Juegos Matemáticos
Una Sucesión Matemática Curiosa
A Curious Mathematical Sequence

Marco Vinicio Vásquez Bernal

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen IV, Número 1, pp. 141–148, ISSN 2174-0410
Recepción: 9 Abr'13; Aceptación: 20 Dic'13

1 de abril de 2014

Resumen

Existe una Sucesión de números naturales, que inician en cero y va aumentando cada vez el entero correspondiente al orden del elemento de la misma, que tiene un comportamiento a primera vista curioso, mas al realizar un estudio de la misma se entiende a cabalidad este comportamiento. La sucesión genera además ciertos resultados interesantes, como el poder determinar resultados para la potencia de cualquier número entero, en función de sus elementos.

Palabras Clave: Sucesión, elemento, serie, potencia.

Abstract

There exists a sequence of natural numbers, starting at zero and increases every time the integer corresponding to the order of the same element which have curious properties that are fully understood after a study of the same . The sequence also generates some interesting identities such as one that determine the powers of any integer as a function of the elements of the sequence.

Keywords: Sequence, element, summation, power.

1. Introducción

Las sucesiones matemáticas se construyen partiendo de elementos base y generando los sucesivos con alguna regla y con operaciones básicas que generalmente responden al orden de cada elemento, por tanto siempre existirá una relación entre los elementos, más en la mayoría de estas sus elementos no presentan algún resultado que genere interés alguno.

Se ha descubierto una sucesión de números naturales, que siendo de fácil construcción, genera elementos que sí brindan resultados interesantes y que exigieron un estudio para que se entienda la naturaleza de este hecho, a sabiendas de que la naturaleza de las matemáticas siempre brindará explicaciones lógicas y científicas a esos resultados que aparentemente surgen del azar.

Esta sucesión presenta resultados por demás interesantes, relacionando sus elementos con potencias de todos los números naturales, en este trabajo se explica esta sucesión y además la relación entre sus elementos y las potencias.

2. Presentación de la Sucesión

Esta Sucesión se define simplemente de la forma:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + n; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

que permite hacer los cálculos para obtener los elementos de la sucesión:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = a_0 + 1 = 0 + 1 = 1 \\ a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3 \\ a_3 = a_2 + 3 = 3 + 3 = 6 \\ a_4 = a_3 + 4 = 6 + 4 = 10 \\ a_5 = a_4 + 5 = 10 + 5 = 15 \\ a_6 = a_5 + 6 = 15 + 6 = 21 \\ a_7 = a_6 + 7 = 21 + 7 = 28 \\ a_8 = a_7 + 8 = 28 + 8 = 36 \\ a_9 = a_8 + 9 = 36 + 9 = 45 \\ a_{10} = a_9 + 10 = 45 + 10 = 55 \\ \ldots \end{cases}$$

Y así sucesivamente hasta un n de cualquier orden.

Está claro que la definición y los cálculos que sustentan esta sucesión, no guardan complejidad alguna, sin embargo, de aquí surgen dos resultados que generan curiosidad, estos son:

Resultado 1

Si se restan dos elementos consecutivos el resultado siempre es n, el subíndice.

$$\begin{cases} 1 = 1 - 0 \\ 2 = 3 - 1 \\ 3 = 6 - 3 \\ \ldots \end{cases}$$

o en definitiva, despejando directamente de la sucesión:

$$n = a_n - a_{n-1}$$

Resultado 2

Surgió de observar que si se suman dos elementos consecutivos, el resultado siempre es un número cuadrado perfecto, así:

$$\begin{cases} 0+1=0=0^2 \\ 1+3=4=2^2 \\ 3+6=9=3^2 \\ 6+10=16=4^2 \\ 10+15=25=5^2 \\ 15+21=36=6^2 \\ 21+28=49=7^2 \\ 28+36=64=8^2 \\ 36+45=81=9^2 \\ 45+55=100=10^2\ldots \end{cases}$$

Relación que permite pensar que existe la igualdad:

$$n^2 = a_n + a_{n-1}$$

por lo que proponemos el siguiente teorema:

TEOREMA: *En números enteros positivos si se tiene la Sucesión ordenada definida de la siguiente forma:*

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + n; \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

siempre se cumplirá la igualdad:

$$n^2 = a_n + a_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostración

Utilizaremos inducción sobre n.

- Veamos qué pasa si $n = 1$,

$$1^2 = a_0 + a_1 = 0 + 1 = 1, \quad \text{por lo tanto cumple.}$$

- Suponemos verdad para $n = p - 1$

Supondríamos que se cumple $(p-1)^2 = a_{p-1} + a_{p-2}$, que sería nuestra hipótesis de inducción.

Recordemos además que la definición de la Sucesión establece:

$$a_p = a_{p-1} + p, \quad \forall p \geq 1, \tag{1}$$

En consecuencia, también tendremos $a_{p-1} = a_{p-2} + p - 1$, que reemplazando en 1, se tendrá:

$$a_p = a_{p-2} + p - 1 + p = a_{p-2} + 2p - 1, \quad \forall p \geq 2$$

de donde:

$$a_{p-2} = a_p - 2p + 1$$

que, remplazando este resultado en la hipótesis de inducción se tendrá:

$$(p-1)^2 = a_{p-1} + a_p - 2p + 1$$

que reordenando es:

$$(p-1)^2 + 2p - 1 = a_p + a_{p-1}$$
$$p^2 - 2p + 1 + 2p - 1 = a_p + a_{p-1}$$
$$p^2 = a_p + a_{p-1}, \quad \text{c.q.d.}$$

3. Caracterización de los Elementos

Aquí buscamos caracterizar cada uno de los elementos de la sucesión planteada, para ello recordamos las condiciones básicas de la sucesión así como un resultado obtenido.

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + n; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$n^2 = a_n + a_{n-1}$$

En consecuencia partimos de que:

$$n^2 = a_n + a_{n-1} \Rightarrow n^2 = a_n + a_n - n \Rightarrow n^2 + n = 2a_n$$

que se reduce a:

$$a_n = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Como consecuencia lógica se tendrá que:

$$a_n = \frac{(n-1) \cdot ((n-1)+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

resultado que ya se obtuvo y que muestra la razón en la que se sustenta la curiosidad de los elementos de la sucesión.

4. Generación de Potencias

Partiendo de los hechos ya demostrados:

$$n^2 = a_n + a_{n-1} \quad \text{y} \quad n = a_n - a_{n-1}$$

podemos construir n^3, multiplicando los dos resultados, es decir tendremos que:

$$n^3 = n^2 \cdot n = (a_n + a_{n-1}) \cdot (a_n - a_{n-1}) = a_n^2 - a_{n-1}^2$$

que se puede comprobar fácilmente, tomando un n cualquiera; tomemos $n = 9$, entonces:

$$9^3 = a_9^2 - a - 8^2 = 45^2 - 36^2 = 2025 - 1296 = 729$$

que cumple a cabalidad, por lo que se puede afirmar que:

$$n^3 = a_n^2 - a_{n-1}^2$$

Para construir una relación para n^4, deberemos simplemente anotar que:

$$n^4 = n^3 \cdot n = (a_n^2 - a_{n-1}^2) \cdot (a_n - a_{n-1}) = (a_n - a_{n-1})^2 (a_n + a_{n-1})$$

Y se podría generalizar estos resultados, construyendo la tabla, para cualquier n, distinto de cero.

Potencia	Resultado
n^1	$a_n - a_{n-1}$
n^2	$a_n + a_{n-1}$
n^3	$a_n^2 - a_{n-1}^2 = (a_n - a_{n-1}) \cdot (a_n + a_{n-1})$
n^4	$(a_n^2 - a_{n-1}^2) \cdot (a_n - a_{n-1}) = (a_n - a_{n-1})^2 \cdot (a_n + a_{n-1})$
n^5	$(a_n^2 - a_{n-1}^2) \cdot (a_n + a_{n-1}) \cdot (a_n - a_{n-1}) = (a_n + a_{n-1})^2 \cdot (a_n - a_{n-1})$
n^6	$(a_n^2 - a_{n-1}^2)^2 = (a_n + a_{n-1})^2 \cdot (a_n - a_{n-1})^2$
n^7	$(a_n^2 - a_{n-1}^2)^2 \cdot (a_n - a_{n-1}) = (a_n + a_{n-1})^2 \cdot (a_n - a_{n-1})^3$
n^8	$(a_n^2 - a_{n-1}^2)^2 \cdot (a_n + a_{n-1}) = (a_n + a_{n-1})^3 \cdot (a_n - a_{n-1})^2$
n^9	$(a_n^2 - a_{n-1}^2)^3 = (a_n + a_{n-1})^3 \cdot (a_n - a_{n-1})^3$
n^{10}	$(a_n^2 - a_{n-1}^2)^3 \cdot (a_n - a_{n-1}) = (a_n + a_{n-1})^3 \cdot (a_n - a_{n-1})^4$
n^{11}	$(a_n^2 - a_{n-1}^2)^3 \cdot (a_n + a_{n-1}) = (a_n + a_{n-1})^4 \cdot (a_n - a_{n-1})^3$
n^{12}	$(a_n^2 - a_{n-1}^2)^4 = (a_n + a_{n-1})^4 \cdot (a_n - a_{n-1})^4$
n^{13}	$(a_n^2 - a_{n-1}^2)^4 \cdot (a_n - a_{n-1}) = (a_n + a_{n-1})^4 \cdot (a_n - a_{n-1})^5$
n^{14}	$(a_n^2 - a_{n-1}^2)^4 \cdot (a_n + a_{n-1}) = (a_n + a_{n-1})^5 \cdot (a_n - a_{n-1})^4$
...	...

Es decir todas las potencias se expresan en función de los factores:

$$(a_n + a_{n-1}) \quad \text{y} \quad (a_n - a_{n-1})$$

Se debe notar que los exponentes de los resultados son menores, significativamente que los de la potencia, así para expresar n^{14}, se utilizan las potencias de 5 y 4, evidenciándose que los factores del resultado son menores o iguales a la tercera parte de la potencia.

Con lo que se observa que se tiene un resultado general, para todo s, numero natural:

$$\begin{cases} n^{3s} = (a_n + a_{n-1})^s \cdot (a_n - a_{n-1})^s \\ n^{3s+1} = (a_n + a_{n-1})^s \cdot (a_n - a_{n-1})^{s+1} \\ n^{3s+2} = (a_n + a_{n-1})^{s+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^s \end{cases}$$

Demostración

La demostración la realizaremos por inducción.

Veamos para $s = 0$.

$$\begin{cases} n^0 = (a_n + a_{n-1})^0 \cdot (a_n - a_{n-1})^0 = 1 \\ n^1 = (a_n + a_{n-1})^0 \cdot (a_n - a_{n-1})^1 = (a_n - a_{n-1}) = n \\ n^2 = (a_n + a_{n-1})^1 \cdot (a_n - a_{n-1})^0 = n^2 \end{cases}$$

Ahora supongamos que lo expuesto se cumple para $s = k$, por lo que tendremos las siguientes igualdades:

$$n^{3k} = (a_n + a_{n-1})^k \cdot (a_n - a_{n-1})^k \tag{2}$$
$$n^{3k+1} = (a_n + a_{n-1})^k \cdot (a_n - a_{n-1})^{k+1} \tag{3}$$
$$n^{3k+2} = (a_n + a_{n-1})^{k+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^k \tag{4}$$

Intentaremos a continuación obtener un resultado para $s = k + 1$:

Sabemos que $n^{3(k+1)} = n^{3k+3} = n^{(3k+2)+1} = n^{(3k+2)} \cdot n$

Más de la ecuación (3) se tiene que $n^{3k+2} = (a_n + a_{n-1})^{k+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^k$

Y además se tiene que:

$$a_n - a_{n-1} = n$$

$$n^{3(k+1)} = (a_n + a_{n-1})^{k+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^k \cdot (a_n - a_{n-1}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n^{3(k+1)} = (a_n + a_{n-1})^{k+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^{k+1} \quad \text{c.q.d} \tag{5}$$

A continuación trabajaremos con la expresión $n^{3(k+1)+1}$

A sabiendas de que $n^{3(k+1)+1} = n^{3(k+1)} \cdot n$

Recordemos el resultado ya obtenido $n^{3(k+1)} = (a_n + a_{n-1})^{k+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^{k+1}$

Y el usado anteriormente $a_n - a_{n-1} = n$

Teniendo que $n^{3(k+1)+1} = (a_n + a_{n-1})^{k+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^{k+1} \cdot (a_n - a_{n-1})$

De donde resulta que:

$$n^{3(k+1)+1} = (a_n + a_{n-1})^{k+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^{(k+1)+1} \quad \text{c.q.d} \tag{6}$$

Por ultimo trabajaremos la expresión $n^{3(k+1)+2} = n^{3(k+1)} \cdot n^2$

Recordando el resultado (5) y además que $a_n + a_{n-1} = n^2$

Se tendrá que $n^{3(k+1)+2} = (a_n + a_{n-1})^{k+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^{(k+1)} \cdot (a_n + a_{n-1}$

Por consiguiente

$$n^{3(k+1)+2} = (a_n + a_{n-1})^{(k+1)+1} \cdot (a_n - a_{n-1})^{(k+1)} \quad \text{c.q.d} \tag{7}$$

Con los resultados (5), (6) y (7), podemos concluir que lo propuesto se cumple con $s = k + 1$, por lo que podemos concluir con la demostración.

5. La Sucesión, en Función de Series

La caracterización de los elementos de la Sucesión, así como una simple inspección de la misma, permite concluir que:

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} i; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Y como es conocido:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2};$$

entonces:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2};$$

Se deduce claramente de aquí la identidad demostrada anteriormente por otros medios:

$$a_n + a_{n-1} = n^2, \quad \text{y} \quad a_n - a_{n-1} = n$$

Y otras potencias, ya que además se tiene que:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 + 2i\sum_{j=1}^{i-1} j\right)$$

Utilizando la fórmula de la suma para una sucesión de números naturales consecutivos que inician en 1 se tendría que:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 + 2i\cdot\frac{(i-1)\cdot i}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 + i\cdot(i-1)\cdot i\right) = \sum_{i=1}^{n}(i^2 + i^3 - i^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$$

Consecuentemente:

$$a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$$

Queda claro de aquí una de las identidades demostradas anteriormente:

$$n^3 = a_n^2 - a_{n-1}^2$$

Referencias

[1] OLMAN, Bernard, y HILL, David R., *Álgebra Lineal*, México, Pearson Educación, 2006, ISBN 970-26-0696-9.

[2] JOHNSONBAUGH, Richard., *Matemáticas Discretas*, México, Pearson Educación, 2005, ISBN 970-26-0637-3.

[3] BRASSARD, G. y BRATLEY, P., *Fundamentos de Algoritmia*, Madrid, Prentice Hall, 1997, ISBN 84-89660-00-X.

[4] KENNETH, H. Rosen., *Discrete mathematics and its applications*, McGraw Hill, 2003. ISBN 0-07-123374-1.

[5] KENNETH, H. Rosen y MICHAELS, John G., *Handbook of discrete and combinatorial mathematics*, CRC, 1999. ISBN 0-8493-0149-1.

[6] VOROBIOV, N. N., *Números de Fibonacci*, Editorial Mir, Moscú, 1974, Colección Lecciones Populares de Matemáticas. Traducción al español de Carlos Vega, catedrático de Matemáticas Superiores y candidato a doctor en ciencias físico-matemáticas.

Sobre el autor:
Nombre: Marco Vinicio Vásquez Bernal
Correo electrónico: marvas123@hotmail.es
Institución: Instituto Tecnológico Andrés F. Córdova, Quito, Ecuador.