MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE
JOSÉ JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNÁNDEZ
(Luis Español y Juan L. Varona, editores),
Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja,
Logroño, Spain, 2001.

EL PRINCIPIO DE CALDERÓN-ZYGMUND

CARLOS PÉREZ Y RODRIGO TRUJILLO-GONZÁLEZ

Este artículo está dedicado a la memoria de J. J. (Chicho) Guadalupe

Abstract. In this note we show some estimates for multilinear commutators with vector symbol $b = (b_1, \dots, b_m)$ defined by the expression

$$T_{\vec{b}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\prod_{j=1}^{m} (b_j(x) - b_j(y)) \right] K(x,y) f(y)\, dy,$$

where K is the kernel of any Calderón-Zygmund operator. We generalize and sharpen both classical results from Coifman, and Coifman, Rochberg and Weiss; and also more recent results from the first author. We show that these operators are intimately related to certain appropriate Orlicz type maximal function of the form $M_{L(\log L)^\alpha}$ where the number α is related to the symbol $\vec{b}$.

Existe un principio no muy bien establecido en la teoría clásica de Calderón-Zygmund que de forma general afirma que todo operador integral singular está controlado, en algún sentido, por un operador maximal apropiado. El ejemplo clásico lo proporcionan los operadores de Calderón-Zygmund, los cuales, como es bien sabido, están controlados por el operador maximal de Hardy-Littlewood M. Quizás la mejor forma de expresar este principio es por medio de la siguiente desigualdad debida a Coifman [2]. Sea T un operador de Calderón-Zygmund (ver [1], [4], [6]). Sea $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$; entonces existe una constante C que depende de la constante A_∞ de w de tal manera que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)\, dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p w(x)\, dx. \tag{1}$$

También existe una versión débil de esta desigualdad, estableciendo que, bajo las mismas condiciones, se tiene que

$$\sup_{t>0} t^p\, w(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > t\}) \le C \sup_{t>0} t^p\, w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}). \tag{2}$$

Este tipo de desigualdades engloba una gran cantidad de información sobre el comportamiento de estos operadores. Por ejemplo, para $p > 1$ y $w \in A_p$ podemos aplicar el teorema de Muckenhoupt para concluir que T es un operador acotado en $L^p(w)$. De la misma forma, si $w \in A_1$ se tiene que T es un operador acotado de $L^1(w)$ en $L^{1,\infty}(w)$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 42B20, 42B25.
Key words and phrases. Singular integral operators, maximal functions, commutators, vector valued singular integral operators, A_p weights.

Por otro lado, la desigualdad (1), combinada con algunas desigualdades precisas con dos pesos del operador maximal de Hardy-Littlewood ([8]), es la clave para establecer la siguiente desigualdad óptima en el rango $p > 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)\, dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M^{[p]+1} w(x)\, dx.$$

Observamos que aquí *no* estamos imponiendo condición alguna sobre el peso w. Este resultado fue establecido en [7] generalizando algunos resultados parciales de M. Wilson en [15]. Se puede ver aquí reflejado la relevancia de (1) pues el método de M. Wilson, que no usa (1), sólo se puede aplicar a operadores integrales singulares de convolución y con núcleos C^∞.

Existen en la literatura otros ejemplos donde el principio de Calderón-Zygmund subyace. Quizás el más parecido a (1) es el siguiente resultado de Muckenhoupt-Wheeden que establece el control de los operadores integrales fraccionarios por sus correspondientes maximales fraccionarios:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^p w(x)\, dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} (M_\alpha f(x))^p w(x)\, dx. \tag{3}$$

donde $0 < \alpha < n$ y donde, como antes, $w \in A_\infty$ y la constante C depende de la constante A_∞ de w.

En este artículo mostramos otros ejemplos de este principio para otros operadores que son más singulares que los arriba mencionado.

Para $m = 0, 1, \ldots$, consideramos el *conmutador* m-ésimo de

$$T_b^m f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^m K(x,y) f(y)\, dy, \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Motivados por el conmutador de Calderón, estos operadores fueron definidos por Coifman, Rochberg y Weiss en [3] donde se prueba que están acotados en $L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando b pertenece al espacio BMO de John-Nirenberg de funciones de oscilación media acotada.

En [10] se prueba que el operador maximal que controla a T_b^m es $M_{L(\log L)^m}$. Se puede probar que este operador, que es un caso especial de la definición (8), es comparable puntualmente al operador maximal de Hardy-Littlewood iterado $m+1$ veces, esto es,

$$M_{L(\log L)^m} \approx M^{m+1} = \overbrace{M \circ \cdots \circ M}^{(m+1 \text{ veces})}.$$

De forma precisa se tiene que existe una constante C que depende de la constante A_∞ de w tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_b^m f(x)|^p w(x)\, dx \le C\, \|b\|_{\mathrm{BMO}}^{pm} \int_{\mathbb{R}^n} (M^{m+1} f(x))^p w(x)\, dx. \tag{4}$$

De forma similar, el mismo principio de Calderón-Zygmund se obtuvo en [10] para el conmutador *no lineal* N definido por R. Rochberg y G. Weiss en [13] dado por

$$f \to Nf = T(f \log|f|) - (Tf)\log|Tf|.$$

En este caso, el operador maximal que lo controla es M^2: existe una constante C que depende de la constante A_∞ de w tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Nf(x)|^p w(x)\,dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} (M^2 f(x))^p w(x)\,dx. \tag{5}$$

En esta nota presentamos estimaciones similares para operadores multilineales de la forma

$$T_{\vec{b}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\prod_{j=1}^{m} (b_j(x) - b_j(y))\right] K(x,y) f(y)\,dy, \tag{6}$$

donde K es el núcleo de cualquier operador integral singular de Calderón-Zygmund T y el vector $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ está definido con funciones localmente integrables.

En [11] obtenemos una versión de la desigualdad de Coifman (1) para estos operadores multilineales $T_{\vec{b}}$. Consideramos en nuestro estudio la siguiente clase de funciones con mayor control exponencial de sus oscilaciones. Para $p \ge 1$ definimos el espacio $\mathrm{Osc}_{\exp L^p}$ por

$$\mathrm{Osc}_{\exp L^p} = \{f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathrm{osc}_{\exp L^p}} < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_{\mathrm{osc}_{\exp L^p}} = \sup_Q \|f - f_Q\|_{\exp L^p, Q}$$

toman el supremo sobre todos los cubos Q de lados paralelos a los ejes. Como es costumbre, $f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f$ denota el promedio de f sobre Q.

Denotamos por $\|g\|_{\exp L^p, Q}$ el promedio de g en el cubo Q con respecto a la función de Young $\Phi(t) = e^{t^p} - 1$. En general, para una función de Young arbitraria Φ, el Φ-promedio de una función f sobre un cubo Q viene definido por

$$\|f\|_{\Phi,Q} = \|f\|_{\Phi(L),Q} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 \,:\, \frac{1}{|Q|}\int_Q \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \le 1\right\}, \tag{7}$$

al cual le asociamos el operador maximal $M_\Phi = M_{\Phi(L)}$

$$M_\Phi f(x) = \sup_{Q \ni x} \|f\|_{\Phi,Q}, \tag{8}$$

donde el supremo lo tomamos sobre todos los cubos que contienen a x (ver [8] para estudiar propiedades y aplicaciones de estos operadores).

Observemos que del teorema de John-Nirenberg se deduce que $\mathrm{Osc}_{\exp L^1} = \mathrm{BMO}$. También se verifica que $\mathrm{Osc}_{\exp L^p} \subsetneq \mathrm{BMO}$ para todo $p > 1$.

En adelante supondremos que el vector símbolo $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ pertenece a la clase

$$\mathrm{Osc}_{\exp L^{r_1}} \times \cdots \times \mathrm{Osc}_{\exp L^{r_m}}$$

donde $r_j \ge 1$ para cada $j = 1, \ldots, m$. Para simplificar la notación, escribiremos

$$\|\vec{b}\| = \prod_{j=1}^{m} \|b_j\|_{\mathrm{osc}_{\exp L^{r_j}}}$$

y

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m}.$$

Nuestra versión de la desigualdad de Coifman (1) es la siguiente.

Teorema 1. *Sea $0 < p < \infty$ y sea $w \in A_\infty$. Sea $T_{\vec{b}}$ el conmutador (6) con $\vec{b}$ como hemos fijado antes. Entonces existe una constante C, que depende de la constante A_∞ de w, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_{\vec{b}} f(x)|^p \, w(x) \, dx \leq C \, \|\vec{b}\|^{pm} \int_{\mathbb{R}^n} (M_{L(\log L)^{1/r}} f(x))^p \, w(x) \, dx. \tag{9}$$

Resaltamos que no se sabía siquiera que estos operadores estuvieran acotados en $L^2(R^n)$. La desigualdad (9) muestra que el operador maximal $M_{L(\log L)^{1/r}}$ es el que controla al conmutador multilineal $T_{\vec{b}}$. Observamos que obviamente se tiene que $M_{L(\log L)^{1/r}} \leq M_{L(\log L)^m}$, el cual, ya comentamos antes, es comparable a M^{m+1}.

Como ya hemos dicho, la desigualdad (9) es una versión generalizada del conocido resultado de Coifman de [2]. Sin embargo, el método que usamos en [11] es diferente y está basado en una estimación puntual que podemos expresar de forma general como

$$M_\delta^\#(T_{\vec{b}} f)(x) \leq C \|\vec{b}\| \left[M_{L(\log L)^{1/r}}(f)(x) + R(f)(x) \right] \tag{10}$$

donde δ es un número positivo suficientemente pequeño. R denota cierto operador «residuo» menos singular que $M_{L(\log L)^{1/r}}$. Para poder entender mejor esta desigualdad, comentaremos que (10) es una versión más general de la siguiente desigualdad puntual probada en [9]:

$$M_\delta^\#([b, T]f)(x) \leq C \|b\|_{\mathrm{BMO}} \left[M^2 f(x) + M_\epsilon(Tf)(x) \right],$$

donde $0 < \delta < \epsilon$. En este caso el operador «residuo» es $R(f) = M_\epsilon(Tf)$ de tal forma que si tomamos $\epsilon < 1$, este operador es menos singular que M^2 ya que $M_\epsilon(Tf)$ es de tipo débil $(1, 1)$ mientras que M^2 verifica una estimación más fuerte de tipo débil $L \log L$. Estas desigualdades puntuales son variaciones de la bien conocida de Strömberg ([14, p. 417]). No obstante, este resultado de Strömberg no es suficientemente preciso para deducir los resultados presentados en este trabajo, incluso en los casos más sencillos.

Razonando como en [10, Theorem 2], del Teorema 1 se sigue la siguiente desigualdad para pesos generales.

Teorema 2. *Sea $1 < p < \infty$ y $T_{\vec{b}}$ como en el Teorema 1. Entonces, existe una constante C tal que, para cualquier peso w,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_{\vec{b}} f(x)|^p w(x) \, dx \leq C \|\vec{b}\|^{pm} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M^{(1/r+1)p+1} w(x) \, dx.$$

Destacamos que el número de iteraciones de la función maximal necesarias en el último teorema es óptimo como puede comprobarse en [10, Section 5]. De hecho, de la demostración del Teorema 2 se sigue una estimación más precisa:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_{\vec{b}} f(x)|^p \, w(x) \, dx \leq C \|\vec{b}\|^{pm} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, M_{L(\log L)^{(1/r+1)p-1+\epsilon}}(w)(x) \, dx$$

donde $\epsilon > 0$, siendo el resultado falso para $\epsilon = 0$.

La estimación puntual (10) se usa también para probar el siguiente resultado de tipo débil en el espíritu de (2).

Teorema 3. *Sea $T_{\vec{b}}$ como en el Teorema 1, $w \in A_\infty$ y $\Phi(t) = t \log^{1/r}(e + t)$. Entonces, existe una constante positiva C, que depende de la constante A_∞ de w, tal que*

$$\sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(\frac{1}{t})} w\big(\{y \in \mathbb{R}^n : |T_{\vec{b}} f(y)| > t\}\big) \leq C \sup_{t>0} \frac{1}{\Phi(\frac{1}{t})} w\big(\{y \in \mathbb{R}^n : M_\Phi(\|\vec{b}\| \, f)(y) > t\}\big).$$

Este resultado está íntimamente ligado al hecho probado en [9] que afirma que los conmutadores con símbolos en BMO no son operadores de tipo débil $(1,1)$.

Para finalizar mostraremos otra variante del principio de Calderón-Zygmund. En efecto, en [12] se obtiene una versión *vectorial* de la desigualdad de Coifman (1). Para ser precisos sea T un operador de Calderón-Zygmund como antes. Para $q > 0$ definimos su extensión vectorial

$$T_q f(x) = |Tf(x)|_q = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |Tf_j(x)|^q \right)^{1/q}.$$

El resultado principal es el siguiente.

Teorema 4. *Sea $1 < q < \infty$, $0 < p < \infty$, y sea $w \in A_\infty$. Entonces, existe una constante C, que depende de la constante A_∞ de w, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (T_q f(x))^p \, w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M(|f|_q)(x))^p \, w(x)\, dx. \tag{11}$$

De forma similar se tiene que existe una constante C, que depende de la constante A_∞ de w, de tal manera que

$$\|T_q f\|_{L^{p,\infty}(w)} \leq C \, \|M(|f|_q)\|_{L^{p,\infty}(w)}. \tag{12}$$

Destacamos que no está nada claro como probar este resultado usando las técnicas clásicas de [2]. Nuestro método consiste en usar una desigualdad puntual de la forma

$$M_\delta^{\#}(T_q f)(x) \leq C M(|f|_q)(x) \tag{13}$$

donde $0 < \delta < 1$. Cuando $\delta = 1$ la desigualdad (13) es falsa y el término de la derecha se reemplaza por $M(|f|_q^r)(x)^{1/r}$, $r > 1$. Es probable que en este caso se supiera la desigualdad, pero no es suficientemente precisa para deducir nuestros resultados.

Referencias

[1] M. Christ, *Lectures on singular integral operators*, Reg. Conferences Series in Math. **77**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[2] R. Coifman, Distribution function inequalities for singular integrals, *Proc. Acad. Sci. U.S.A.* **69** (1972), 2838–2839.

[3] R. Coifman, R. Rochberg y G. Weiss, Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, *Ann. of Math (2)* **103** (1976), 611–635.

[4] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[5] J. García-Cuerva y J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North Holland Math. Studies **116**, North Holland, Amsterdam, 1985.

[6] J. L. Journé, *Calderón-Zygmund operators, pseudo-differential operators, and the Cauchy integral of Calderón*, Lecture Notes in Math. **994**, Springer-Verlag, Nueva York, 1983.

[7] C. Pérez, Weighted norm inequalities for singular integral operators, *J. London Math. Soc.* **49** (1994), 296–308.

[8] C. Pérez, On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted L^p-spaces with different weights, *Proc. London Math. Soc. (3)* **71** (1995), 135–157.

[9] C. Pérez, Endpoint estimates for commutators of singular integral operators, *J. Funct. Anal.* **128** (1995), 163–185.

[10] C. Pérez, Sharp estimates for commutators of singular integrals via iterations of the Hardy-Littlewood maximal function, *J. Fourier Anal. Appl.* **3** (1997), 743–756.

[11] C. Pérez y R. Trujillo-González, Sharp weighted estimates for multilinear commutators, aparecerá en *J. London Math. Soc.*

[12] C. Pérez y R. Trujillo-González, Sharp weighted estimates for vector-valued singular integral operators, prepublicación.

[13] R. Rochberg y G. Weiss, Derivatives of analytic families of Banach spaces, *Ann. of Math. (2)* **118** (1983), 315–347.

[14] A. Torchinsky, *Real variable methods in harmonic analysis*, Academic Press, Nueva York, 1988.

[15] J. M. Wilson, Weighted norm inequalities for the continuos square functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **314** (1989), 661–692.

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid, Spain
Correo electrónico: `carlos.perez@uam.es`

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna, 38271 La Laguna, Tenerife, Spain
Correo electrónico: `rotrujil@ull.es`