$|A_i| = (n-1)!, |A_i \cap A_j| = (n-2)!, |A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)!, \ldots$$

y que hay n conjuntos del primer tipo, $\frac{n(n-1)}{2}$ del segundo, $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ del tercero, llegamos a la conclusión de que

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = n! - \frac{n!}{2} + \frac{n!}{6} - \frac{n!}{24} + \ldots$$

Por tanto, la cantidad total de desbarajustes es

$$n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \frac{n!}{2} - \frac{n!}{6} + \frac{n!}{24} + \ldots$$

y al dividir por $n!$ resulta el valor de p_n.

Se descubre ahí una suma parcial de la serie de Taylor de la función exponencial $\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$ para $x = -1$, de manera que los valores p_n convergen a $e^{-1} \approx 0'36788$, y además la convergencia es muy rápida: así, para $n = 7$ la diferencia es de apenas dos cienmilésimas. Se deduce de ahí que p_n no depende de n más que muy débilmente, en cuanto n supera el valor 4; desde un punto de vista práctico, podemos decir que $P(S = 0)$ es del $36'8\,\%$ sea cual sea n (superior a 5).

Por lo que hemos visto hasta ahora, el sheriff sabe de lo que habla, y su pequeño grupo lleva todas las de ganar: hay grandes probabilidades de que ni un solo forajido conserve su caballo, y el promedio esperado es de apenas uno de ellos. Vamos a rematar la faena calculando la probabilidad de que sean exactamente uno, dos o tres los vaqueros afortunados que montan sus respectivas caballerías.

S toma el valor 1 cuando una de las variables X_k vale 1 y las demás valen 0. Aprovechando la simetría de la situación, calculamos la probabilidad $P(S = 1)$ evaluando $P(X_1 = 1, X_2 = \ldots = X_n = 0)$ y multiplicando por n. Bien, esa probabilidad es sencilla:

$$P(X_1 = 1, X_2 = \ldots = X_n = 0) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = \ldots = X_n = 0 | X_1 = 1) = \frac{1}{n} \cdot p_{n-1}$$

Multiplicando por n, vemos que $P(S = 1) = p_{n-1}$ coincide (salvo por una miserable diferencia de $\pm\frac{1}{n!}$) con la probabilidad de que $S = 0$.

De manera análoga, $P(S = 2)$ es la suma de $\frac{n(n-1)}{2}$ casos equivalentes a $X_1 = X_2 = 1, X_3 = \ldots = X_n = 0$. La probabilidad de este caso típico es

$$P(X_1 = X_2 = 1) \cdot P(X_3 = \ldots = X_n = 0 | X_1 = X_2 = 1) = \frac{1}{n(n-1)} \cdot p_{n-2}$$

Por tanto, $P(S = 2) = \frac{p_{n-2}}{2} \approx \frac{1}{2e} \approx 0'18394$

Ya no cuesta trabajo calcular $P(S = 3) = \frac{p_{n-3}}{6} \approx \frac{1}{6e} \approx 0'0613$, y en general $P(S = k) = \frac{p_{n-k}}{k!} \approx \frac{e^{-1}}{k!}$

Si echamos unas cuentas sencillas, vemos que la probabilidad de que haya a lo sumo 5 jinetes a la grupa de sus propios caballos es del $99'94\,\%$, y la de que haya 6 o menos es de un $99'99\,\%$. El sheriff no corre peligro serio de perder la apuesta.

3. Adagio finale: Poisson

Antes de que caiga el telón, quiero subrayar algo que ha aparecido en los cálculos anteriores. Si n es suficientemente grande para que la aproximación por e^{-1} sea válida (y desde luego, $n = 15$ lo es de largo), las probabilidades $P(S = k)$ coinciden con gran precisión con $\frac{e^{-1}}{k!}$, que es el valor que le correspondería si S fuese una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = 1$. Así, el modelo de Poisson se revela adecuado para estudiar este problema de western clásico.

Y ahora sí. Contra un atardecer rojizo se recortan las figuras de los delincuentes esposados, conducidos por la ley ante el juez. Se oye una armónica: I was born under a wandering star.

Sobre el autor:
Nombre: Dionisio Pérez
Correo electrónico: dionisio.perez@upm.es
Institución: Departamento de Matemáticas e Informática. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid. España.