MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

SOBRE ESPACIOS DE BESOV DEFINIDOS POR MEDIAS DE RIESZ

JOSÉ E. GALÉ

Abstract. Let A be a densely defined, possibly unbounded closed operator on a Banach space X. Under the assumption that A has its Riesz means uniformly bounded on X, we give here a general theorem on equivalence of norms in Besov spaces associated with X and A. This theorem applies in particular to stratified Lie groups. Also, we give a description of the Besov space corresponding to the Heisenberg group, and its Kohn sub-Laplacian, in terms of the generalized Hermite functions.

1. Introducción

Esta nota está escrita en homenaje a la memoria de José J. Guadalupe, matemático de amplia cultura y fina intuición, compañero y amigo. Uno de sus rasgos como investigador era su permanente atención a principios generales, leyes abstractas que dieran razón, en términos simples y diáfanos, de esa multiplicidad de fenómenos, conexión de propiedades, etc., que su ojo clínico sabía atisbar al comienzo de sus indagaciones. Hace años, tuvimos una conversación acerca de cuestiones que nos interesaban a los dos, aunque por diferentes motivos. En aquella charla salieron a relucir trabajos sobre desarrollos ortogonales, así como sobre convergencia de las medias de Cesàro, con respecto a familias de proyecciones en espacios de Banach. Éste era un tema que Chicho había empezado a estudiar a fondo siguiendo su buen sentido. Con el tiempo, aquel enfoque tan teórico nos dio juego a ambos en cuestiones más concretas. Sus comentarios de entonces han inspirado la redacción del presente trabajo, si bien al principio del mismo mi idea era poner el acento en los aspectos relativos a expansiones ortogonales y, no obstante, el artículo ha quedado centrado al final en espacios de Besov, propiamente. Es un tema, de cualquier modo, digno de la ocasión.

Los espacios de Besov, o Lipschiz generalizados, sobre $\mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{T}^n$ tienen una larga historia. Aparecen estrechamente vinculados a los espacios de Sobolev y admiten formas diversas y equivalentes de describirlos: desde las más directamente afines a su resonancia lipschiziana, en términos de diferencias finitas, a las dadas mediante

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46B25, 46E30, 47A60; Secondary 33C45, 43A80.

Key words and phrases. Besov space, Riesz mean, functional calculus, orthogonal expansion, stratified group, Heisenberg group.

Esta investigación ha sido parcialmente financiada por la DGES, España, formando parte del proyecto PB97-0994.

recurso al semigrupo de Poisson o al de Gauss, de reminiscencias con el problema de Dirichlet. También pueden ser definidos en versión «discreta», mediante el uso de convenientes y por otro lado «standard» descomposiciones diádicas, o como resultado de la interpolación de espacios de Sobolev entre sí, o de espacios L_p y Sobolev [9].

Las aproximaciones al tema hechas en función de semigrupos, o por otra parte, empleando descomposiciones, admiten generalización directa en el contexto de espacios de Banach. Concretamente, supongamos que X es un espacio de Banach, $\mathcal{B}(X)$ su álgebra de operadores acotados, y $(T_t)_{t>0} \subseteq \mathcal{B}(X)$ un C_0-semigrupo, fuertemente continuo y uniformemente acotado, de generador infinitesimal $-A$, $T_t = e^{-tA}$. Para $\theta > 0$, y $1 \leq q \leq \infty$ se define el *espacio de Besov sobre* X, *asociado a* A, como

$$\mathrm{Lip}_{\theta,q}(X) := \Big\{\xi \in X : \Big(\int_0^\infty t^{-\theta q} \|(T_t - I)^m \xi\|^q \, \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} < \infty\Big\},$$

donde m es *cualquier* número real mayor que θ (es decir, el espacio así definido no depende de tal m). La notación anterior, sin ser la misma, está inspirada en [2].

Cuando el semigrupo T_t es holomorfo se tiene que

$$\mathrm{Lip}_{\theta,q}(X) = \Big\{\xi \in X : \Big(\int_0^\infty (t^{m-\theta} \|A^m T_t \xi\|)^q \, \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} < \infty\Big\},$$

[2, p. 207]. En ambos casos las expresiones integrales que aparecen entre llaves pueden tomarse como correspondientes normas (equivalentes) en $\mathrm{Lip}_{\theta,q}(X)$. Naturalmente, tales normas deben modificarse adecuadamente si $q = \infty$. Por comodidad sólo escribiremos en el trabajo normas integrales, obviando el caso $q = \infty$.

El espacio anterior puede también obtenerse por interpolación real; a saber, si $\mathcal{D}(A^m)$ es el dominio de definición de la potencia (no acotada) m-ésima del operador A, normado convenientemente, y $0 < \tau < 1$ entonces

$$(X, \mathcal{D}(A^m))_{\tau,q} = \mathrm{Lip}_{m\tau,q}(X),$$

[2, p. 194]. Este hecho refleja precisamente la idea de Lions y Peetre de estudiar la interpolación a partir de la teoría de semigrupos. Es bien conocido que $K(t;\xi) \approx \sup_{0<s\leq t} \|T_s\xi - \xi\|$, siendo $K(t;\xi)$ el K-funcional de X y $\mathcal{D}(A^m)$.

Por último, recordemos que $\mathrm{Lip}_{\theta,q}(L_p(\mathbb{R}^n))$, asociado al laplaciano usual $\Delta := -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ sobre $\mathbb{R}^n$, o a su raíz cuadrada $\sqrt{\Delta}$, coincide con el espacio de Besov clásico en $\mathbb{R}^n$ (ver [2, p. 266]).

La segunda generalización descansa en la hipótesis de la acotación uniforme de las medias de Riesz de un operador. Esta es una idea que parece deberse originariamente a J. Peetre, quien trata el caso *homogéneo* en [9]. Hay también un desarrollo independiente de H. Triebel en el caso *no homogéneo*, véase [13], que es el que consideramos aquí.

Supongamos que H es un espacio de Hilbert, X un espacio de Banach, y que ambos están inmersos en un tercer espacio vectorial topológico de Hausdorff. Supongamos también que $X \bigcap H$ es denso en cada uno de los X, H, en sus topologías respectivas. Sea A un operador sobre H, autoadjunto y no negativo. El teorema espectral para A nos suministra operadores $M(A) \in \mathcal{B}(H)$ dados por el cálculo espectral usual $M(A)\xi = \int_{-\infty}^{\infty} M(u)\,dE(u)\xi$, $\xi \in H$, para toda función de Borel M acotada sobre $\mathbb{R}$, y donde $\{dE(u)\}$ es la familia de medidas espectrales correspondiente a A. Si como M tomamos la función $r_\alpha(u) := (1-u)_+^\alpha \chi_{[0,\infty)}(u)$, $\alpha \geq 0$, entonces tenemos definida en $\mathcal{B}(H)$ la media de Riesz $R_u^\alpha = u^\alpha r_\alpha(u^{-1}A)$. La hipótesis de trabajo es la siguiente.

Hipótesis. $R_u^\alpha \in \mathcal{B}(X)$, y

$$(\mathcal{R}_\alpha) \qquad \sup_{u>0} \|u^{-\alpha} R_u^\alpha\| < \infty.$$

Esta propiedad de acotación uniforme de las medias origina un cálculo funcional para operadores continuos sobre X, en el sentido de que existe un homomorfismo acotado de álgebras de Banach $AC^{(k+1)} \to \mathcal{B}(X)$ dado por

$$f(A)\xi = \int_0^\infty f^{(k+1)}(u) R_u^k \xi\, du,$$

$\xi \in X$, $f \in AC^{(k+1)}$, $k > \alpha$. El álgebra $AC^{(k+1)}$ está formada por las funciones de clase $C^{(k)}$ sobre $[0,\infty)$ tales que $f^{(j)}(\infty) = 0$, $(j = 0, 1, \ldots)$, y $f^{(k)}$ es absolutamente continua verificando $\int_0^\infty |f^{(k+1)}(u)| u^k\, du < \infty$ [13], [3], [7] (aunque en la integral del cálculo aparece R_u^k en lugar de R_u^α eso no es problema porque de $\mathcal{R}_\alpha$ se sigue $\mathcal{R}_k$. De hecho el cálculo anterior vale para orden fraccionario de derivación, pero aquí nos limitaremos a considerar k entero por ser esto suficiente). Nótese que $f(A)$ no depende de $k > \alpha$.

Como es habitual, el cálculo funcional así definido puede extenderse al álgebra con unidad $AC_1^{(k+1)} = AC^{(k+1)} \oplus \mathbb{C}1$ poniendo $g(A) = f(A) + g(\infty)I$, si $g = f + g(\infty)$, con $f \in AC^{(k+1)}$.

Vamos con la definición de espacio de Besov definido mediante descomposiciones, «diádicas» y espectrales, sobre X. Sea $a > 1$. Tomamos ψ^a de clase $C^{(k+1)}$ y soporte compacto en $\mathbb{R}$ contenido en (a^{-1}, a), tal que $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi^a(a^{-j}u) \equiv 1$. Pongamos $\psi_j^a(u) = \psi^a(a^{-j}u)$ para $j = 1, 2, \ldots$, y $\psi_0^a = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^a$. Por el cálculo funcional anterior, existe $\psi_j^a(A)$ en $\mathcal{B}(X)$, para todo $j \geq 0$.

Definición 1.1. *Para $\theta > 0$ y $1 \leq q \leq \infty$ diremos que $\xi \in X$ pertenece a $B^{\theta,q}(X)$ si y solo si $\sum_{j=0}^{\infty} a^{j\theta q} \|\psi_j^a(A)\xi\|^q < \infty$.*

(Si $q = \infty$ la suma en j debe ser sustituida por $\sup_{j \geq 0} a^{j\theta} \|\psi_j^a(A)\xi\|$.)

A $B^{\theta,q}(X)$ le llamaremos *espacio de Besov sobre X, asociado a A*. Éste es independiente tanto de a como de la función ψ^a [13]. Lo canónico es tomar $a = 2$ y entonces escribir ψ^2 como ψ. Así se hará salvo en la demostración del Teorema 2.1. No es difícil mostrar que $B^{\theta,q}(X)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma $\|\xi\|_{\theta,q} := (\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\theta q} \|\psi_j(A)\xi\|^q)^{1/q}$.

La definición es ciertamente una extensión pues resulta que $B^{\theta,q}(L_p(\mathbb{R}^n))$, asociado al laplaciano usual $\Delta := -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ sobre $\mathbb{R}^n$, o igualmente a su raíz cuadrada $\sqrt{\Delta}$, coincide asimismo con el espacio de Besov clásico sobre $\mathbb{R}^n$. Notemos que el semigrupo de Gauss está generado por $-\Delta$, así como el de Poisson lo está por $-\sqrt{\Delta}$.

La relación que acabamos de indicar entre semigrupos y operadores A no es casual sino profunda. Supongamos que el operador A es positivo sobre X, lo que en el caso (asumido) de satisfacer la propiedad $\mathcal{R}_\alpha$, se traduce en que 0 no pertenezca al espectro de A, $\sigma(A)$. Entonces se da la interpolación

$$(X, \mathcal{D}(A^m))_{\tau,q} = B^{m\tau,q}(X),$$

[13, p. 127]. Puesto que A genera el semigrupo de operadores acotados $T_t = e^{-tA}$ sobre X dado por el cálculo funcional $e^{-tA} := \exp(-t\,\cdot)(A)$ resulta de ahí que

$$B^{\theta,q}(X) = \mathrm{Lip}_{\theta,q}(X),$$

al menos cuando A es positivo.

La identidad $\mathrm{Lip}_{\theta,q}(X) = B^{\theta,q}(X)$ no parece haber sido hecha notar expresamente con antelación (también puede que se considere parte del folklore que todo conocedor del tema supone). De hecho, la conexión con semigrupos, en este contexto, apenas ha sido esbozada [9, p. 203], [13, p. 129]. No vamos a insistir aquí en un punto de vista que se puede adoptar, y que consiste en tomar los semigrupos holomorfos, en relación con medias de Riesz y espacios de Besov, como punto de partida (éste será objeto de un trabajo subsiguiente). Pero sí que es objeto de esta nota resaltar el papel que el AC^k-cálculo puede desempeñar en la consideración de los espacios de Besov.

Terminamos esta introducción con una sencilla observación que se empleará en la sección 3. Pongamos $\rho_u(A) = u^{-k}R_u^k$, con $k > \alpha+1$. Se tiene que $\lim_{u\to\infty} \rho_u(A)\xi = \xi$, $\forall \xi \in X$ (ver [13, p. 119]).

Lema 1.2. *Sea V subespacio denso de X. Entonces $\bigcup_{u>0} \rho_u(A)(V)$ es denso en $B^{\theta,q}(X)$. En particular, si V es $\rho_u(A)$-invariante entonces V es denso en $B^{\theta,q}(X)$.*

Demostración. Sea $\sigma = \sup_{u>0} \|\rho_u(A)\|$. Dados $\xi \in B^{\theta,q}(X)$ y $\varepsilon > 0$, tomamos N tal que $(1+\sigma)^q \sum_{N+1}^{\infty} 2^{j\theta q}\|\psi_j(A)\xi\|^q < \varepsilon^q$ y para ese N, escogemos u de manera que $\|\xi - \rho_u(A)\xi\| \le (\sum_{j=0}^{N} 2^{j\theta q}\|\psi_j(A)\|^q + 1)^{-(1/q)}\varepsilon$. Entonces se obtiene fácilmente que $\|\xi - \rho_u(A)\xi\|_{\theta,q} < 2\varepsilon$.

Asimismo, $\psi_j\rho_u = 0$ siempre que $u < 2^{j-1}$; por eso existe J tal que $\psi_j(A)\rho_u(A)\xi = 0$ para todo $j > J$. Ahora basta tomar $v \in V$ con la condición

$$\|\xi - v\| \le \sigma^{-1}\Big(\sum_{j=0}^{J} 2^{j\theta q}\|\psi_j(A)\|^q + 1\Big)^{-(1/q)}\varepsilon$$

para obtener que $\|\rho_u(A)\xi - \rho_u(A)v\|_{\theta,q} < 2\varepsilon$. □

2. Expresiones integrales de los espacios de Besov

Existen situaciones específicas en las que resulta apropiado estudiar espacios de Besov sobre estructuras subyacentes más generales que $\mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{T}^n$, o para operadores distintos de los convencionales laplacianos. Entonces la representación del espacio depende de los objetivos del estudio a desarrollar, de modo que adopta la forma de expresión integral o en serie de tipo diádico, según convenga. En tales casos no suele hacerse mención del hecho de que ambas aproximaciones plasman el mismo concepto, o bien, cuando se trata de probar equivalencias de normas, esto se hace con razonamientos ad hoc, e.g., en [1], [4], [6], [8], [10].

Por otra parte resulta que, con frecuencia (e. g., en todas las referencias justamente citadas), los operadores A que basan la construcción del espacio de Besov correspondiente cumplen la condición $\mathcal{R}_\alpha$ para algún α, y las observaciones hechas en la introducción son de aplicación. Así por ejemplo, en esta sección se da el teorema, resultado principal del artículo, que muestra que hay una infinidad de normas equivalentes en $\mathrm{Lip}_{\theta,q}(X)$ ó $B^{\theta,q}(X)$ a añadir a las normalmente utilizadas. La demostración combina argumentos conocidos, adaptándolos al caso gracias a las buenas propiedades que satisface el cálculo con funciones de $AC^{(k)}$.

Teorema 2.1. *Sean X, H y A como antes, de modo que se satisface la propiedad $\mathcal{R}_\alpha$, $\alpha \geq 0$. Supongamos que $m > \theta > 0$, $k > \alpha$ (k entero), y $f \in AC_1^{(k+1)}$ son tales que $u^{-m} f(u) \in AC^{(k+1)}$. Entonces, para $1 \leq q < \infty$, el espacio de Besov $B^{\theta,q}(X)$ coincide con el subespacio de X formado por los vectores ξ que verifican*

$$\int_0^\infty t^{-\theta q} \|f(tA)\xi\|^q \, \frac{dt}{t} < \infty.$$

De hecho

$$\|\xi\|_X + \Big(\int_0^\infty t^{-\theta q} \|f(tA)\xi\|^q \, \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{q}}$$

es una norma en $B^{\theta,q}(X)$ equivalente a $\|\xi\|_{\theta,q}$.

Demostración. Sea f como en el enunciado y tal que $f(u) \neq 0$ en un abierto conteniendo $[a^{-2}, a^2]$, con $a > 1$. Tomemos ψ^a como en la introducción. Para $1 \leq \lambda \leq a$ consideremos $f_\lambda(u) := f(\lambda u)$. Claramente $f_\lambda(u) \neq 0$ si $u \in (a^{-1}, a)$, y entonces $\psi_j^a(u) = g_\lambda(a^{-j}u) f(a^{-j}\lambda u)$, $j = 1, 2, \ldots$, con $g_\lambda := \psi^a / f_\lambda \in AC^{k+1}$.

Por la sub-homogeneidad del cálculo funcional sobre X con elementos de $AC^{(k+1)}$ tenemos que, si $\xi \in X$,

$$\|\psi_j^a(A)\xi\| = \|g_\lambda(a^{-j}A) f_\lambda(a^{-j}A)\xi\| \leq C \|f_\lambda(a^{-j}A)\xi\|,$$

de donde

$$(a-1) \sum_{j=1}^\infty a^{j\theta q} \|\psi_j^a(A)\xi\|^q \leq C^q \sum_{j=1}^\infty a^{j\theta q} \int_1^a \|f(a^{-j}\lambda A)\xi\|^q \, d\lambda$$

$$\leq a^{\theta q+1} C^q \sum_{j=1}^\infty \int_{a^{-j}}^{a^{-j+1}} t^{-\theta q} \|f(tA)\xi\|^q \, \frac{dt}{t} \leq C \int_0^\infty t^{-\theta q} \|f(tA)\xi\|^q \, \frac{dt}{t}$$

(notemos que $\|f(sA)\xi\|$ es continua en s, en particular es medible).

Para la desigualdad inversa adaptamos el argumento dado en [8, Theorem 5.1]. Sea $b > 1$ y consideremos ψ_j^b como antes. Tomando $\varphi \in C_c^{(k+1)}(\mathbb{R})$ con $\varphi(u) = 1$ en (b^{-1}, b) tenemos que $\varphi\psi^b = \psi^b$. Si $f(u) = u^m h(u)$ con $h \in AC^{(k+1)}$ entonces, para todo $t > 0$, $\|f(tA)\psi_j^b(A)\xi\| = t^m b^{jm} \|h(tA)(b^{-j}A)^m \varphi(b^{-j}A)\psi_j^b(A)\xi\| \leq C t^m b^{jm} \|\psi_j^b(A)\xi\|$, siendo la desigualdad (con C independiente de t y de j) consecuencia de la sub-homogeneidad del $AC^{(k+1)}$-cálculo. Por otra parte, y por la misma razón, $\|f(tA)\psi_j^b(A)\xi\| \le C\|\psi_j^b(A)\xi\|$. En definitiva, se mejora la cota como $\|f(tA)\psi_j^b(A)\xi\| \le C\,\mathrm{mín}\{1, t^m b^{jm}\}\|\psi_j^b(A)\xi\|$.

Ahora, puesto que $\xi = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^b(A)\xi$ en X (véase [13, p. 121]), resulta que para cada $t \in (b^{-k-1}, b^{-k})$,

$$\|f(tA)\xi\| \le \sum_{j=0}^{\infty} \|f(tA)\psi_j^b(A)\xi\| \le C\sum_{j=0}^{k} t^m b^{jm}\|\psi_j^b(A)\xi\| + C\sum_{j=k+1}^{\infty} \|\psi_j^b(A)\xi\|$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned}
&\Big(\int_0^1 t^{-\theta q}\|f(tA)\xi\|^q\,\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad\le C\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\int_{b^{-k-1}}^{b^{-k}}\Big(\sum_{j=0}^{k} t^{m-\theta} b^{jm}\|\psi_j^b(A)\xi\| + \sum_{j=k+1}^{\infty} t^{-\theta}\|\psi_j^b(A)\xi\|\Big)^q\,\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad\le C(\log b)^{\frac{1}{q}}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{k} b^{(\theta-m)(k-j)} b^{\theta j}\|\psi_j^b(A)\xi\|\Big)^q\Big]^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad + C(\log b)^{\frac{1}{q}}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=k+1}^{\infty} b^{-\theta(j-k)} b^{\theta j}\|\psi_j^b(A)\xi\|\Big)^q\Big]^{\frac{1}{q}} \\
&\quad\le C(\log b)^{\frac{1}{q}}\Big[\Big(\sum_{k=0}^{\infty} b^{(\theta-m)k}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b^{\theta jq}\|\psi_j^b(A)\xi\|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad + \Big(\sum_{k=0}^{\infty} b^{-\theta k}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b^{\theta jq}\|\psi_j^b(A)\xi\|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\Big] \\
&\quad\le C\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b^{\theta jq}\|\psi_j^b(A)\xi\|^q\Big)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

verificándose la penúltima desigualdad por convolución $l_1 - l_q$ de las sucesiones correspondientes.

Además

$$\begin{aligned}
\Big(\int_1^{\infty}\|f(tA)\xi\|^q\,\frac{dt}{t^{1+\theta q}}\Big)^{\frac{1}{q}} &\le \big(\sup_{t>0}\|f(tA)\xi\|\big)\Big(\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^{1+\theta q}}\Big)^{\frac{1}{q}} \le C\|\xi\| \\
\le C\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b^{-j\theta q'}\Big)^{\frac{1}{q'}}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b^{j\theta q}\|\psi_j^b(A)\xi\|^q\Big)^{\frac{1}{q}} &\le C\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b^{j\theta q}\|\psi_j^b(A)\xi\|^q\Big)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

donde q' es tal que $1/q + 1/q' = 1$.

Por último obsérvese que, dada f como en el enunciado, no idénticamente nula, para $[c, d]$ en el interior del soporte de f, con λ cumpliendo $c < \lambda < d$, y a tal que $1 < a < \mathrm{mín}\{\lambda c^{-1}, \lambda^{-1} d\}$ se tiene que $[a^{-1}, a]$ queda en el interior del soporte de f_λ, y que $\int_0^{\infty} t^{-\theta q}\|f_\lambda(tA)\xi\|^q\,\frac{dt}{t} \sim \int_0^{\infty} t^{-\theta q}\|f(tA)\xi\|^q\,\frac{dt}{t}$. □

Observaciones.

(1) En la demostración del teorema se prueba de hecho que otra norma equivalente a $\|\xi\|_{\theta,q}$ en el espacio de Besov $B^{\theta,q}(X)$ es la dada por

$$\|\xi\|_X + \Big(\int_0^\infty t^{-\theta q} \sup_{0\le s\le t} \|f(tA)\xi\|^q \,\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

A propósito, una consecuencia del teorema es que las anteriores expresiones, usando $f \in AC_1^{(k+1)}$, con o sin el supremo en $0 \le s \le t$, son también normas de *interpolación* (siempre que se satisfaga la propiedad $\mathcal{R}_\alpha$) [2].

(2) El caso $q = \infty$ también entra en el enunciado del teorema sin más que cambiar las normas L^q integrales con respecto a la medida $\frac{dt}{t}$ por la del supremo en $t > 0$, como es usual.

(3) Entre las funciones a las cuales se aplica el teorema, es decir, aquellas f de $AC_1^{(k+1)}$ tales que $u^{-m}f(u) \in AC^{(k+1)}$, tenemos los siguientes ejemplos : $f_1 = (\exp(-u)-1)^m$, $f_2 = \exp(-u^m)-1$, $f_3 = u^m\exp(-u)$, $f_4 = u^{2m}\exp(-u^2)$, y otras semejantes.

Eso es muy claro con f_3 y f_4. Que $g(u) = \frac{\exp(-u)-1}{u} \in AC^{(k+1)}$, puede verse usando su desarrollo de Taylor en $u = 0$ para la finitud de la integral $\int_0^1$, y directamente para la de $\int_1^\infty$. Entonces $u^{-m}f_1(u) = g(u)^m \in AC^{(k+1)}$ por ser $AC^{(k+1)}$ álgebra. Por otro lado, como $AC^{(k+1)}$ es invariante por transformaciones $u \mapsto u^m$, se sigue que $u^{-m}f_2(u) = g(u^m) \in AC^{(k+1)}$.

Los anteriores ejemplos dan lugar a las funciones de operador $f(A)$ usualmente consideradas en las diversas definiciones, clásicas o abstractas, de espacios de Besov siempre que $-A$ genere un conveniente semigrupo (holomorfo) de operadores. Este es el caso bajo la hipótesis que estamos asumiendo, a saber, la condición $\mathcal{R}_\alpha$ de acotación uniforme de las medias de Riesz asociadas a A. Pues $e^{-z(\cdot)} \in AC^{(k+1)}$, $\Re z > 0$, y así el cálculo funcional define un C_0-semigrupo holomorfo generado por $-A$ (comprobación sencilla). De esta forma el teorema anterior prueba *directamente* que $\mathrm{Lip}_{\theta,q}(X) = B^{\theta,q}(X)$, y para operadores no necesariamente positivos. En particular esto se aplica a espacios de Besov $B_p^{\theta,q}(\mathcal{M})$ definidos sobre variedades de Riemann compactas $\mathcal{M}$ o grupos de Lie estratificados $\mathcal{M} = G$, a partir de semigrupos $T_t = e^{-t\mathcal{L}}$ en L^p generados por algún sub-laplaciano $\mathcal{L}$ «natural» sobre la variedad $\mathcal{M}$ ó grupo G.

Es decir, y permítase la insistencia en este punto, la equivalencia de las condiciones

$$\int_0^\infty t^{-\theta q}\big\|(e^{-t\sqrt{\mathcal{L}}}-I)^m\xi\big\|^q\,\frac{dt}{t} < \infty,$$

si $m > \theta$, por un lado;

$$\int_0^\infty \big(t^{m-\theta}\big\|(\sqrt{\mathcal{L}})^m e^{-t\sqrt{\mathcal{L}}}\xi\big\|\big)^q\,\frac{dt}{t} < \infty,$$

si $m > \theta$, ó

$$\int_0^\infty \big(t^{m-\frac{\theta}{2}}\big\|\mathcal{L}^m e^{-t\mathcal{L}}\xi\big\|\big)^q\,\frac{dt}{t} < \infty,$$

si $m > \theta/2$, por otro; y finalmente

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\theta q} \|\psi_j(\mathcal{L})\xi\|^q < \infty,$$

habitualmente consideradas en la literatura ([4], [6], [8], [10]) es consecuencia transparente del teorema, tomando f_1, f_2 y f_3 en las respectivas integrales. Notemos que esto genera de manera sencilla teoremas de multiplicadores en espacios de Besov sobre grupos estratificados [13, p. 129].

(4) Las normas (equivalentes) en $B^{\theta,q}(X)$ dadas por expresiones integrales del tipo $\|\xi\|_X + (\int_0^\infty t^{-\theta q}\|f(tA)\xi\|^q \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}$, admiten una escritura compacta, mediante el uso de operadores potenciales de Bessel.

Corolario 2.2. *Supóngase que $m > \theta > 0$, y $1 \leq q < \infty$. Entonces*

$$\eta(\xi) := \Big(\int_0^\infty t^{(m-\theta)q} \|(I+A)^m e^{-tA}\xi\|^q e^{-t}\, \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{q}},$$

$\xi \in X$, es una norma en $B^{\theta,q}(X)$ equivalente a $\|\xi\|_{\theta,q}$.

Demostración. La función $u \mapsto (1+u)^m(1+u^m)^{-1}$ pertenece a $AC_1^{(k+1)}$, $k > \alpha$, de donde se sigue que $\|(I+A)^m e^{-tA}\xi\| \leq C\|(I+A^m)e^{-tA}\xi\|$ y por tanto,

$$\begin{aligned}\eta(\xi) &\leq C\Big(\int_0^\infty t^{(m-\theta)q} \|e^{-tA}\xi\|^q e^{-t} \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{q}} + C\Big(\int_0^\infty t^{-\theta q} \|f(tA)\xi\|^q e^{-t}\, \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C\Gamma((m-\theta)q)^{\frac{1}{q}} \sup_{t>0} \|e^{-tA}\xi\| + C\Big(\int_0^\infty t^{-\theta q}\|f(tA)\xi\|^q\, \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{q}} \sim \|\xi\|_{\theta,q},\end{aligned}$$

por el teorema, siendo $f(u) = u^m e^{-u}$.

Recíprocamente, también la función $u \mapsto u^m(1+u)^{-m}$ está en $AC_1^{(k+1)}$, $k > \alpha$, y por eso $\|f(tA)\xi\| \leq Ct^m\|(I+A)^m e^{-tA}\xi\|$. Haciendo entonces como en el teorema, se obtiene

$$\begin{aligned}\Big(\int_0^\infty t^{-\theta q}\|f(tA)\xi\|^q\, \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}} &\leq \Big(\int_0^1 t^{-\theta q}\|f(tA)\xi\|^q\, \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{q}} + C\|\xi\|_X \\ &\leq C\Big(\int_0^1 t^{(m-\theta)q}\|(I+A)^m e^{-tA}\xi\|^q e^{-t}\, \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{q}} + C\|\xi\|_X.\end{aligned}$$

Además, puesto que

$$(I+A)^{-m}\xi = \int_0^\infty t^m e^{-t} e^{-tA}\xi\, \frac{dt}{t},$$

resulta

$$\xi = \int_0^\infty t^\theta e^{-t/q'} t^{-1/q'} t^{(m-\theta)} e^{-t/q} t^{-1/q} (I+A)^m e^{-tA}\xi\, dt,$$

si $(q')^{-1} + q^{-1} = 1$. Utilizando la desigualdad de Hölder si $q > 1$, o sacando el supremo correspondiente si $q = 1$, tenemos

$$\|\xi\|_X \leq \Gamma(q'\theta)^{1/q'} \Big(\int_0^\infty t^{(m-\theta)q}\|(I+A)^m e^{-tA}\xi\|^q e^{-t}\, \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

$\square$

La descripción del espacio de Besov sobre $\mathbb{R}^n$, mediante la norma integral definida por los potenciales de Bessel del laplaciano Δ (o equivalentemente, su raíz cuadrada), parece que es debida a Flett [5]. El mismo resultado, para sublaplacianos sobre grupos estratificados, fue demostrado por Saka [10]. Ambos teoremas son consecuencia del corolario anterior.

3. Espacio de Besov sobre el grupo de Heisenberg

Si el operador A tiene espectro discreto, con multiplicidades de los valores propios finitas, entonces los desarrollos ortogonales sobre H, originados a partir de su descomposición espectral, pueden tomarse alternativamente como base para la definición de los espacios de Besov en X asociados a A. Todas las familias ortogonales clásicas tienen cabida en este contexto, generando así su correspondiente espacio de Besov [13, p. 153], [9]. Vamos a seguir ese orden de ideas para describir espacios de Besov sobre el grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^n$ mediante las funciones de Hermite generalizadas.

Recordemos que el grupo de Heisenberg es $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ con la operación $(z,t) \cdot (w,s) = (z+w, \frac{1}{2}\Im(z \cdot \overline{w}))$. Considerado en $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{C}^n$ se llama *espacio de fases* y su estructura viene delimitada por la convolución «de torsión»

$$g \times h(z) = \int_{\mathbb{C}^n} g(z-w)h(w)^{(i/2)\Im(z\cdot\overline{w})}\, dw,$$

para la cual $L_1(\mathbb{C}^n)$ es un álgebra *no conmutativa*.

La familia de funciones de Hermite en $\mathbb{R}^n$ se define mediante $\Phi_\mu = h_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes h_{\mu_n}$, si $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{N}_0^n$, donde $h_k(t) = c_k \dfrac{d^k}{dt^k}[e^{-t^2}]e^{t^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (c_k es una constante de normalización). Se llama *función de Hermite generalizada* $\Phi_{\mu,\nu}$, sobre $\mathbb{C}^n$, a la transformada de Fourier-Wigner de Φ_μ y Φ_ν, es decir,

$$\Phi_{\mu,\nu}(z) = (2\pi)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot u}\Phi_\mu\Big(u + \frac{y}{2}\Big)\Phi_\nu\Big(u - \frac{y}{2}\Big)\, du,$$

si $z = x + iy$.

Espacio de Besov sobre el espacio de fases.

El operador diferencial elíptico $L = \Delta_z + \frac{|z|^2}{4} - i\sum_{j=1}^n (x_j \frac{\partial}{\partial y_j} - y_j \frac{\partial}{\partial x_j})$ satisface la propiedad $\mathcal{R}_\alpha$ con $\alpha > n - \frac{1}{2}$ [11, p. 152], y su espectro es $\{\lambda_k = 2k + n : k = 0, 1, 2, \ldots\}$, siendo el espacio N_k de vectores propios asignado a λ_k de dimensión infinita y con base ortonormal $\{\Phi_{\mu,\nu} : |\nu| = k, \mu \in \mathbb{N}_0^n\}$. Denotamos la proyección de $H = L_2(\mathbb{C}^n)$ sobre N_k mediante P_k y como $c_{\mu,\nu}$ los coeficientes de Fourier $(f|\Phi_{\mu,\nu})$, dada f en $L_2(\mathbb{C}^n)$. Se tiene

$$\begin{aligned} P_k f &= \sum_{|\nu|=k} \sum_\mu c_{\mu,\nu}\Phi_{\mu,\nu} \\ &= \sum_{|\nu|=k} f \times \Phi_{\nu,\nu} = f \times \sum_{|\nu|=k} \Phi_{\nu,\nu} = (2\pi)^{-n/2} f \times \varphi_k, \end{aligned}$$

donde φ_k es la función de Laguerre $\varphi_k = L_k^{n-1}(|z|^2/4)e^{-|z|^2/4}$ [12, p. 20]. Por tanto

$$f = \sum_{\mu}\sum_{\nu} c_{\mu,\nu}\Phi_{\mu,\nu} = (2\pi)^{-n/2}\sum_{k=0}^{\infty} f \times \varphi_k$$

y de aquí que para cada j la descomposición espectral de $\psi_j(L)f$ sea

$$\psi_j(L)f = \sum_{k=0}^{\infty}\psi_j(2k+n)\sum_{|\nu|=k}\sum_{\mu} c_{\mu,\nu}\Phi_{\mu,\nu} = \sum_{2^{j-1}<\lambda_k<2^{j+1}} \psi_j(2k+n) f \times \varphi_k.$$

Por densidad tenemos que la anterior igualdad se verifica para todo $f \in L_p(\mathbb{C}^n)$, si $1 \le p < \infty$ ($f \in C_0(\mathbb{C}^n)$ si $p = \infty$). Esta sencilla observación genera el siguiente corolario. Por $B_p^{\theta,q}(\mathbb{C}^n)$ entendemos el espacio de Besov sobre el espacio de fases $B^{\theta,q}(L_p(\mathbb{C}^n))$.

Corolario 3.1. *$B_p^{\theta,q}(\mathbb{C}^n)$ está formado por las funciones de $L_p(\mathbb{C}^n)$ que verifican*

$$\Big[\sum_{0}^{\infty} 2^{j\theta q}\Big(\int_{\mathbb{C}^n}\Big|\sum_{2^{j-1}<\lambda_k<2^{j+1}} \psi_j(2k+n) f \times \varphi_k(z)\Big|^p dz\Big)^{-\frac{q}{p}}\Big]^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

De hecho, la expresión que antecede coincide con la norma de $B_p^{\theta,q}(\mathbb{C}^n)$ definida por la descomposición $\{\psi_j\}$.

En el corolario el espacio de Besov está descrito en términos de las funciones de Laguerre. Las expansiones ortogonales vienen «encriptadas» en la convolución con aquellas. Si queremos que las funciones de Hermite generalizadas aparezcan explícitamente topamos con el problema de que $\sum_{\mu} c_{\mu,\nu}\Phi_{\mu,\nu}$ no tiene por qué converger en $L_p(\mathbb{C}^n)$. Entonces procedemos como sigue.

Sea $\mathcal{H}_f$ el espacio de combinaciones lineales finitas de funciones de Hermite generalizadas.

Corolario 3.2. *Para todo $\theta > 0$ y $1 \le p, q < \infty$, $\mathcal{H}_f \subseteq B_p^{\theta,q}(\mathbb{C}^n)$. Más aún, $B_p^{\theta,q}(\mathbb{C}^n)$ es la compleción de $\mathcal{H}_f$ en la norma*

$$\Big[\sum_{0}^{\infty} 2^{j\theta q}\Big\|\sum_{2^{j-1}<\lambda_k<2^{j+1}} \psi_j(2k+n)\sum_{|\nu|=k}\sum_{\mu\, finito} c_{\mu,\nu}\Phi_{\mu,\nu}\Big\|_p^q\Big]^{\frac{1}{q}}.$$

Demostración. Del hecho de que $h(\mathcal{L})\Phi_{\mu,\nu} = h(2|\nu|+n)\Phi_{\mu,\nu}$ para todo $h \in AC^{(k+1)}$ se deduce que $\mathcal{H}_f \subseteq B_p^{\theta,q}(\mathbb{C}^n)$ y que $\mathcal{H}_f$ es $\rho_u(A)$-invariante. Además $\mathcal{H}_f$ es denso en $L_p(\mathbb{C}^n)$ [12, p. 23]. Entonces el enunciado se sigue del Lema 1.2. □

Espacio de Besov sobre el grupo de Heisenberg.

Sobre el grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^n$ existe un único (salvo constante) operador diferencial invariante por traslaciones a izquierda y por rotaciones, y homogéneo de grado 2. Este operador, denotado por $\mathcal{L}$, se llama *sublaplaciano de Kohn* en $\mathbb{H}^n$. Está estrechamente ligado al operador L considerado antes y, aunque no es elíptico, satisface buenas estimaciones subelípticas. El espectro de $\mathcal{L}$ viene determinado por las representaciones irreducibles de $\mathbb{H}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$, o representaciones de Schrödinger $(\pi_\lambda)_{\lambda>0}$, dadas por $\pi_\lambda(z,t)\varphi(u) = e^{i\lambda t}e^{i\lambda(x\cdot u+\frac{1}{2}x\cdot y)}\varphi(u+y)$, si $(z,t) \in \mathbb{H}^n$, $\varphi \in$

$L_2(\mathbb{R}^n)$, $u \in \mathbb{R}^n$. Entonces, via el paso por la colección de operadores de Hermite escalonados $\pi_\lambda(\mathcal{L}) \equiv \Delta + \lambda^2\|\cdot\|^2$, se ve que las funciones-vectores propios de $\mathcal{L}$ son $e^{i\lambda t}\Phi_{\mu,\nu}(\sqrt{\lambda}z)$ de correspondientes valores propios $(2|\mu| + n)\lambda$. De manera que $\sigma(\mathcal{L})$ es $[0,\infty)$ «descompuesto» en rayos k-ésimos $\varrho_k = \{(2k+n)\lambda : \lambda \neq 0\}$. Es pues una parte discreta de rayos continuos. Para el análisis espectral del laplaciano $\mathcal{L}$ la herramienta básica es la noción de proyección espectral sobre cada rayo k-ésimo

$$Q_k : f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f * e_k^\lambda \, d\beta(\lambda), \quad L_2(\mathbb{H}^n) \to \varrho_k.$$

En la fórmula de Q_k, la convolución $f * e_k^\lambda$ es respecto al grupo $\mathbb{H}^n$, $e_k^\lambda(z,t) := e^{i\lambda t}\varphi_k(\sqrt{|\lambda|}z)$ para cada $(z,t) \in \mathbb{H}^n$, donde $\varphi_k(w) = (2\pi)^{n/2}\sum_{|\mu|=k}\Phi_{\mu,\mu}(w)$, $w \in \mathbb{C}^n$, y β es la medida sobre $\mathbb{R}$ dada por $d\beta(\lambda) = (2\pi)^{-n-1}|\lambda|^n \, d\lambda$.

Tenemos entonces que la descomposición L_2 de f viene dada como

$$f(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f * e_k^\lambda(z,t) \, d\beta(\lambda)$$

y que también

$$\psi_j(A)f = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j((2k+n)|\lambda|) f * e_k^\lambda \, d\beta(\lambda)$$

para todo $j = 0, 1, \ldots$. Si se quiere tratar con descomposiciones L_p se debe resolver primeramente la cuestión de que las proyecciones Q_k no están directamente definidas sobre $L_p(\mathbb{H}^n)$. Un análisis detallado del problema revela que Q_k es un operador del tipo Calderón-Zygmund, lo que ciertamente permite extenderlo a todo $L_p(\mathbb{H}^n)$ como operador acotado, pero *tenemos* que restringirnos a considerar $1 < p < \infty$, prescindiendo de los valores $p = 1$ ó ∞. Más aún, la expresión $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_j((2k+n)|\lambda|) f * e_k^\lambda \, d\beta(\lambda)$ define un operador acotado sobre $L_p(\mathbb{H}^n)$ (ver [12, p. 61]).

En segundo lugar, está la cuestión de la convergencia de la serie $\sum_{k=0}^{\infty}$. Para esto nos apoyamos en [12, p. 65].

Sea $\mathcal{Q}_f$ el subespacio de $L_p(\mathbb{H}^n)$ formado por las funciones que se escriben como $\sum_{k=1}^{N} c_k Q_k h$, $h \in L_p(\mathbb{H}^n)$ y denotemos por $B_p^{\theta,q}(\mathbb{H}^n)$ el espacio de Besov sobre $\mathbb{H}^n$ asociado al laplaciano de Kohn $\mathcal{L}$.

Corolario 3.3. *Para cada $\theta > 0$, $1 < p < \infty$, y $1 \leq q < \infty$, $Q_k f \in B_p^{\theta,q}(\mathbb{H}^n)$ para toda $f \in L_p(\mathbb{H}^n)$. Más aún, $B_p^{\theta,q}(\mathbb{H}^n)$ es la compleción de $\mathcal{Q}_f$ en la norma*

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\theta q}\Big\| \sum_{k \text{ finito}} \int_{2^{j-1}<|\lambda|(2k+n)<2^{j+1}} \psi_j((2k+n)|\lambda|) f * e_k^\lambda \, d\beta \Big\|_p^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Demostración. Por [12, Corollary 2.2.6] $\mathcal{Q}_f$ es denso en $L_p(\mathbb{H}^n)$. Además, si $k = 0, 1, \ldots,$ y $u > 0$ entonces

$$\rho_u(\mathcal{L})Q_k h = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_u((2k+n)|\lambda|) h * e_k^\lambda \, d\beta(\lambda) = Q_k M h,$$

según [12, p. 61], donde $Mh \in L_p(\mathbb{H}^n)$, por ser $\lambda \to \rho_u((2k+n)|\lambda|)$ un L_p-multiplicador acotado sobre $\mathbb{R}^n$. Tenemos que $Q_k h$ es $\rho_u(\mathcal{L})$-invariante. El resto se sigue del Lema 1.2. $\square$

Referencias

[1] H. Bahouri, P. Gérard y C.-J. Xu, Espaces de Besov et estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg, *J. Anal. Math.* **82** (2000), 93–118.

[2] P. L. Butzer y H. Berens, *Semi-groups of operators and approximation*, Springer-Verlag, Nueva York, 1967.

[3] P. L. Butzer, R. J. Nessel y W. Trebels, Multipliers with respect to spectral measures in Banach spaces and approximation I, *J. Approx. Theory* **8** (1973), 335–356.

[4] T. Coulhon y L. Saloff-Coste, Semi-groupes d'opérateurs et espaces fonctionnels sur les groupes de Lie, *J. Approx. Theory* **65** (1991), 176–199.

[5] T. M. Flett, Temperatures, Bessel potentials and Lipschitz spaces, *Proc. London Math. Soc. (3)* **22** (1971), 385–451.

[6] G. B. Folland, Lipschitz classes and Poisson integrals on stratified groups, *Studia Math.* **66** (1979), 37–55.

[7] J. E. Galé y T. Pytlik, Functional calculus for infinitesimal generators of holomorphic semigroups, *J. Funct. Anal.* **150** (1997), 307–355.

[8] A. Jensen y S. Nakamura, Mapping properties of functions of Schrödinger operators between L^p spaces and Besov spaces, en *Spectral and scattering theory and applications*, Adv. Stud. Pure Math. **23**, Math. Soc. Japan, Tokio (1994), 187–209.

[9] J. Peetre, *New thoughts on Besov spaces equations*, Duke Univ. Math. Series **1**, Duke University, Durham, N.C., 1976.

[10] K. Saka, Besov spaces and Sobolev spaces on nilpotent Lie groups, *Tôhoku Math. J.* **31** (1979), 383–437.

[11] S. Thangavelu, *Lectures on Hermite and Laguerre expansions*, Mathematical Notes **42**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.

[12] S. Thangavelu, *Harmonic analysis on the Heidenberg group*, Progress in Mathematics **159**, Birkhäuser Boston, Boston, 1998.

[13] H. Triebel, *Fourier analysis and function spaces*, Teubner, Leipzig, 1977.

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, Edificio de Matemáticas, Ciudad Universitaria s/n, 50009 Zaragoza, Spain

Correo electrónico: gale@posta.unizar.es