 DOI: 10.24844/EM2901.06

Formación en geometría analítica para futuros profesores. Estudio de caso basado en el *MKT*

Training in Analytical Geometry for Future Teachers. Case Study Based on the MKT

Virginia Ciccioli[1]
Natalia Sgreccia[2]

Resumen: Este artículo tiene como fin caracterizar la formación que se ofrece a futuros profesores de matemáticas en busca de configurar su *conocimiento matemático para enseñar (MKT)* geometría analítica elemental. Se analiza el aporte disciplinar de la asignatura Geometría I, de una carrera de formación de profesores de matemáticas en Argentina. Se identifican en detalle los dominios del *MKT* mediante las acciones realizadas por el profesor y los contenidos vistos en las primeras clases de geometría analítica. La investigación, que se aborda, mediante un estudio de caso, tiene un enfoque eminentemente cualitativo y un alcance principalmente descriptivo. Los resultados revelan que todos los dominios del *MKT* se activaron en las clases observadas. La diversidad y especificidad de tales activaciones puede servir como guía para orientar metodológicamente estudios que se basen en el modelo teórico de referencia, en la línea de formación de profesores en geometría analítica.

Fecha de recepción: 9 de noviembre de 2015. **Fecha de aceptación:** 4 de septiembre de 2016.

[1] Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario / Escuela Normal Superior Nº 33 "Dr. Mariano Moreno"/ Escuela de Educación Secundaria Orientada Particular Incorporada N° 3033 "Colegio Rosario". Argentina. ciccioli@fceia.unr.edu.ar

[2] Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario. Argentina. sgreccia@fceia.unr.edu.ar

Palabras clave: *formación docente – conocimiento matemático para enseñar – geometría analítica.*

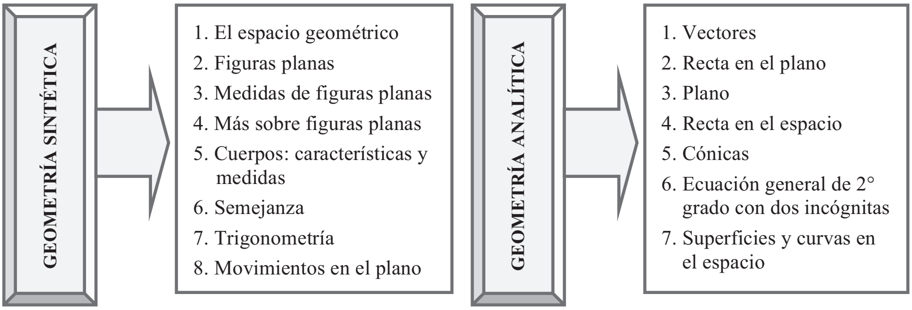
Abstract: This paper aims to characterize the training that is offered to Mathematics' future teachers on the grounds of the *mathematical knowledge for teaching(MKT)* elemental analytical geometry. It is analyzed in terms of the curricular contribution of the subject Geometry I, in a career of mathematics' teachers' training in Argentina. It seeks to identify in detail the*MKT* domains through the actions of the teacher and the contents of the first classes of analytic geometry. The research, which is carried out through a case study, has got a qualitative focus and a mainly descriptive purpose. The results reveal that all the domains of the *MKT* were activated in the observed classes. The diversity and specificity of such activations can serve as a methodological guide for studies that are based on the theoretical model of reference, in the line of teachers' training in analytical geometry.

Key words: *teachers' training – mathematical knowledge for teaching – analytical geometry.*

PRESENTACIÓN

La geometría analítica vincula el álgebra y la geometría, al asociar n-uplas de números con puntos y ecuaciones con figuras, y al aplicar los métodos del álgebra y del cálculo a la geometría elemental. La base del estudio de la geometría analítica es la definición de un sistema de referencia, llamado también sistema de coordenadas. Esta rama de las matemáticas tiene múltiples aplicaciones en diversas áreas del desarrollo de la humanidad (topografía, física, biomatemática, astronomía, ingeniería, arquitectura, arqueología, cartografía, sociología, geografía, marketing, economía, logística, etc.) y está presente en la formación básica de profesionales de diversos campos. Por tal razón, es una rama de las matemáticas que debe hacer parte de los currículos de la formación de profesores.

La asignatura anual Geometría I, de primer año de la carrera Profesorado en Matemática (PM) de la Universidad Nacional de Rosario (Argentina), está constituida por dos partes: geometría sintética (Figura 1a) y geometría analítica (Figura 1b), desarrolladas en el primer y segundo semestre respectivamente. En este artículo se entiende por "geometría analítica elemental" a la conformada por los bloques temáticos señalados en la Figura 1b.



a) b)

Figura 1. Bloques temáticos de la asignatura Geometría I del PM sobre: a) Geometría sintética; b) Geometría analítica.

En el programa de Geometría I,[3] se alude a esta segunda parte de la materia como el momento en que se introducen conceptos algebraicos que permiten resolver algunos de los problemas que se presentan en la primera parte, con estrategias diferentes, además de tratarse temas nuevos. Se presenta la primera vinculación entre dos ramas de las matemáticas (álgebra y geometría) en la carrera, y es la oportunidad ideal para que los alumnos se introduzcan en el trabajo interdisciplinario, logren interpretar un mismo concepto desde dos puntos de vista diferentes, valoren qué estrategia es la más conveniente para resolver un determinado problema.

En el plan de estudios de la carrera de referencia, la geometría analítica actúa como soporte conceptual y de lenguaje para diversos bloques temáticos a tratar a posteriori, tales como cálculo en una y varias variables, álgebra lineal, ecuaciones diferenciales, modelización matemática, para el desarrollo de otras geometrías. Además, si se considera el espectro laboral de los egresados de la carrera (nivel secundario, tanto bachiller como técnico, y nivel superior, tanto en ciencias exactas como aplicadas), sin duda la geometría analítica elemental está presente. Por otro lado, lo que se aprende en el primer año de la carrera como profesor

[3] Resolución Núm. 68 del año 2015 del Consejo Directivo de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la UNR.

de matemáticas ineludiblemente sienta las bases sobre las cuales se edifica el conocimiento matemático puesto al servicio de la enseñanza.

Al consultar estudios de otros investigadores referidos a la didáctica de la geometría analítica, resulta evidente la preeminencia de aquellos que tratan acerca de problemáticas sobre dificultades cognitivas al aprender geometría analítica, sobre aquellos que se enfocan en su enseñanza en la formación de profesores. Así, por ejemplo, se encuentra el trabajo de Arellano y Oktaç (2009) quienes aluden a una falta de relación entre los registros gráfico y algebraico, al realizar conversiones entre ellos, en el tratamiento de sistemas de ecuaciones lineales por parte de alumnos que están finalizando la escuela secundaria. En cuanto al registro coloquial en la lengua natural, Dallemole, Oliveira y Moreno (2014) le asocian a su naturaleza plurifuncional una mayor complicación, al efectuar conversiones entre este registro y el algebraico cuando los estudiantes que ingresan a la licenciatura en matemáticas trabajan con recta y circunferencia.

Es así que estos estudios señalan lo difícil que resulta el aprendizaje de la geometría analítica al finalizar la escolaridad secundaria e iniciar estudios superiores. Los investigadores se enfocan en contenidos puntuales en los que hacen notar la complejidad subyacente a las conversiones entre registros de representación (Duval, 1999), aspecto inherente a la propia génesis de la geometría analítica.

Por otro lado, entre los problemas de la enseñanza de la geometría analítica, Alves, Mendoça y Coletti (2010) señalan un nivel prioritariamente técnico en el desarrollo de los temas recta y plano en documentos oficiales y en libros de texto. Adicionalmente, concluyen que en el nivel secundario no se explica la transición del marco geométrico al algebraico, y en el nivel superior se avanza rápidamente hacia el estudio de espacios más abstractos, quedando perdido el eslabón esencial para la comprensión de la geometría analítica. Acerca de los libros de texto para la formación de los matemáticos, Karrer y Navas (2013) consideran que estos están fuertemente orientados al uso de registros monofuncionales discursivos (como el algebraico). Las autoras avanzan hacia una propuesta de enseñanza, que aborda el contenido de superficies esféricas empleando un software de geometría dinámica tridimensional, que potencia la habilidad de visualización para favorecer la comprensión de la conversión entre los registros algebraico y gráfico. Un estudiante que desarrolla esta habilidad, trasciende las fases sintético-geométrica y analítico-aritmética y logra posicionarse en un modo de pensamiento más analítico-estructural. Resultado que concuerda con lo planteado por Bonilla y Parraguez (2013). Por ello, estas últimas insisten en propuestas de enseñanza en las que se promueva dicho modo de pensamiento y lo ejemplifican en particular con el contenido elipse.

Parecería, entonces, que promover una mejora de la enseñanza podría favorecer la superación de las dificultades estudiantiles en diversos contenidos de geometría analítica elemental. Cómo se cimentan las bases en la formación docente inicial en geometría analítica, es el asunto que le incumbe a este estudio. Y esto debido básicamente a dos razones:

- la trascendencia de la geometría analítica como rama de las matemáticas, más allá de un contenido puntual;
- la influencia del desempeño de los docentes que le enseñan a los futuros profesores, dada la importancia para la formación, de los modelos de enseñanza vividos (Santaló, 1999).

Ante la discontinuidad entre la geometría sintética de los primeros años de secundaria y la geometría analítica de los últimos,[4] Gascón (2002) propone conectar en la enseñanza de la geometría en secundaria, las técnicas sintéticas con las analíticas a fin de poner de manifiesto su complementariedad. Son justamente las limitaciones de las técnicas sintéticas las que dan sentido a las técnicas analíticas: de ahí la necesidad de establecer tal continuidad.

En esta dirección, Gascón (2002) sugiere retomar aquellos problemas que habiéndose intentado con técnicas sintéticas quedaron sin resolver y, recíprocamente, proponer problemas cuya resolución resulte más sencilla y natural mediante técnicas sintéticas que analíticas. También, para acentuar aún más la complementariedad, se pueden proponer problemas que para ser resueltos de manera general requieren técnicas analíticas, pero necesitan previamente de técnicas sintéticas para diseñar la estrategia de resolución.

En un trabajo posterior (Gascón, 2003), reconoce que no es tarea fácil tal integración analítico-sintética, dado el “autismo temático” prevaleciente en la escuela secundaria, exhibido en los documentos oficiales, los libros de texto y, sobre todo, en los profesores. De este modo, un espacio propicio de indagación lo constituye la formación inicial de profesores de matemáticas, para estudiar

[4] Esta suerte de discontinuidad también se aprecia en los diseños curriculares vigentes en las distintas provincias de Argentina. En los diseños de la provincia de Santa Fe, por ejemplo, la geometría sintética se aborda en el eje “geometría y medida” y la geometría analítica se aborda desde un punto de vista más funcional en el eje “álgebra y funciones”, con mínimas conexiones entre ejes que alejan estos enfoques de la geometría de la complementariedad deseada (Santa Fe. Ministerio de Educación, 2014).

en éste cómo se propicia, por medio de la enseñanza, y desde el aporte disciplinar que se brinda en la asignatura Geometría I del PM (en las clases introductorias), la configuración de un *conocimiento matemático para enseñar* geometría analítica elemental. Básicamente interesa conocer la formación que se ofrece a los futuros profesores a través del análisis de la activación de los dominios del *conocimiento matemático para enseñar* (*MKT*) (Ball, Thames y Phelps, 2008).

Desde que existe esta materia en el currículo (año 2002) se ha impartido de la misma manera: primer cuatrimestre geometría sintética y segundo cuatrimestre geometría analítica, pudiéndose correr el riesgo del "autismo temático" del que habla Gascón (2003), potenciado aún más aquí debido a que se está formando a quienes luego serán los encargados de enseñar (futuros profesores). Profundizar en la manera en que los dominios del *MKT* emergen en las clases, asociados a qué contenidos vistos y qué acciones desarrolladas por el profesor, es una de las principales motivaciones de este trabajo. Esto posibilitará, en parte y a la luz de los referentes considerados, aproximarnos a conocer la formación que el PM ofrece en geometría analítica elemental.

ENCUADRE TEÓRICO

El tópico *conocimiento y habilidades de los profesores* es uno de los cinco ejes de relevancia para las investigaciones relativas a la formación de profesores de matemáticas (Sánchez, 2011). Engloba, básicamente, aquello de lo que debe disponer un docente para generar una buena enseñanza. Se reconoce a Shulman (1986) como el precursor de esta línea de investigación sobre la formación del profesor, con una propuesta de categorías para conceptualizar la clase de conocimiento requerido en la enseñanza de cualquier materia.

Ball *et al*. (2008), de la Universidad de Michigan, avanzan en la línea de investigación de Shulman (1986), orientándola hacia las matemáticas. Según estos autores, la mayoría de la gente está de acuerdo en que conocer matemáticas es importante para su enseñanza. Sin embargo, lo que abarca tal conocimiento y su alcance aún amerita indagación especializada. Por y para ello estos autores proponen un conjunto de seis dominios de *MKT* que han de disponer los profesores (Tabla 1). Estos dominios, conjugados con fenómenos del dominio geométrico, se constituyen en las categorías de análisis del presente estudio.

Ball y Bass (2003) introducen la necesidad de conceptualizar el *conocimiento matemático para enseñar* (*MKT*) a partir de la observación del trabajo de

Tabla 1. Dominios del MKT conjugados con fenómenos relativos a geometría analítica.

	Dominios del *MKT*	Algunos fenómenos del dominio geométrico
Conocimiento disciplinar	*Conocimiento común del contenido*: matemáticas de cualquier ámbito científico o profesional.	Conceptos de sistema de coordenadas cartesianas, de vector, de igual dirección de vectores, de vector nulo. Procedimientos para asignar coordenadas a puntos en el espacio, para representar un segmento orientado. Denominaciones de asociatividad, de elemento neutro. Notaciones para coordenadas de un punto en el plano y en el espacio, para el producto de un número real por un vector. Casos de elección de puntos sobre una recta, un plano o el espacio o de operaciones aplicadas a distintos vectores, que se amplían mediante ejemplos variados. Deducciones relativas al cálculo de distancia entre puntos, a la equivalencia de la igualdad entre vectores.
	Conocimiento en el horizonte matemático: conciencia sobre la génesis y relación de los contenidos matemáticos.	Relaciones conceptuales entre la norma y el módulo de un vector, más allá de lo que se está desarrollando en el curso. Apreciaciones valorativas sobre los objetos geométricos, relativas a la belleza de una prueba matemática de traslación de vectores. Encuadres epistemológico, histórico y real con respecto a las ideas fundamentales de Descartes.
	Conocimiento especializado del contenido: usos específicos, adaptaciones y secuenciaciones realizadas para transformar el contenido en enseñable.	Empleo de distintos registros semióticos, tanto al enunciar como demostrar propiedades relativas a vectores. Pertinencia de la selección de ejemplos al representar puntos en el espacio. Formulación de preguntas y re-preguntas para favorecer el sentido matemático de las relaciones entre vectores.
Conocimiento didáctico del contenido	*Conocimiento del contenido y de los estudiantes*: integra conocimiento acerca de la cognición de los alumnos.	Previsión de comportamientos y creencias en cuanto a particularidades de la geometría analítica y en cuanto a dificultades y errores de los estudiantes en la representación de puntos en un sistema de coordenadas. Adecuaciones de los niveles de abstracción con ejemplificaciones para establecer conexiones entre coordenadas y objetos. Potenciación de respuestas estudiantiles al solicitar justificaciones.

	Dominios del *MKT*	Algunos fenómenos del dominio geométrico
Conocimiento didáctico del contenido	*Conocimiento del contenido y de la enseñanza*: conocimiento pedagógico y didáctico específico que requiere un profesor para actuar en la enseñanza.	Orientación de las explicaciones al recapitular ideas sobre correspondencia uno a uno entre la recta y el conjunto de los números reales. Promoción de la participación estudiantil mediante preguntas direccionadas sobre el asunto geométrico. Administración de los tiempos de la clase para que las ideas centrales queden desarrolladas. Empleo de metáforas para establecer comparaciones con la idea de Descartes. Uso de recursos didácticos.
	Conocimiento del contenido y del currículum: se precisa para dar un enfoque y organización a los contenidos que se pretenden enseñar.	Articulación de los temas con contenidos de la asignatura estudiados mediante geometría sintética. Articulación con otras materias al mencionar estructuras que se estudiarán en álgebra superior. Vinculación teoría-práctica en cuanto a definiciones y propiedades con sus posibles situaciones de aplicación. Referencias a la geometría analítica estudiada en el nivel secundario.

profesores en aulas de matemáticas. Este modelo teórico surge y se nutre de investigaciones empíricas en contextos de aula. Ball *et al.* (2008) sugieren que un sentido más claro de las categorías de conocimiento requerido para la enseñanza, puede dar información acerca del diseño de materiales de soporte para docentes en ejercicio y docentes en formación. Agregan que los estudios de esta índole ayudan a clarificar un currículum sustancial para la formación de docentes, profesionalmente fundado y atravesado por la práctica profesional. Estas ideas concuerdan con la formación integral a la que se apunta en la Propuesta de Estándares para la Acreditación de las carreras de Profesorado Universitario en Matemática (Consejo Interuniversitario Nacional, 2013) así como con resultados de investigaciones recientes en esta línea, en tanto campo multifacético de estudio (Ponte, 2014) que da importancia a diversos factores que entretejen los conocimientos matemáticos necesarios para la enseñanza (Chapman, 2015). En sintonía con la línea de Ball, en el trabajo que aquí se plantea, se procura caracterizar la formación que se ofrece a futuros profesores, a partir de la observación de la actuación del docente a cargo de una asignatura del nivel superior universitario (carrera de Profesorado en Matemática) en la rama de la geometría analítica (a nivel elemental, de introducción de contenidos básicos).

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se abordó mediante un estudio de caso (Stake, 1999), tiene un enfoque eminentemente cualitativo, con algunos aportes cuantitativos, y su alcance es principalmente descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). Para recolectar la información, se observaron las tres primeras clases de geometría analítica de la asignatura Geometría I del PM. Esta asignatura se desarrolla, según el calendario académico, de marzo a noviembre; las clases observadas transcurrieron del 13 al 21 de agosto.

Se utilizó el análisis del contenido, como técnica de procesamiento de la información, que permite estudiar el contenido manifiesto de la información recabada y clasificar sus diferentes partes, de acuerdo con las categorías de análisis (Cabrera, 2009; Mundina, 2005).

Para conseguir el objetivo propuesto, y considerando los registros de clases en sí mismos como un medio para lograrlo, se recurrió a una segmentación del contenido que se desarrolló en las clases, de acuerdo al esquema propuesto por Coll, Colomina, Onrubia y Rochera (1992) y que se sintetiza en la Figura 2.

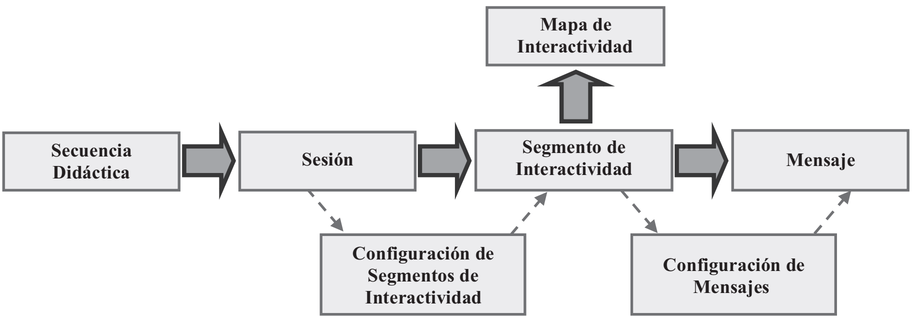


Figura 2. Esquema de segmentación del contenido de las clases.

En este esquema se consideran como unidades de análisis las *sesiones* de trabajo, constituidas puntualmente por cada una de las clases que se desarrollan en el marco de una *secuencia didáctica* asociada a un cierto bloque temático. En un nivel micro, se tienen en cuenta los *segmentos de interactividad*, que responden a una determinada estructura de participación; pueden agruparse en *configuraciones de segmentos de interactividad* y se secuencian constituyendo, para cada sesión, un *mapa de interactividad*. Para profundizar en el proceso de construcción de significados se recurre a una unidad de análisis mucho más fina, de naturaleza esencialmente semiótica: los *mensajes* que a su vez pueden agruparse en *configuraciones de mensajes*.

La unidad de análisis de esta investigación está constituida por cada una de las tres sesiones de clase, siendo subunidades las configuraciones de mensajes (ocho, ocho y nueve en cada sesión respectivamente), delimitadas de acuerdo al contenido matemático de referencia. El análisis se efectuó a través del *MKT*; sus seis dominios (Tabla 1) son las categorías del estudio. Cada categoría está constituida por una cierta cantidad de modalidades de acciones del profesor (entre seis y catorce), identificadas a partir de un proceso gradual de inmersión en los datos.

El proceso de delimitación de las modalidades de acciones del profesor y de articulación de las mismas con las categorías estuvo conformado por cinco fases:

- Transcripción fiel de lo acontecido en la clase, en cuanto a manifestaciones explícitas orales del profesor y de los alumnos (actos de habla) así como representaciones escritas en el pizarrón por parte del profesor (aclaraciones entre paréntesis entre los actos de habla).
- Familiarización con los datos a partir de una lectura global de las transcripciones realizadas.
- Primera identificación de los datos (mensajes) con aspectos particulares de los dominios del *MKT* (modalidades preliminares).
- Perfeccionamiento de las modalidades iniciales, a partir de lo detectado en todas las clases, procurando minimizar la cantidad de las mismas pero resguardando la diversidad de la información que brindan.
- Revisión de la asociación modalidad-mensajes para eventualmente mejorar la denominación y pertinencia de las modalidades.

Es así que cada modalidad se asocia con uno o más mensajes (extractos de transcripciones) que, si bien pueden estar expresados con palabras distintas, tienen la misma naturaleza semiótica (referida a lo que intenta representarse a través de la denominación de la modalidad).

La activación de los diferentes dominios del *MKT*, a través de las modalidades emergentes, sirve en el presente estudio para caracterizar la formación relativa a geometría analítica elemental en el PM.

RESULTADOS: PRIMERA PARTE "LA EMERGENCIA DE LAS MODALIDADES"

A continuación se comparten las modalidades surgidas al analizar las sesiones de clase de geometría analítica elemental. Están agrupadas según los dominios del *MKT* (Tablas 2 a 7). Para cada una se consigna la frecuencia de detección y se ejemplifica mediante mensajes que aludieron a esa noción.

En la Tabla 2 se muestran las 13 modalidades relativas al dominio *conocimiento común del contenido* reconocidas en las tres sesiones de clase de Geometría I. Seis refieren al tratamiento matemático del contenido. Esto se produce en los planos *conceptual* y *procedimental*. El profesor insiste en ocasiones en el *significado* y la *dimensión geométrica de referencia*. También efectúa apreciaciones sobre la *precisión matemática* y la *notación*, para referirse a los objetos matemáticos involucrados. Otras dos modalidades puntualizan acerca de las denominaciones empleadas, tanto al introducir *términos matemáticos* como al realizar *asociaciones entre cierto nombre y la representación gráfica*. Las restantes cinco modalidades aluden a los procesos de desarrollo matemático y van desde la *ampliación de casos* o *de contenidos* hasta la *generalización*, *deducción* e *institucionalización*.

Las ocho modalidades emergentes para el dominio *conocimiento en el horizonte matemático* se presentan en la Tabla 3. En dos de ellas se proponen relaciones a través del currículum, más allá de lo que se está desarrollando en ese momento. Tal es el caso cuando el profesor *vincula la geometría sintética con la analítica* y cuando *insinúa vinculaciones matemáticas posteriores*. También aparecen apreciaciones del profesor que usualmente expresa quien conoce las matemáticas en un nivel superior al que está enseñando, como por ejemplo advertir sobre el *alcance de las caracterizaciones matemáticas* y *valorar estéticamente ciertas representaciones matemáticas*. El encuadre epistemológico se plasmó a través de otras dos modalidades: *fundamentación de la importancia del surgimiento de la geometría analítica* y *mención de la evolución de conceptos en la historia de las matemáticas*, haciendo además alusiones a la historia de las matemáticas y las aplicaciones al *ubicar en el tiempo ciertos hechos fundamentales* y *conectar con una situación real*.

Los modos de activación del *conocimiento especializado del contenido* se resumen en la Tabla 4, con sus 14 modalidades constitutivas. Seis de ellas se concretan a través de *gráficos*; el profesor hace *representaciones*, *ejemplificaciones* y *demostraciones* por medio de este registro. También insiste, en ocasiones, en

Tabla 2. Modalidades emergentes en el dominio “conocimiento común del contenido”.

Modalidades	Frec.	Ejemplos de mensajes
Procedimental	79	Con el compás, perfecto, trazo con centro en “P” una circunferencia que tenga radio la medida de “$\overline{AB}$”. (2-109*)
Conceptual	57	El lugar geométrico del plano o del espacio es un conjunto de puntos tal que cumplen una determinada condición. (1-63)
Significado	51	¿Qué quiere decir un segmento orientado? Quiere decir un segmento para el cual se decide cuál es el origen y cuál es el extremo. (2-70)
Institucionalización	26	Entonces la primera reflexión es que sea “x” igual a 0. Eso me dice que está en el plano yz. (2-60)
Introducción de términos matemáticos	21	La coordenada “x” del punto se llama abscisa, y la coordenada “y” que se llama ordenada. (1-47) Y la recta que contiene al vector se denomina recta sostén. (2-92)
Ampliación de casos	17	¿Si quisiera tener un vector que sea tres veces “$\overline{u}$”? Lo vuelvo a poner... ahora si quiero un vector que sea un medio de “$\overline{u}$”, ¿qué voy a hacer? (3-206)
Ampliación de contenido	14	Tres, porque el espacio tiene tres dimensiones, entonces voy a usar lo que hice en el plano, ¿sí? (S2-5D)
Deducción	11	Por transitividad, “$\overline{PP'}$” es paralelo a “$\overline{QQ'}$” y “$\overline{QQ'}$” es paralelo a “$\overline{RR'}$”, por lo tanto, sabemos que “$\overline{PP'}$” es paralelo a “$\overline{RR'}$” (3-64) (...) Entonces lo que tengo es que “PP′R′R” también es un paralelogramo. (3-66)
Precisión matemática	11	En realidad un “λ” es mayor que 0. (1-13) Entonces son los lados de un paralelogramo, salvo que sean colineales. (3-60)
Notación	6	Vamos a anotar así “P” dos puntos y el numerito. (1-17)
Asociación nombre-representación gráfica	2	Esto que parece una circunferencia deformada es una elipse. (1-58)
Dimensión de referencia	2	Entonces “x = 1” es la ecuación, en la recta es la ecuación ¿de qué? (S2-24D) (...) A ver, pero en el plano, los puntos de dos coordenadas cuya primera coordenada es 1 es la ecuación de una recta. (S2-26D)
Generalización matemática	2	Bien, en general, el módulo de “$\overline{u}$” más “$\overline{v}$” ¿cómo va a ser respecto del módulo de “$\overline{u}$” y el módulo de “$\overline{v}$”? (S3-41D)

* Indica el número de sesión (de 1 a 3) y el número de acto de habla del profesor (llegando a 71 en la sesión 1, 129 en la sesión 2 y 215 en la sesión 3 de clases).

Tabla 3. Modalidades emergentes en el dominio “conocimiento en el horizonte matemático”.

Modalidades	Frec.	Ejemplos de mensajes
Insinuación de vinculaciones matemáticas posteriores	16	Un versor es un vector de norma, de módulo 1, siempre que diga norma va a ser módulo... norma es un concepto más general. (2-111)
Alcance de las caracterizaciones matemáticas	8	Esta es la ley del paralelogramo y esto es muy útil, ya lo vamos a ver, para descomponer un vector como suma de otros dos, ¿sí?, pero es menos general que la definición que nosotros vimos de suma porque esta definición no vale para vectores que están alineados, en cambio aquella sí.(3-169)
Fundamentación de la importancia del surgimiento de la geometría analítica	5	Lo que hizo Descartes, *la idea revolucionaria de Descartes* fue transformar problemas geométricos de medición en problemas algebraicos, los cuales, uno los puede resolver de manera exacta y saber de manera exacta quién es este punto. (1-54)
Conexión con una situación real	4	Tengo tres barcos que van navegando en línea recta, a una determinada velocidad constante (...) Entonces a mí me interesa saber, si los barcos siguen navegando en esa dirección, si se van a chocar o no se van a chocar, ¿sí? (1-54)
Mención de la evolución de conceptos en la historia de las matemáticas	2	Entonces, si es un conjunto de puntos del plano o del espacio, ¿por qué lo llamamos lugar geométrico? (...) Pero ustedes tienen que pensar que cuando esto se empieza a estudiar, no existía la teoría de conjuntos. (1-63)
Ubicación en el tiempo de hechos fundamentales de la historia de las matemáticas	2	Entonces la geometría analítica se debe a Descartes, que es del año (...) y su método del 1637. (1-49)
Valoración estética de las representaciones matemáticas	1	Esa es una forma, es más elegante incluso que la que está en el apunte. (2-111)
Vinculación geometría sintética-geometría analítica	1	Yo voy a hacer un par de dibujos y voy a escribir un par de ecuaciones y ustedes me van a decir qué tienen que ver unos con otros. (1-56)

el *adecuado empleo de los gráficos*, promoviendo la *interpretación*, la *precisión* así como *diversos procedimientos de representación del objeto geométrico*. El *registro simbólico* también está presente en dos modalidades: la *escritura matemática* propiamente dicha y su *vinculación con enunciados coloquiales*. Otras cuatro modalidades dan cuenta de aclaraciones que hace el profesor para robustecer matemáticamente lo que se va desarrollando. Así por ejemplo, procede a *re-significar el conocimiento*, *dar sentido a las denominaciones*, *reformular preguntas* de modo de desentrañar la cuestión matemática y, acorde a esto, emplear un *lenguaje accesible* sin que se pierda la esencia en cuestión. En esta construcción también se ayuda con *ejemplos* que propone, presentes en las restantes dos modalidades, atendiendo al *orden* en que se los presenta y a la *variedad* en la elección de los mismos.

Tabla 4. Modalidades emergentes en el dominio "conocimiento especializado del contenido"

Modalidades	Frec.	Ejemplos de mensajes
Representación gráfica	74	Coordenadas (–2; –1) y entonces vamos a marcar... con una línea de puntos (mientras dibuja en el pizarrón). (1-45)
Escritura simbólica	39	Existe un único punto "Q" tal que "$\overrightarrow{AB}$" es igual al vector "$\overrightarrow{PQ}$" (mientras escribe el enunciado en el pizarrón). (2-100)
Re-significación del conocimiento	35	Exacto, la magnitud escalar, tantos kilómetros por hora es una magnitud escalar, la velocidad media, no me alcanza para determinarlo porque también debería saber por dónde se mueve... no es lo mismo para acá o para allá.(2-74)
Interpretación gráfica	8	Entonces de este lado voy a poner al "∇" y entonces el menos "∇" va a estar del otro lado. (3-172)
Ejemplificación gráfica	7	Entonces este vector que dibujé acá y este de acá no van a ser iguales, tienen distinto módulo pero tienen igual dirección y con este que está acá también tienen igual dirección. (2-92)
Lenguaje accesible	5	Es como un círculo achatado a uno de los lados. (1-59)
Orden de presentación de ejemplos	5	¿Cómo ubico un punto de coordenada 2? (1-17) (...) ¿Un punto que tenga coordenada $\frac{1}{2}$? (1-18) (...) ¿El punto que tiene coordenada $-\frac{3}{2}$? (1-20)

Modalidades	Frec.	Ejemplos de mensajes
Variedad en la elección de ejemplos	5	Supongamos que tenemos que ubicar un punto "P" que tiene coordenadas (1; 1; 1), un punto "Q" que tiene coordenadas (−1; 2; 0) y el "R" que tiene coordenadas (1; -1; 1). (2-11)
Demostración gráfica	4	Entonces tenemos por un lado el vector "$\overline{u}$" y, por otro lado, un vector que es "$\overline{v}$" más "$\overline{w}$", por suerte acá ya tengo ubicado "$\overline{v}$" y "$\overline{w}$" de manera que, con origen en "Q", "$\overline{w}$" tenga origen en el extremo de "$\overline{v}$", ¿sí? Entonces, "$\overline{v}$" es "QR" y "$\overline{w}$" es... (3-122)
Sentido de las denominaciones	4	Entonces, si es un conjunto de puntos del plano o del espacio, ¿por qué lo llamamos lugar geométrico? (1-63)
Enunciado coloquial y escritura simbólica	3	Para todo "$\overline{u}$" existe su opuesto (mientras escribe en el pizarrón). (3-96)
Procedimiento de representación del objeto geométrico	2	El que no se lo acuerde de memoria está perfecto, buscan menos "$\overline{v}$" y hacen la suma usual, ya está esto simplemente... "$\overline{u}$" menos "$\overline{v}$" a partir de menos "$\overline{v}$", sin necesidad de dibujar el paralelogramo.(3-203)
Precisión en la representación gráfica	2	Quedó bastante mal dibujado, se confunde, vamos a hacer los ejes distintos porque si no se va a confundir todo (vuelve a hacer el gráfico cambiando levemente la posición del eje x). (2-13)
Reformulación de preguntas	2	El módulo de "$\overline{u}$" más "$\overline{v}$" ¿cómo va a ser respecto del módulo de "$\overline{u}$" y el módulo de "$\overline{v}$"? (3-41) (...) ¿Cómo va a ser el módulo de la suma respecto de la suma de los módulos? (3-43)

El *conocimiento del contenido y de los estudiantes*, en este caso de geometría analítica elemental y de futuros profesores respectivamente, comprende nueve modalidades (Tabla 5). En cinco se explicitan previsiones o supuestos acerca de los estudiantes en situación de aprendizaje: sobre sus *creencias*, sus *dificultades*, sus *errores habituales*, qué les puede resultar *menos complejo* o directamente *desprovisto de complejidad*. Y, en ese marco, emergen otras dos modalidades en las que el profesor indaga sobre el *entendimiento en la clase* y realiza *ejemplificaciones* de acuerdo al *nivel de abstracción de los alumnos*. También se tienen en cuenta las *respuestas de los estudiantes* (las restantes dos modalidades), al considerarlas cuando se agrega una *justificación por parte del docente* o bien cuando el profesor las potencia mediante la *justificación solicitada a los alumnos*.

Tabla 5. Modalidades emergentes para el dominio "conocimiento del contenido y de los estudiantes".

Modalidades	Frec.	Ejemplos de mensajes
Consideración de las respuestas de los estudiantes con justificación dada por el docente	25	Tres, porque el espacio tiene tres dimensiones. (2-5) No... "x" e "y" pueden ser cualquiera. (2-50)
Indagación sobre entendimiento	13	¿Se entendió esto de cómo dar coordenadas y cómo marcar los puntos en el espacio? (2-15) ¿Quedó claro lo que es que dos vectores sean iguales? (2-111)
Ejemplificación según nivel de abstracción de los alumnos	6	Como si tuviéramos una cuadrícula, las cuadras son cuadradas, básicamente, la coordenada en "x" me dice cuánto me tengo que mover en la dirección horizontal y la coordenada en "y" me dice cuánto me tengo que mover en la dirección vertical para llegar a ese punto. (2-72)
Supuesto sobre menor complejidad	6	Bien, vamos a hacer el (-1; 2; 0),este es más fácil. (2-13) La forma más simple es usando esta igualdad. (2-96)
Previsión de dificultades	4	Ojo que este es el eje z en el espacio, parece el "y" de cuando uno dibuja los ejes en el plano, ya se van a tener que acostumbrar a dibujar, el "x" e "y" están abajo. (2-64)
Previsión de errores	3	Cuidado cuando dibujen porque subir 1 no quiere decir que tiene que llegar hasta acá (señalando la coordenada 1 del eje z). (1-13)
Supuesto de ausencia de complejidad	3	Esto es trivial. (2-100) Es lógico que me iba a dar lo mismo. (3-182)
Potenciación de las respuestas de los alumnos desde la justificación	2	Bien, ¿por qué? (3-186)
Previsión de creencias	2	Es uno de los hechos más importantes, por más que ahora les parezca una pavada. (1-32)

Las 11 modalidades reconocidas en el dominio *conocimiento del contenido y de la enseñanza* se muestran en la Tabla 6. Tres de ellas se relacionan con las formas de orientar la explicación por parte del profesor, ya sea cuando *invita a los alumnos a participar*, *direcciona preguntas* por él formuladas o *recapitula lo desarrollado* al momento. Va hilvanando las ideas con lo previo (dos modalidades), al *evocar conocimientos* que deberían estar a disposición y al *usar ideas relativamente recientes*. A veces se vale de *metáforas y analogías* o de *ejemplos vinculados con la cotidianeidad* (otras dos modalidades). También emplea algunos recursos tales como *fibrones de colores* para remarcar, *elementos del aula* para modelizar y el *apunte por él escrito* que se constituye en material de estudio. En ocasiones hace explícitos comentarios que aluden a la *administración del tiempo* de la clase.

El *conocimiento del contenido y del currículum* tiene seis modalidades asociadas (Tabla 7). En tres de ellas el profesor alude a la propia asignatura Geometría I, ya sea con respecto a la *articulación de los contenidos* que van desarrollando, la *vinculación entre las partes teórica y práctica* de la materia así como la *organización y preparación del material* de estudio de la misma. También, en otra modalidad, se mencionan algunas potenciales *relaciones con contenidos de otras asignaturas* de la carrera. Y en las dos restantes se referencia al *nivel secundario de educación*, en los planos del *qué* (contenidos) y del *cómo* (forma de trabajo).

Con respecto a la frecuencia de activación de cada modalidad por cada dominio es posible apreciar que todos los dominios del *MKT* son activados en las clases de Geometría I, con predominio del *conocimiento común* y del *especializado del contenido*. También se pueden identificar cuáles son, dentro de cada dominio, las modalidades que más/menos emergen. Por ejemplo, en el *conocimiento del contenido y de la enseñanza* se aprecia una marcada diferencia entre las frecuencias absolutas de las modalidades *invitación a la participación* y *uso de metáforas y analogías*, de 32 y 1 respectivamente. Además se observa, al comparar los dominios entre sí, que la cantidad de activaciones difiere bastante de uno a otro. Así es el caso del *conocimiento especializado del contenido* que tiene 14 modalidades cuyas frecuencias están entre 2 y 74, y del *conocimiento del contenido y del currículum* con 6 modalidades entre los valores 1 y 10.

Con el fin de mostrar la manera en que se llevó a cabo la categorización y de ejemplificar el modo en que se realizaron las asociaciones modalidad-mensaje, se presenta a continuación un extracto de la primera sesión de clase que se considera relativamente representativo de la misma. Se pueden advertir

Tabla 6. Modalidades emergentes para el dominio "conocimiento del contenido y de la enseñanza"

Modalidades	Frec.	Ejemplos de mensajes
Invitación a la participación	32	¿Alguien sabe por qué?, ¿qué quiere decir que esa recta se corresponde con la ecuación "y = m.x +h"? (1-65)
Direccionamiento de preguntas	17	"$\overline{u}$" más "$\overline{v}$" va a ser un vector que, ¿qué características va a tener?, ¿su módulo quién va a ser? (3-31)
Evocación de conocimientos previos	12	Es lo mismo que hacíamos para las traslaciones, ¿se acuerdan? (2-93) ¿Se acuerdan qué era una relación de equivalencia? (2-96)
Uso del apunte como material de estudio	11	En el apunte lo tienen demostrado, les digo como para que lo lean. (2-68) Que no lo tienen incluso en el apunte, lo pueden agregar. (2-111)
Administración del tiempo	9	Entonces vamos a dar las propiedades de la suma, lo enuncio y hacemos un pequeño corte. (3-88)
Recapitulación	6	Logramos el objetivo que es describir a los lugares geométricos del plano o del espacio que ya conocemos o suponemos que conocemos con sus ecuaciones, esto significa que... (2-68)
Uso de colores	6	Acá tengo el vector suma que lo vamos a marcar así (y lo dibuja con color). (3-54)
Uso de ideas recientes	4	Entonces, lo que vamos a hacer es aprovechar lo que sabemos de la recta. En la recta nosotros sabemos dar coordenadas a los puntos, lo que hicimos recién acá... (1-36)
Elección de ejemplos vinculados con la cotidianeidad	3	Entonces si yo estoy parado acá, supongamos que tengo que llegar a cierta parte de un edificio. (2-7)
Uso de elementos del aula para modelizar	3	En la arista que me da la unión de estas dos paredes (señalando un rincón del salón), y las dos aristas del piso, ¿sí? (2-5)
Uso de metáforas y analogías	1	Un diccionario, si se quiere, entre álgebra y geometría. (1-56)

Tabla 7. Modalidades emergentes en el dominio "conocimiento del contenido y del currículum"

Modalidades	Frec.	Ejemplos de mensajes
Articulación en la misma asignatura	10	Todo lo que está del lado derecho (señalando las expresiones algebraicas de los lugares geométricos dibujados del lado izquierdo) lo vamos a estudiar en algún momento del cuatrimestre. (1-63)
Articulación con contenidos de otras asignaturas	9	Ya van a ver operaciones en álgebra, van a ver otras estructuras a partir del año que viene.(3-88)
Supuesto sobre forma de trabajo en el secundario	6	En la escuela deben haber dado sistemas de ecuaciones, seguramente, y les hacían hacer la resolución geométrica y después la resolución analítica. (1-54)
Articulación con contenidos del secundario	2	¿Alguien tuvo física en la escuela secundaria en algún año o físico-química? (3-17) (...) Bien, trabajaron con sistemas de fuerzas.(3-19)
Organización y preparación del material	2	Vamos a hacer un ejemplo más que no está en el apunte. (2-30)
Vinculación teoría-práctica	1	La tienen demostrada en el apunte, pero... esto es para que puedan hacer la práctica. (2-68)

activaciones de cuatro de los seis dominios del *MKT* y, a su vez, dentro de cada categoría, se recorren distintas modalidades. Además, en el extracto seleccionado es posible observar un "salto" de configuración (de la tercera a la cuarta) asociado a un cambio en cuanto al contenido de referencia: se cierra el tratamiento sobre la correspondencia biunívoca entre puntos de la recta y números reales y se comienza a trabajar con la correspondencia en el plano.

> 1-32: No es... bueno, está bien, va a ser distancia, **pasa que todavía no tengo definida la distancia**[*conocimiento en el horizonte matemático: insinuación de vinculaciones matemáticas posteriores*]. **Va a ser tal que, en un sistema que yo haya fijado, de medición, la longitud del segmento "$\overline{OP}$", me da ese número o el módulo de ese número, porque podría ser negativo, por la longitud del "$\overline{OP_0}$", ¿bien? Entonces yo les doy el número real "ϖ" y va a ser un punto "P" que esté a la derecha de "O",**

> **porque es positivo, de manera que el segmento "$\overline{OP}$" sea un múltiplo "ϖ" del "$\overline{OP_0}$" y si les doy menos "ϖ", al punto lo ubico a la izquierda del "O"**[*conocimiento común del contenido: procedimental*]. **Entonces la correspondencia también es sobreyectiva; dado un número real cualquiera, siempre encuentro un punto "P" tal que tenga a ese número real como coordenada** [*conocimiento común del contenido: institucionalización*]. Por eso decimos que es una correspondencia biunívoca, ¿bien? **La importancia de este hecho es fundamental, es uno de los hechos más importantes, por más que ahora les parezca una pavada** [*conocimiento del contenido y de los estudiantes: previsión de creencias*], **que no le encontremos mucho sentido, decir, bueno, a un punto le asigno un número o, está bien, es algo que a lo mejor es trivial, pero que ha revolucionado la historia de las matemáticas**[*conocimiento en el horizonte matemático: fundamentación de la importancia del surgimiento de la geometría analítica*]. [*Cambio de configuración*] Vamos a ver, ahora, cómo damos coordenadas en el plano. **¿Se acuerdan cómo dábamos coordenadas en el plano?** [*conocimiento del contenido y de la enseñanza: evocación de conocimientos previos*] (mientras borra el pizarrón). A ver, **¿qué tenía que hacer para dar coordenadas en el plano?** [*conocimiento común del contenido: procedimental*] (pausa). **¿Qué quiere decir dar coordenadas en el plano?** [*conocimiento común del contenido: significado*] (nadie responde). **No lo vimos hace tanto como para que ya se lo hayan olvidado** [*conocimiento del contenido y de la enseñanza: evocación de conocimientos previos*], a ver, ¿Qué hace...? (algunos alumnos comentan entre sí posibles respuestas). No, no hace falta que den una definición formal ni mucho menos, porque tampoco vimos una cosa muy formal. Piensen, a ver, **¿qué se les viene a la cabeza cuando piensan en coordenadas de puntos en el plano?** [*conocimiento del contenido y de la enseñanza: invitación a la participación*].

Cada una delas modalidades emergentes permite "acercar" el contenido de los mensajes a las categorías del estudio (dominios del *MKT*) en pos de caracterizarlas, con el fin de alcanzar el objetivo propuesto: conocer la formación que se ofrece a los futuros profesores en geometría analítica elemental a través de la activación de los dominios del *MKT*.

RESULTADOS: SEGUNDA PARTE "LO SUCEDIDO EN LAS CLASES"

Cabe recordar que las unidades de análisis de la investigación, son cada una de las tres sesiones de clase de Geometría I. Las subunidades de análisis, de acuerdo al contenido matemático de referencia, son las configuraciones de mensajes identificadas. A su vez, las configuraciones de mensajes agrupan las modalidades.

En la sesión 1 se reconocieron ocho configuraciones de mensajes:

1. Idea global de la esencia de la geometría analítica.
2. Procedimiento base para la correspondencia entre la recta y el conjunto de los números reales.
3. Análisis de la propiedad de biunicidad para la correspondencia en la recta numérica.
4. Procedimiento base para la correspondencia en el plano cartesiano.
5. Análisis de la propiedad de biunicidad para la correspondencia entre el plano cartesiano y el conjunto de pares de números reales.
6. Importancia de la geometría analítica y del método de Descartes.
7. Relación 1-1 como base de la geometría analítica.
8. Ampliación de la relación 1-1.

En la Tabla 8 se presentan las frecuencias absolutas de activaciones de cada dominio, cuyo contenido –de acuerdo a las modalidades emergentes– será sintetizado a continuación.

Con el propósito de esclarecer el contenido de la Tabla 8, se presenta una secuencia sintetizada de activaciones de las distintas modalidades para cada dominio del *MKT*, correspondientes a la sesión 1.

• Conocimiento común del contenido

Secuencialmente: *procedimientos* y *conceptos* (con *significados*) → *ampliación de casos* (atendiendo a la *precisión matemática*) → *institucionalización* → *procedimientos* (para *ampliar casos*) → introduce *términos matemáticos*→ retoma *conceptos* y *significados* → *deducciones* e *institucionalización*. Transversal: *significados*.

• Conocimiento en el horizonte matemático

Sobre el final: *ubicación en el tiempo* de hechos → conexión con *situaciones reales* → vinculación *sintético-analítica* → *evolución de conceptos* matemáticos. Transversalmente: insinúa *vinculaciones matemáticas posteriores* / presenta *fundamentos sobre la importancia del surgimiento de esta rama* de las matemáticas.

Tabla 8. Dominios activados en las configuraciones de mensajes 5 a 8 de la sesión 1.

	Dominios del *MKT*	Configuraciones de mensajes							
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Conocimiento disciplinar	Conocimiento común del contenido	7	16	4	6	7	1	4	5
	Conocimiento en el horizonte matemático	1	3	3	1	0	8	5	0
	Conocimiento especializado del contenido	4	10	2	10	2	2	6	4
Conocimiento didáctico del contenido	Conocimiento del contenido y de los estudiantes	1	2	3	3	0	0	0	0
	Conocimiento del contenido y de la enseñanza	0	3	1	6	1	2	5	2
	Conocimiento del contenido y del currículum	1	0	0	0	1	2	2	0

• Conocimiento especializado del contenido
Inicio: *re-significación de conocimientos*. Comienzo, intermedio y final: *escritura simbólica* (siempre con otra modalidad). Transversal: *representación gráfica*.

• Conocimiento del contenido y de los estudiantes
En la primera mitad de la clase: *respuestas de los estudiantes con justificación dada por el docente* (con 7 activaciones).

• Conocimiento del contenido y de la enseñanza
En la segunda mitad de la clase: inicia la actividad de la configuración de mensajes evocando *conocimientos previos*. Transversal: *invita explícitamente a los alumnos a participar*.

• Conocimiento del contenido y del currículum
Inicio y final: *articulaciones de esta parte de la asignatura* (geometría analítica) *con la anterior* (geometría sintética), entre otras modalidades con escasa aparición.

En la segunda sesión de clase fueron ocho las configuraciones de mensajes identificadas:

1. Representación de un punto en el espacio.
2. Lugares geométricos de dimensión 0, 1 y 2.
3. Operaciones con lugares geométricos.
4. Lugares geométricos de dimensión 3.
5. Introducción a vectores.
6. Igualdad de vectores.
7. Propiedades de la igualdad de vectores.
8. Ángulo entre vectores.

Una síntesis de la activación de los dominios en las configuraciones de mensajes, indicándose sólo las frecuencias de las modalidades, se presenta en la Tabla 9.

Tabla 9. Dominios activados y configuraciones de mensajes de la sesión 2.

	Dominios del *MKT*	Configuraciones de mensajes							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Conocimiento disciplinar	Conocimiento común del contenido	16	11	5	10	9	23	17	17
	Conocimiento en el horizonte matemático	0	1	1	1	3	4	1	3
	Conocimiento especializado del contenido	10	9	4	11	5	12	13	14
Conocimiento didáctico del contenido	Conocimiento del contenido y de los estudiantes	11	4	2	9	3	2	4	2
	Conocimiento del contenido y de la enseñanza	8	5	4	8	7	5	6	10
	Conocimiento del contenido y del currículum	1	0	3	0	3	2	3	0

Se procede a comentar de manera sucinta algunas particularidades de la activación de cada uno de los dominios para la sesión 2.

• Conocimiento común del contenido
Secuencialmente: *procedimientos* que *amplían lo desarrollado* en la clase anterior → detenimiento en lo *conceptual* → *deducciones* Transversal: instancias parciales de *institucionalización*, acompañadas de *significados*.

• Conocimiento en el horizonte matemático
Intermedio y final: *alcance de las caracterizaciones matemáticas*, acompañado por *insinuaciones de vinculaciones matemáticas posteriores*, entre otras modalidades menos recurrentes.

• Conocimiento especializado del contenido
Inicio: *representación* acompañada de *precisión*. Sobre el final: *representación* → *ejemplificaciones* e *interpretaciones* en dicho registro. Transversal: *representación gráfica/escritura simbólica* acompañada de *re-significación del conocimiento*.

• Conocimiento del contenido y de los estudiantes
Secuencialmente: consideración de las *respuestas de los estudiantes con justificación dada por el docente* y *ejemplificación según el nivel de abstracción de los alumnos*, acompañadas por *previsión de dificultades* y *errores* así como *indagación sobre entendimiento* → consideración de las *respuestas de los estudiantes con justificación dada por el docente*. Transversalmente: comentarios acerca del grado de *complejidad* de lo que se está desarrollando.

• Conocimiento del contenido y de la enseñanza
Al introducir nociones o al ejemplificar: vinculaciones con *elementos concretos*, ya sea del *aula* o de la *cotidianeidad*. Transversal: *direccionamiento de preguntas* acompañado de *invitación a los alumnos a participar/* se busca anclar lo que se está construyendo mediante *evocación de conocimientos previos* y *uso de ideas recientes*.

• Conocimiento del contenido y del currículum
Secuencial: se *articula con otras asignaturas* → se realizan suposiciones sobre la *forma de trabajo en el nivel secundario* de educación (acompañadas de comentarios sobre el *material de estudio* y *vinculaciones con la práctica*). Transversal: *articulación en la misma asignatura* Geometría I.

Las siguientes son las nueve configuraciones de mensajes de la sesión 3. En la Tabla 10 se resumen las frecuencias de activaciones de los dominios del *MKT*.

1. Definición de suma de vectores.
2. Análisis por casos del módulo del vector suma.
3. Buena definición de la suma de vectores.
4. Enunciación de las propiedades de la suma de vectores.
5. Demostración de propiedades.
6. Regla del paralelogramo para la suma de vectores.
7. Diferencia de vectores.
8. Regla del paralelogramo para la diferencia de vectores.
9. Producto de un número real por un vector.

Tabla 10. Dominios activados y configuraciones de mensajes de la sesión 3.

	Dominios del *MKT*	Configuraciones de mensajes								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Conocimiento disciplinar	Conocimiento común del contenido	8	8	12	26	19	0	2	5	13
	Conocimiento en el horizonte matemático	3	0	0	2	0	1	0	0	0
	Conocimiento especializado del contenido	13	8	11	8	15	2	4	4	8
Conocimiento didáctico del contenido	Conocimiento del contenido y de los estudiantes	3	2	2	1	5	0	1	5	0
	Conocimiento del contenido y de la enseñanza	3	3	7	5	7	1	0	2	5
	Conocimiento del contenido y del currículum	3	1	0	7	0	1	0	0	0

Acerca de las activaciones en esta tercera sesión es posible advertir:

• Conocimiento común del contenido
Secuencial: se presentan *conceptos* junto a *procedimientos* asociados → se *institucionaliza*. Sólo en una configuración: se realizan *deducciones*.

• Conocimiento en el horizonte matemático
Al inicio y en dos momentos intermedios: *vinculaciones matemáticas posteriores*.

• Conocimiento especializado del contenido
Transversal: *representación gráfica* acompañada de otras acciones desde lo gráfico: *ejemplificación*, *interpretación* y *demostración/ escritura simbólica* acompañada de *enunciado coloquial simultáneo* en algunas instancias.

• Conocimiento del contenido y de los estudiantes
Intermedio y final: *indagación sobre entendimiento* (en configuraciones asociadas a demostraciones o justificaciones de reglas). Inicio y cierre: consideración de las *respuestas de los alumnos con justificación dada por el docente.*

• Conocimiento del contenido y de la enseñanza
En distintos momentos de la clase: promoción de la *participación de los estudiantes* (no se evidencia cuando enuncia propiedades, presenta reglas o expone una definición) / se alude al *apunte diseñado por el docente* como material de estudio para los alumnos / se *usan colores* para resaltar ideas / se *evocan conocimientos previos* (cuando se enuncian propiedades). Intermedio y final: *administración del tiempo.*

• Conocimiento del contenido y del currículum
Inicio: articulaciones de *contenidos* y *forma de trabajo* con el *nivel secundario.* Intermedio: *articulación con contenidos de otras asignaturas*. De manera aislada: *vinculaciones con lo desarrollado previamente* en esta asignatura.

CONCLUSIONES

Este estudio tuvo como foco de análisis las clases introductorias de geometría analítica en la formación de profesores de matemáticas, mediante observaciones de lo que dice y hace el profesor que imparte la clase (formador de formadores). Acorde con lo señalado por Ball y Bass (2003), se ha procurado conceptualizar el *MKT* en una rama (geometría analítica elemental) y nivel (primer año de estudios superiores para profesor en Matemática) determinados.

En cuanto al *conocimiento especializado del contenido*, se valora especialmente el énfasis puesto por el docente en las representaciones gráficas realizadas, en abundancia, apoyadas muchas veces con explicaciones en lenguaje coloquial o simbólico. Esto se constituye en un elemento clave en una formación de profesores de matemáticas, que intenta superar lo que Arellano y Oktaç (2009) señalan en cuanto a una falta de comunicación entre los distintos registros semióticos en la enseñanza. También lo es para lo que Karrer y Navas (2013) observan en relación con una ausencia del tratamiento de registros plurifuncionales, así como para atender las dificultades que describen Dallemol *et al*. (2014).

Las clases observadas permiten vislumbrar acciones formativas orientadas a revertir el panorama de la escuela secundaria descrito por Alves *et al*. (2010) debido a que, por ejemplo: se explicita el significado de los conocimientos que se van construyendo (*conocimiento común del contenido*); se (re)trabajan los contenidos supuestamente abordados en el nivel secundario (*conocimiento del contenido y del currículum*); se vinculan los marcos geométrico y algebraico que constituyen la geometría analítica (*conocimiento en el horizonte matemático*) y se establecen conexiones entre los enfoques sintético y analítico de la geometría (*conocimiento del contenido y del currículum*). Todo ello pareciera indicar que se propende por formar profesores de forma que se trasciende un nivel técnico de enseñanza.

Sobre esto último se resalta que en las clases, en coincidencia con lo que proponen Bonilla y Parraguez (2013), para favorecer la comprensión de los estudiantes y desarrollar su pensamiento específico, se produce una constante vinculación geometría-álgebra (articulando los registros gráfico, simbólico y coloquial) por medio de la cual se le otorga sentido geométrico a las ecuaciones que se obtienen sin priorizar las técnicas analíticas.

Por otro lado, en el *conocimiento especializado del contenido* es posible advertir profundidad en el tratamiento de lo gráfico al involucrarse operaciones mentales diversas, ya sea en la representación gráfica en sí, como en otras acciones que robustecen el proceso. De hecho se recurre a lo gráfico en momentos en que se requiere rigor matemático, potenciando su utilidad, por ejemplo al hacer una demostración. Se cree que de este modo se contribuye a emplear los gráficos de una manera que dista de un uso instrumental de símbolos y que posibilita construir una concepción global del objeto representado. Todo ello pareciera señalar que la formación que se ofrece en el PM intenta superar un eventual "autismo temático" o falta de complementariedad entre enfoques en la enseñanza de la geometría (Gascón, 2003).

El análisis de los resultados refleja que todos los dominios del *MKT*, en mayor o menor medida, son activados en las clases de geometría analítica observadas. A su vez, la diversidad de modalidades que se han detectado da indicios de la profundidad y riqueza de los conocimientos que se ponen en juego en dichas clases, incluso más allá de lo específicamente disciplinar. De esta manera, se ha logrado caracterizar la formación que se ofrece a los futuros profesores de matemáticas en el PM en lo concerniente a geometría analítica elemental desde los dominios del *MKT* activados en clases disciplinares.

El principal aporte de este artículo en cuanto a la investigación especializada, radica no sólo en la caracterización de la formación que ofrece el PM en esta rama de las matemáticas, sino también en el amplio espectro de modalidades que se han logrado detectar. Estas podrían ser consideradas como encuadre, en estudios posteriores relativos al tema, respecto de qué es posible "encontrar" al interior de cada dominio. En este sentido, puede servir para orientar metodológicamente otros estudios que usen el modelo *MKT* en investigaciones relativas a la formación de profesores de matemáticas, en particular para quienes quieran emplear dicho modelo teórico y diseñar un instrumento para analizar descriptivamente un discurso.

Finalmente se destaca que este trabajo contiene información específica de numerosas cuestiones a tener en cuenta por parte de un profesor en sus clases de geometría analítica elemental, por lo que permite repensar la enseñanza a nivel cuerpo docente en el marco de la carrera PM y, más ampliamente, contribuye a la reflexión y a la formación continua de docentes en matemáticas.

REFERENCIAS

Alves, M., Mendoça, T. y C. Coletti (2010). "A transição ensino médio e Superior: a noçao de retas e planos emR^2 e R^3". En: P. Lestón (editora). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Vol. 23. México.

Arellano, F. y A. Oktaç (2009). "Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su representación gráfica". En: P. Lestón (editora).

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Vol. 22. México.

Ball, D. y H. Bass (2003). "Toward a Practice-based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching". *Proceedings of the Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, 26, pp. 3-14.

Ball, D., Thames, M. y G. Phelps (2008). "Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special?" *Journal of Teacher Education*, 59(5), pp. 389-407.

Bonilla, D. y M. Parraguez (2013). La Elipse desde la perspectiva de la Teoría de los Modos de Pensamiento. En: R. Flores (editora). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Vol. 26. México.

Cabrera, I. (2009). "El análisis de contenido en la investigación educativa: propuesta de fases y procedimientos para la etapa de evaluación de la información". *Pedagogía Universitaria*, 14(3), pp. 71-93.

Chapman, O. (2015). "Understanding and Supporting Mathematics Teachers' Knowledge for Teaching". *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18(2), pp. 101-103.

Coll, C., Colomina, R., Onrubia, J. y M. Rochera (1992). "Actividad conjunta y habla: una aproximación al estudio de mecanismos de influencia educativa". *Infancia y Aprendizaje*, 59-60, pp. 189-232.

Consejo Interuniversitario Nacional (2013). *Estándares para la Acreditación de las carreras de Profesorado Universitario en Matemática.* Consultado el 30 de septiembre de 2013 de http://www.cin.edu.ar/descargas/asuntosacademicos/18-12-%20Subcom.%20Profesorados%20-%20Estandares%20MATEMATICA.doc.

Dallemole, J., Oliveira, C. y L. Moreno (2014). "Registros de representación semiótica y geometría analítica: una experiencia con futuros profesores". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(2), pp. 131-163.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. Cali.

Gascón, J. (2002). "Geometría sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados?"*Suma*, 39, pp. 13-25.

Gascón, J. (2003). "Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria". *Suma*, 44, pp. 25-34.

Hernández, R., Fernández, C. y P. Baptista (2006). *Metodología de la investigación* (4ta. ed.). McGraw Hill. México.

Karrer, M. y S. Navas (2013). Superfícies Esféricas: Uma proposta de ensino como auxílio de um ambiente de geometría dinámica. En: R. Flores (editora).*Acta latinoamericana de Matemática Educativa* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Vol. 26. México.

Mundina, J. (2005). "Análisis de contenido. Posibilidades de aplicación en la investigación educativa". *Revista Interuniversitaria de Formación de Profesorado*, 19 (2), pp. 157-174.

Ponte, J. P. (2014). "Mathematics Teacher Education as a Multifaceted Field of Study". *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(6), pp. 489-490.

Santa Fe. Ministerio de Educación (2014). *Diseño curricular: Educación Secundaria Orientada*. Santa Fe: (s.n.).

Santaló, L. (1999). "La formación de profesores de matemática para la enseñanza media". En: L. Santaló (y colaboradores). *Enfoques: Hacia una didáctica humanista de la matemática*. Troquel. Buenos Aires.

Shulman, L. (1986). "Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching". *Educational Researcher*, 15(2), pp. 4-14.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid. Morata.