Propuestas metodológicas que constituyeron ilusiones en el proceso de enseñanza de la matemática

Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla

Resumen: Se presentan y se discuten críticamente metodologías e instrumentos que fueron propuestos con la ilusión de comprender positivamente el complejo proceso de aprendizaje de la matemática. Se hace un análisis histórico y didáctico de dichas metodologías e instrumentos. Se muestra la inutilidad de unos y, en algunos casos, la peligrosidad de otros.

Palabras clave: instrumentos para la enseñanza de la matemática, evolución histórica de la educación matemática, formación de docentes en matemática.

Methodological proposals that constituted illusions in the teaching of mathematics process

Abstract: In this paper we present and critically discuss methodologies and tools that have been proposed in illusory way as positively decisive in the complex process of learning mathematics. We present historical and didactic analysis to show the futility in some cases and in others the harmfulness.

Keywords: tools for the teaching of mathematics, historical evolution of mathematics education, teacher training in mathematics.

0. PREMISA

La disciplina "Didáctica de la Matemática" tiene una historia propia de aproximadamente 40 años, decretada por estudios específicos al respecto. Uno de los primeros textos en dicha dirección fue el de Artigue, Gras, Laborde y Tavignot

Fecha de recepción: 23 de julio de 2015; fecha de aceptación: 1 de octubre de 2015.

(1994). En dicho trabajo se habla de "20 años de didáctica de la matemática en Francia", lo cual a la fecha implica un poco más de 40 años.

En un intento por definir la evolución histórica de dicha disciplina, se puede tomar como base la evolución de los intereses de los investigadores; así, propusimos a finales del siglo XX el siguiente camino (D'Amore, 1999):

- *Didáctica A* ("A" de "ars docendi", traducción del latín de la palabra "didáctica"): la didáctica de los orígenes, en la cual los estudiosos centraban toda su actividad en las prácticas relacionadas con la enseñanza de la matemática (qué enseñar, cuándo y cómo: currículos, proyectos educativos, instrumentos para la enseñanza...). Temporalmente, esta fase se ubica entre los años 1950 y mediados de los años 1980, aunque continúa todavía hoy, puesto que en algunos centros de estudios de diversos países se persiguen sólo objetivos de este tipo.
- *Didáctica B* ("B" en cuanto sucesiva de "A") o epistemología del aprendizaje de la matemática: es aquella que considera el aprendizaje de la matemática como un hecho específico y tema principal de la investigación. Pensamos en 1986 como fecha aproximada de la transición de la investigación en didáctica A a la investigación en didáctica B, basándonos en el artículo de Guy Brousseau publicado en ese año (Brousseau, 1986). Este artículo es el último de una sucesión de trabajos que tenían como objetivo desmantelar una manera no científica de considerar la investigación en didáctica de la matemática para pasar a una fase nueva. En este artículo, por ejemplo, se funda la teoría de las situaciones didácticas, esencial para el nacimiento de la teoría moderna de la Didáctica de la Matemática (Brousseau, 2015).
- *Didáctica C* ("C" en cuanto sucesiva a "B"): es aquella fase en la cual los investigadores cambian la tipología del sujeto de estudio, pasando del estudiante al docente y a sus convicciones, decisivas para la creación y el análisis de las situaciones de aula (D'Amore, 2006). Podemos considerar los primeros años del siglo XXI como el inicio de esta aproximación (Leder, Pehkonen y Törner, 2002).

Casi siempre centradas en la fase A, se desarrollaron ideas, se dieron sugerencias, se lanzaron propuestas... para un "mejoramiento" de la praxis de enseñanza de la matemática en los diferentes niveles escolares. Puesto que la fase A se caracteriza por la falta de rigor en la investigación, no existen sustentos de carácter científico de las metodologías propuestas. El hecho es que, para poder validar la significatividad de un instrumento de enseñanza (tipología A), es necesario verificar empíricamente el aprendizaje (tipología B). Si las propuestas se quedan en A, no puede existir una confirmación significativa sobre bases científicas ni de los instrumentos ni del aprendizaje.

Además, es bien conocido que el docente se ilusiona por lo general cuando le ofrecen metodologías cuyo creador declara que tienen un efecto positivo garantizado en el aprendizaje, lo hace en una búsqueda de algo que podríamos llamar *panacea* (Kimmel y Deek, 1996). En este artículo se usa precisamente el término "panacea" en el mismo sentido usado por Kimmel y Deek (véase también Powers y Powers, 1999).

El objetivo del presente trabajo es discutir críticamente algunas de estas propuestas ilusorias que tuvieron éxito y gran difusión durante un cierto periodo con la esperanza de que el docente aprendiera a hacer uso de los criterios de análisis de los instrumentos concretos que a menudo se sugieren para su acción de aula.

Dividiremos el artículo en dos partes: algunas ideas metodológicas ilusorias y algunos instrumentos concretos ilusorios. El límite entre metodologías e instrumentos es sutil, ya que muchos creadores de instrumentos presentan metodologías mediante estos. Nosotros decidimos hacer una diferencia entre las ideas abstractas y los instrumentos concretos: en las primeras, se sugieren metodologías de enseñanza, en los segundos, se presentan verdaderos objetos como instrumentos para la enseñanza, pero siempre para colocarlos en las manos de los aprendices. Veremos más adelante una lista y un análisis de los más conocidos de estos instrumentos.

Como punto base de este texto, queremos declarar explícitamente lo siguiente: las elecciones del docente, aun siendo personales, no lo son estrictamente; sus elecciones están fuertemente influenciadas por el contexto ideológico y pedagógico de la época. Por lo cual, no se puede, en ningún momento, "culpabilizar" al docente por sus elecciones, las cuales, en ocasiones, se revelan erróneas a los ojos de los investigadores; lo que se puede hacer es identificarlas, estudiarlas y analizarlas.

1. ALGUNAS IDEAS METODOLÓGICAS ILUSORIAS

Enumeramos, describimos y comentamos algunas propuestas del pasado que condicionaron el complejo proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática sobre bases ilusorias.

1.1 Enseñar la lógica de los enunciados en todos los niveles escolares

En los años 1990-1999 se pensó que, enseñando la lógica de los enunciados a todos los estudiantes de cualquier edad, estos automáticamente aprehenderían las bases mismas de la matemática, aprenderían a "razonar", a hacer uso correcto de deducciones y a demostrar.

Esta ilusión transversal se sustentaba en una analogía entre elementos de la lógica de los enunciados y de la lengua madre: conectivos lógicos como conectores del idioma natural, cuantificadores lógicos como cuantificadores lingüísticos, enunciados lógicos como frases del lenguaje, deducciones como argumentaciones. Después de varios años de experimentaciones en dicho sentido, se evidenció que aquella analogía no era tan inmediata como se pensó (D'Amore, 1991). Aún más allá, se vio que son pocos los estudiantes que, en la elaboración de una demostración, recurren a los elementos aprendidos de la lógica aristotélica. Por el contrario, es generalizado el uso espontáneo e inconsciente de la lógica india (*nyaya*) mucho más anclada a la realidad (una especie de silogismo de cinco términos, uno de los cuales se llama, no casualmente, "ejemplo") (D'Amore, 2005).

En corto tiempo se mostró que enseñar la lógica en todos los niveles escolares era un error metodológico que contribuía a alejar a los estudiantes de la matemática.

Durante varios años, se hizo preceder la enseñanza de la lógica de los enunciados a la enseñanza de la matemática tradicional, casi como una necesidad preliminar. Por lo general, los docentes se centraban en solicitar la repetición mnemónica por parte de los estudiantes de tablas semánticas de verdad de los conectivos.

Nosotros no estamos en contra de la enseñanza de la lógica, siempre y cuando se haga de manera adecuada y oportuna. La lógica formal es parte de la matemática tanto como la aritmética, la geometría o la probabilidad, pero es necesario estar convencidos de que no es la enseñanza de la lógica la que resuelve el problema metadidáctico del aprendizaje de la matemática.

1.2. La teoría "ingenua" de conjuntos

La gran mayoría de las argumentaciones de la matemática son de tipo colectivo, es decir, no tienen que ver con objetos matemáticos sino con clases de estos objetos. Por ejemplo:

- todos los cuadrados son (también) rombos; lo que permite decir que todo cuadrado es un rombo;
- el conjunto de los divisores de 3 es un subconjunto de los divisores de 6.

Dichas argumentaciones, como nos lo enseñó Leonhard Euler (1707-1783), se pueden representar con gráficos oportunos que ilustran muy bien lo que después se llamó "teoría elemental de conjuntos" (D'Amore y Matteuzzi, 1975; Bagni, 1996; Bagni y D'Amore, 2007; D'Amore y Fandiño Pinilla, 2007). Además, como nos lo mostraron los bourbakistas, la matemática puede reducirse al estudio de estructuras y, por tanto, usar la teoría de conjuntos como lenguaje formal para toda la disciplina. Este camino lo había indicado Felix Klein con sus definiciones estructurales de geometría que definen las varias geometrías como grupos algebraicos particulares (D'Amore y Matteuzzi, 1975).

En los años 1960-1970, se inició desde Estados Unidos una reforma radical del currículo de matemática de todos los niveles escolares basada en una *teoría ingenua de conjuntos* como consecuencia de la autocrítica a su sistema educativo derivada del lanzamiento del cohete soviético llamado Sputnik en 1957. "Teoría ingenua de conjuntos" fue una manera de indicar una teoría de conjuntos no demasiado formal y ciertamente no axiomática. La matemática que se propuso teniendo como base esta teoría se llamó: *New Math*, *Nueva Matemática, Matemática moderna* (Phillips, 2014).

Según varios autores, uno de los artífices teóricos de esta propuesta fue André Lichnerowicz (1915-1998) que trabajaba en Francia en esa época. En 1967 el gobierno francés creó la "Comisión Lichnerowicz", formada por un grupo de eminentes docentes de matemática. La Comisión recomendó explícitamente un currículo que asumiera como base la teoría de conjuntos (adaptando esta teoría a cada uno de los niveles escolares) a fin de poner tempranamente a los niños en contacto con las estructuras matemáticas (Mashaal, 2006).

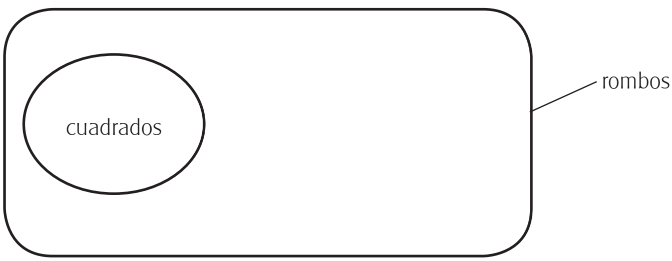
La propuesta puede explicarse así: hay que privilegiar en las escuelas, incluso a partir del preescolar, una teoría no formal de conjuntos, y tratamos dicha teoría y sólo esta hasta que sea aprehendida y quede enraizada en los conocimientos de los estudiantes de forma tal que les permita insertar en este contexto lógico-lingüístico-representativo cualquier aspecto de la matemática.

Como consecuencia de esta perspectiva, desaparecía la geometría euclidiana tradicional y se posponía la aritmética. Se asistía al siguiente fenómeno: los estudiantes de primaria aprendían el significado (al menos con ejemplos particulares) de conjunto vacío, conjunto universo, intersección, subconjunto, pertenencia, etcétera, pero no sabían calcular el resultado de una adición o de una sustracción. La reacción crítica de los matemáticos fue violenta, en particular causó gran sensación el análisis crítico de Morris Kline (1973).

Las investigaciones que se hicieron en varios países, incluso en Italia (D'Amore, 1975), mostraron que se trataba de un sueño lejano de la realidad del aprendizaje y fue así como esta teoría de conjuntos se abandonó rápidamente.

Esta vía a la matemática se reveló del todo innatural, forzada, sin resultados significativos, ya que la capacidad de resolver problemas incluso banales era imposible de alcanzar siguiendo este camino. En particular, se revelaron decisivos los análisis críticos, profundos y detallados de Guy Brousseau (1965, 1972, 1980a, 1980b, 1982, 1984, 1986; Brousseau y Perez, 1981).

Sin embargo, esto no significa que no sea posible diseñar un gráfico en el cual se hable de ciertos conjuntos de objetos matemáticos, como el siguiente:



Todos saben interpretar este gráfico de manera intuitiva: todo cuadrado es un rombo, pero existen rombos que no son cuadrados. Lo que estamos diciendo es que no es necesario desarrollar una teoría específica para diseñar un gráfico con un significado banal e intuitivo como el del ejemplo, ya que, si lo hacemos así, nos arriesgamos a confundir el instrumento del cual nos valemos para la enseñanza con el objeto de estudio, confusión que en didáctica de la matemática se llama *deslizamiento metadidáctico* (Brousseau y D'Amore, 2008).

1.3 Los diagramas de flujo

Los diagramas de flujo nacieron en el ámbito de las representaciones gráficas para proporcionar modelos visibles de algoritmos, procedimientos ordenados de tipos diversos que seguían un orden determinado y secuencias de operaciones. En inglés se llaman *flow charts* y tuvieron un gran desarrollo en informática. Se crearon formas convencionales para indicar la tipología de los objetos en cuestión, por ejemplo rectángulos, rombos, hexágonos, paralelogramos, etcétera. Entre estas formas se colocan flechas para indicar el orden que se debe seguir en la secuencia de las operaciones o de las instrucciones. Se trata, por tanto, de un caso específico de los llamados diagramas de bloques que sirven para describir procesos. Una exhaustiva reseña histórica de los diagramas de flujo y de sus usos se encuentra en Yourdon y Constantine (1979).

El éxito de este instrumento radicó en el intento de los años 1970-1975 para introducir en la enseñanza escolar las bases de la informática. Tal vez una de las primeras contribuciones divulgativas de esta sugerencia es la Guía monográfica número 4 del proyecto *Nuffield para la Matemática* (Fundación Nuffield), con base editorial en Edimburgo, Londres y Nueva York. Esta Guía (Nuffield Project, 1972), exclusiva para los docentes, fue traducida en varios países en un lapso de tiempo muy corto.

En este texto 4 del proyecto *Nuffield*, las páginas 6-12 se dedican a presentar una introducción a los diagramas de flujo como esquemas para estructurar una sucesión de actividades, por tanto propuestos como acceso a la descripción de los algoritmos y después a la programación de las computadoras como objeto de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Hemos analizado numerosas publicaciones de dicho periodo, a partir de la primera mitad de la década de 1980 hasta mediados de los años 1990, y los diagramas de flujo siempre se proponen con los objetivos con que fueron creados originalmente: la idea de enseñar a los estudiantes a programar, al inicio principalmente en lenguaje Basic, que lentamente se abandonó, y hoy se propone en raras ocasiones.

No se sabe en donde surgió la idea de usar este instrumento de carácter netamente descriptivo, convirtiéndolo en un instrumento estratégico-resolutivo, en clave didáctica. Se puede pensar que la hipótesis didáctica se pueda describir como sigue: utilizamos los diagramas de flujo para representar el proceso a seguir en la resolución de problemas escolares sin importar el nivel escolar, iniciando desde la escuela primaria y haciendo coincidir el razonamiento resolutivo con la representación del proceso. Esta manera de pensar se apoyaba en que el uso de los diagramas de flujo ayudaría a los estudiantes a reflexionar sobre el procedimiento y, por tanto, aumentaría su capacidad para resolver problemas. El texto que más a menudo se cita por casi todos los defensores de esta desviación del significado real de los diagramas de flujo es el famoso libro de Seymour Papert (1980), traducido a varios idiomas.

Pero existen dos puntos críticos sobre los cuales reflexionar.

- *Punto 1*

En la resolución de un problema, sin importar qué tipo de problema sea, existe un momento creativo. Por ejemplo, en el clásico estudio de Glaeser (1975) existen cinco fases que constituyen el proceso heurístico en la sucesión de las acciones de resolución de los problemas:

- la preparación;
- la incubación;
- el "bricolaje";
- el eureka;
- la verificación y la redacción.

El eureka es el momento central, irrenunciable y creativo. Más aún, es precisamente este hecho el que diferencia la resolución de un problema respecto a la ejecución de una operación o de un ejercicio, actividades que se considera requieren de una menor exigencia cognitiva. Por tanto, ninguna representación gráfica de un problema, por detallada que sea, facilita la capacidad de afrontar con éxito el momento creativo (estratégico, dicen algunos) que se pone en juego en la resolución de un problema (D'Amore, 1995).

- *Punto 2*

La dificultad de describir la resolución mediante el diagrama el flujo relativo a un determinado problema es siempre ampliamente superior a la dificultad de resolver dicho problema escolar, sin importar la edad o el nivel. Por tanto, a la evidente y bien conocida dificultad de los estudiantes de resolver los problemas con la solicitud de recurrir a los diagramas de flujo no se le dio una respuesta de ayuda en términos reales, sino que se le agregó una dificultad más, por lo general insuperable. Fueron muchos los alumnos de primaria o de secundaria que declaraban tener dificultad para diseñar el diagrama de flujo, incluso cuando habían podido resolver el problema sin recurrir a este diagrama. Hay evidencia de niños que aseguran saber resolver el problema, pero no saber diseñar el diagrama de flujo, y algunos afirman que deben diseñarlo porque es lo que el docente pretende en el aula (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani y Sbaragli, 2008; D'Amore y Marazzani, 2011).

Después de mostrar estos puntos críticos en gran parte del mundo, esta ilusión fue ampliamente criticada y este instrumento fue totalmente abandonado (D'Amore, 2014). Esto no significa que no se puedan usar secuencias bien estructuradas para indicar el orden de las operaciones que se deben realizar, más aún, en ocasiones estas secuencias son considerablemente útiles. Lo explicamos con un ejemplo.

El niño de primaria tiende a utilizar el signo igual dándole un significado procedimental y no relacional, siendo esta última interpretación la esperada en la enseñanza (Camici y otros, 2002). Esto significa que algunos niños resolverán el problema: *"El propietario de una papelería compra 12 cajas de bolígrafos. Cada caja contiene 6 bolígrafos y cada bolígrafo cuesta 2 euros. ¿Cuánto debe pagar el propietario por las cajas de bolígrafos?"*, de la siguiente manera:

$$12 \times 6 = 72 \times 2 = 144$$

y no así:

$$\begin{gathered} 12 \times 6 = 72 \\ 72 \times 2 = 144 \end{gathered}$$

porque consideran que el signo = significa "da" ("resulta"), es decir, que el signo = indica un procedimiento (Boero, 1986; D'Amore, 1993a).

Las dos expresiones son similares desde el punto de vista semiótico, pero no desde el punto de vista semántico. Las dos funciones, objetivación y comunicación, son fundamentalmente diferentes y, por consiguiente, llevan a juicios muy diferentes en lo relacionado con la evaluación de la producción del alumno (Duval, 1995a, b).

Varios investigadores en todo el mundo sugieren proponer a los niños reemplazar el signo = por una flecha para ir apropiándose poco a poco del significado de igualdad (Boero, 1986; D'Amore, 2014). Por consiguiente, es oportuno hacer que los niños sean conscientes del hecho de que se trata de realizar dos operaciones y que la segunda es consecuencia de la primera en el proceso de resolución de dicho problema.

Desde hace algunos años, se abandonó del todo la propuesta de hacer que un esquema del texto preceda al proceso de resolución de un problema y después establecer el procedimiento por seguir en forma de diagrama de flujo; pero esta idea fue una ilusión que permaneció en el mundo de la escuela por más de un decenio.

1.4 "Recetas" metodológicas para resolver problemas

Puesto que el aprendizaje estratégico (Fandiño Pinilla, 2010) parece ser uno de los aprendizajes más complejos en casi todos los niveles escolares, se han dado, en el curso de los años, sugerencias de tipo metodológico que el docente utiliza para incentivar a los estudiantes que están resolviendo un problema. Normalmente, se trata de estímulos concretos e indicadores de direcciones estratégicas para la resolución del problema. Un análisis atento evidencia la inutilidad de estas sugerencias y, en ocasiones, su efecto contrario.

Este tipo de indicaciones se pueden aglutinar en un grupo que llamaremos "recetas metodológicas" (modelos normativos). (La definición de este tipo de modelos, sobre su presencia en las aulas y sobre su futilidad, se encuentra ya en Kleinmuntz, 1976; una reseña histórico-crítica se encuentra en D'Amore, 1999.)

Es interesante el hecho de que, al pedir al estudiante describir sus procesos personales de resolución, él utiliza precisamente las frases del docente como si fueran un guion (Kleinmuntz, 1976; Resnick y Ford, 1981); hoy sabemos que este tipo de actitud se debe, sin duda alguna, al fenómeno del contrato didáctico (Brousseau, 1986; para un análisis más actualizado, véase D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani y Sarrazy, 2010).

Hemos identificado algunos de estos estímulos, considerados por los docentes como guía metodológica útil o necesaria para resolver un problema de matemática. Para cada uno de estos estímulos, proponemos un comentario derivado de las reflexiones críticas de los propios docentes. (Sobre la identificación de estas frases y sobre las autocríticas de los docentes en servicio, véase D'Amore, 1993a y 2014).

- "Debes prestar mucha atención"; el poner atención a lo que se está haciendo no es algo que pueda ordenarse desde el exterior ni es condición suficiente para alcanzar el aprendizaje conceptual ni para la resolución de un problema.

- "Lee bien el texto"; el texto en el cual se propone un problema no siempre aparece necesariamente como un texto escrito, el problema puede presentarse con un diseño o de manera oral o con un gráfico o de cualquier otra forma; y además, el "leer bien" no tiene un significado preciso; el estudiante podría "leer bien" un texto, palabra por palabra, y no entender el sentido de lo leído.
- "Lee bien la pregunta"; además de la crítica precedente, no siempre la pregunta del problema es explícita; en ocasiones ni siquiera está presente.
- "Encierra con un círculo los datos numéricos"; no siempre los datos corresponden a números y no siempre estos datos numéricos son útiles en la resolución de un problema.
- "Subraya la pregunta"; la pregunta no siempre requiere ser evidenciada; además, hay problemas en los que no es posible singularizar la pregunta, lo que lleva inevitablemente al fracaso.
- "Busca la palabra clave que te ayudará a entender"; la supuesta llamada "palabra clave" puede ser un obstáculo semántico en la búsqueda de la operación resolutiva. Estudios de didáctica de la década de 1980-1990 evidenciaron cómo lleva al fracaso esta sugerencia.
- "Decide cuál es la operación (aritmética) para resolver"; no siempre existe una supuesta "operación para resolver" para caracterizar la resolución de un problema.
- "Analiza si el número que estás buscando debe aumentar (en ese caso se trata de una adición o de una multiplicación) o si debe disminuir (en ese caso debes usar...)"; las operaciones "que aumentan" o "que disminuyen" son algunas de las sugerencias más erróneas que el docente puede proporcionar a sus estudiantes; como ejemplo, veamos una multiplicación que no aumenta: 12×0.5 (Fischbein, 1985a, 1985b). (Sobre todo esto véase también: Brousseau y D'Amore, 2008).

Para concluir, diremos que no existen ni caminos ni estrategias, ni algoritmos ni indicaciones verbales oportunas para enseñar a resolver problemas en ningún nivel escolar; la fase creativa "eureka" (véase 1.3) no puede identificarse con un algoritmo. No es por casualidad que hoy se hace una distinción entre "ejercicio" (cuya praxis ejecutiva se desarrolla en la zona efectiva de Vygotsky) y "problema" (cuya praxis resolutiva se desarrolla en la zona de desarrollo próximo de Vygotsky) (Fandiño Pinilla, 2010).

1.5 El laboratorio de matemática

En los años 1960-1970 se desarrolló la idea de no limitar la enseñanza y el aprendizaje únicamente al aula y a la teoría, a las lecciones "frontales" como se decía entonces, sino de extenderlos al "hacer" (De Bartolomeis, 1978; para un resumen histórico de la evolución de las metodologías de enseñanza, véase Frabboni, 2004).

Se trataba de idear actividades manuales en las que el concepto matemático que se quiere alcanzar debía modelarse concretamente y se invitaba al estudiante, solo o en grupo, a entrar en un verdadero taller dotado de instrumentos de trabajo manual (sencillos), a fin de realizar materiales que respondían a ciertas tareas y a ciertas características que eran ilustraciones concretas de ideas matemáticas.

Sobre las modalidades concretas y teóricas de interpretación de los laboratorios, se hicieron grandes debates; nosotros fuimos y somos partidarios de una interpretación "fuerte", es decir:

- un laboratorio debe ser pensado como un verdadero taller, con actividades concretas específicas;
- con actores específicos (no sólo alumnos), por ejemplo, un experto de laboratorio; hay que evitar la identificación del experto de laboratorio con un docente, para no crear en el ambiente del laboratorio las normas negativas del contrato didáctico;
- un local específico (no el aula en un momento que se extrae de la rutina de clase).

Todo esto, con ejemplos concretos, teorizaciones específicas y guías prácticas, se encuentra, por ejemplo, en Caldelli y D'Amore (1986) y en D'Amore (1988a, b, c, 1989a, b, 1990-1991).

Se podría poner en la base de esta metodología didáctica la siguiente reflexión de esperanza: si el estudiante hace, construye la matemática de la realidad y en la realidad, dicha matemática conllevará un aprendizaje eficaz. Vale, sin duda, la siguiente máxima: *si hago, entiendo*.

Se estudiaron entonces múltiples actividades que llevaran a lograr este objetivo que, en un primer momento, parece no tener ninguna relación con la matemática, de por sí abstracta (por ejemplo, Caldelli y D'Amore, 1986; D'Amore, 1988a, b, 1989a, b, 1990-1991).

Al iniciar la década de 1980, un gran número de Provveditorati agli Studi de Italia (Direcciones escolares provinciales, representaciones locales del Ministerio Italiano de la Instrucción Pública, con poderes autónomos de decisión), sensibles a este tipo de experiencias didácticas, concedían una descarga académica: es decir, algunos docentes cambiaban su estatus de docente y se convertían en expertos de laboratorio. Esto se presentó, en particular, en la ciudad de Bolonia (en un cierto momento se llegó a tener 10 docentes en esta condición) y en la provincia (Imola, Castel San Pietro) y Lugo (Ravena).

En nuestra concepción, el laboratorio es, por tanto, un lugar diferente del aula, dotado de todos los instrumentos necesarios para la elaboración de un objeto concreto hecho por un alumno, donde hay un técnico específico a disposición que ayuda a los estudiantes desde un punto de vista concreto. En la discusión entre docente y estudiantes en el aula, se evidencia un problema conceptual matemático, se interpreta desde un punto de vista concreto, se transforma en el proyecto de un objeto que reúna ciertas condiciones y que resuelva ciertos problemas. Individualmente o en grupo, el estudiante, en ciertos horarios, abandona el aula y se transfiere al laboratorio, donde el proyecto tiene que transformarse en un objeto concreto. El objeto terminado se discute entre el grupo y el técnico. En un segundo momento, superada la discusión, se lleva al aula, se propone al docente y a los compañeros de clase, explicándolo desde un punto de vista matemático. Los resultados eran considerados excelentes y la aprobación de esta modalidad era total. Pero ya a mediados de los años 1980, nuestros análisis didácticos y las observaciones empíricas en aula comenzaron a mostrar los límites de esta metodología didáctica (D'Amore, 1988a, b).

En el laboratorio se manifestaban casos de rechazo a la metodología, por ejemplo, en estudiantes poco interesados en el "bricolaje"; se presentaron situaciones análogas a las producidas por el contrato didáctico en el aula. Una vez construido el objeto-modelo, se encontraba dificultad para reinterpretarlo sobre la base del problema matemático que sustentó su construcción; así como muchos otros problemas didácticos.

Hoy, el laboratorio de matemática existe aún, y somos partidarios de él y lo proponemos como metodología didáctica, incluida la fase de las muestras abiertas al público (D'Amore y Giovannoni, 1997). Sin embargo, debido a los análisis hechos por nosotros mismos y a la concientización alcanzada, nos vimos obligados a reconocer que es necesario considerar sus límites y poner de manifiesto las contraindicaciones en el uso de esta metodología didáctica (D'Amore y Fandiño Pinilla, 2003).

El laboratorio como modalidad didáctica de enseñanza-aprendizaje existe aún y se trata de una excelente modalidad a la cual se hace referencia incluso hoy (D'Amore y Marazzani, 2005, 2011). No obstante, al hacer uso de esta modalidad, es necesario considerarla críticamente, tener en cuenta los estudios científicos que se han hecho sobre ella: nadie puede aún pensar en el laboratorio como una panacea o como una metodología cien por ciento positiva.

1.6 Uso de la historia de la matemática en la enseñanza de la matemática

Pensamos que, así como la literatura se estudia a través de su historia, también puede resultar interesante dar a los estudiantes informaciones de carácter histórico sobre la matemática (D'Amore, 2004). Existe una gran diferencia entre el italiano de Dante Alighieri (1265-1321) y el italiano de Italo Calvino (1923-1985). Existe una gran diferencia entre el español de Miguel de Cervantes Saavedra (1547-1616) y el español de Gabriel García Márquez (1927-2014). En ocasiones, se tiene la impresión de que la matemática es ahistórica, que Pitágoras, Descartes y Peano fueron colegas contemporáneos; sin embargo, entre el primero y el último hay un intervalo de 2 500 años, lo que sorprende a muchos y no sólo a los estudiantes.

Considerando siempre el punto de vista del aprendizaje del alumno, fuimos activos defensores del hecho de que muchas cuestiones matemáticas pueden proponerse, fácil y significativamente, recurriendo a hechos históricos y, en esta misma dirección, contribuimos fuertemente en la creación de materiales apropiados para esta transposición didáctica (por ejemplo, D'Amore y Speranza, 1989, 1992, 1995), pero las contribuciones en este sentido de diferentes autores son muchas más.

Más aún, teorizamos el hecho de que el uso de la historia puede ser presentado en tres planos diferentes:

- epistemológico-crítico,
- cronológico y
- anecdótico,

con funciones didácticas profundamente diferentes (D'Amore, 2004).

En relación con la formación de los docentes, además, siempre hemos insistido en la importancia de una formación:

- en primer lugar: disciplinar (pertenecemos al mundo de quienes consideran que no puede enseñar la disciplina X quien no sea un óptimo conocedor de X);
- en segundo lugar: didáctica (conocer la disciplina X es condición necesaria pero no suficiente para enseñar X: hoy existe la didáctica de la disciplina X),
- en tercer lugar: histórica y epistemológica.

Este último aspecto no sólo es necesario por motivos culturales (que a nosotros nos parecen obvios), sino también por motivos profesionales: la didáctica de la matemática, y con mayor precisión la teoría de los obstáculos (D'Amore, 1999), mostró ampliamente la existencia de obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de la matemática (D'Amore, Radford y Bagni, 2006; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani y Sbaragli, 2008). Sin embargo, si en verdad se quiere ayudar a un estudiante con dificultades y si la naturaleza del obstáculo es de tipo epistemológico, es necesario el conocimiento de la historia (también epistemológica) del objeto matemático que se transformó en obstáculo para el aprendizaje.

En el transcurso de los años, hicimos la siguiente hipótesis: en la introducción de un objeto matemático para su aprendizaje, es útil dedicar tiempo a la historia de dicho objeto o, por lo menos, al periodo histórico o al personaje que lo creó; una actividad de este tipo activa el interés hacia el objeto. En esta hipótesis estamos de acuerdo con varios estudiosos (Fauvel y Van Maanen, 2000; Bagni, 2004a, 2004b, 2004c; Bagni, Furinghetti y Spagnolo, 2004).

Pero al usar esta metodología, ¿qué garantías tenemos sobre el aprendizaje efectivo del objeto matemático propuesto? Aun siendo defensores convencidos del uso de la historia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, debemos denunciar el hecho de que la ecuación ingenua:

uso de la historia en la enseñanza = aprendizaje seguro

no funciona automáticamente.

Es cierto que tener siempre a disposición un contexto histórico produce cultura y tiene grandes potencialidades, pero la certeza de activar el interés y, como consecuencia, alcanzar el aprendizaje no están banalmente relacionadas con estos factores ni con estos contenidos.

Aun con estas limitaciones, consideramos que el conocimiento tanto de la historia como de la epistemología de la matemática es necesario en la formación de los docentes, pero esto no significa que tengan que ser utilizados como instrumentos didácticos explícitos con los estudiantes; si se decide hacer uso de la historia con este fin, se requiere mucha cautela. Por sí sólo, este instrumento metodológico es apreciable, pero no es una panacea. Haberlo considerado como tal en un reciente pasado fue una de las tantas ilusiones.

1.7 Adopción de currículos o de proyectos extranjeros

Una actitud típica del mundo de la didáctica activa, pero no de la investigación, es la de considerar que los currículos nacionales no están a la altura de la situación actual y, como consecuencia, miran con admiración los currículos de otros países. Por ejemplo, un determinado país extranjero tiene éxito en las pruebas PISA y, por tanto, se piensa que el sistema escolar de dicho país es el más adecuado, digno de ser imitado e importado. Esta actitud superficial e ingenua no se encontró sólo en el pasado; leemos continuamente palabras de ministros, o de los llamados expertos o de profesionales de la educación, que sueñan con importar a sus países metodologías instrumentales utilizadas en los países cuyos estudiantes tienen éxito en las pruebas PISA, con la esperanza de poder resolver así el fracaso de los estudiantes de sus propios países en relación con la matemática.

En ese tiempo, siempre como ejemplo, se difundió en Italia la idea ilusoria de usar como libros de matemática para la escuela primaria textos escolares finlandeses, sin siquiera traducirlos (idea que hace proselitismo entre las personas acríticas). La red italiana está saturada de comentarios con este propósito y, en numerosas localidades, se están difundiendo banalidades acerca del uso de estos textos, considerándolos la solución a los problemas del aprendizaje de la matemática.

Todo esto se traduce generalmente en importar programas de otros países o en adoptar proyectos didácticos que han tenido éxito en otros contextos. Estos sueños, vagamente xenófilos, aun en sus obvias y evidentes diferencias, son análogos. En el pasado, algunos países, que se autoconsideraban inferiores con respecto al desarrollo, llamaban a "expertos" en modelos extranjeros, les encomendaban la formación de los docentes sobre los nuevos currículos y absorbían sus experiencias. Podríamos tener varios ejemplos concretos, de los cuales tuvimos conocimiento personal. Este comportamiento siempre ha sido un fracaso.

El currículo de matemática de un país debe expresar también la historia social y la historia cultural de dicho país, por lo que no puede ser aséptico, acultural ni ahistórico. No tenemos conocimiento de ningún ejemplo positivo de adopción de modelos del exterior que haya tenido éxito en el aprendizaje. Y la situación es análoga en relación con los proyectos extranjeros. En Italia, por ejemplo, se tradujeron los proyectos RICME (húngaro) (en 1976), Nuffield (de 1967) y el School Mathematics Project (de 1972) (ingleses), Scottish Mathematics Project (se tradujo sólo en mínima parte en la década de 1970) y Fife Project (1978) (estos dos últimos, escoceses) y tantos otros. Se trataba, sin duda alguna, de proyectos interesantes, estimulantes y curiosos, pero abandonados rápidamente por su lejanía a la sensibilidad y a las expectativas de los docentes italianos.

Como decíamos líneas arriba, y como lo ratificamos, un proyecto refleja la identidad cultural, matemática y epistemológica del país en el que nace, así como la práctica didáctica de este país y, por tanto, una cierta manera de pensar. Es verdad que se pueden tomar ejemplos extranjeros, pero en ocasiones se entra en abierto conflicto.

Un proyecto didáctico o un currículo deben ser compartidos, pensados y construidos de común acuerdo; deben respetar la manera de pensar y de ser profesional de cada uno de los docentes. Esto no quiere decir que un currículo o un proyecto extranjero no puedan dar ideas concretas (metodológicas y conceptuales) al docente, es más, seguramente lo harán. Pero confiar en estos con fe ingenua y acrítica ciertamente no ayuda en el proceso profesional de enseñanza y aprendizaje.

El conocimiento crítico de currículos y proyectos extranjeros es, sin duda, de gran ayuda porque abre al mundo y ciertamente sugiere ideas estimulantes. Su uso acrítico no puede ser una panacea, se trata sólo de una idea ilusoria un poco banal.

Una última nota. Para nosotros, un currículo o un proyecto son la expresión de una cultura local del país y representan de algún modo su historia. Pero los resultados de la investigación en didáctica de la matemática, por el contrario, son universales. El contrato didáctico, el fenómeno de la formación de *misconcepciones*, lo inadecuado de ciertos modelos intuitivos respecto a los modelos formales, la dificultad en la gestión de las transformaciones semióticas, el problema del aprendizaje de la generalización, etcétera, son la evidencia de problemáticas en el proceso de aprendizaje que se pueden considerar comunes a todos los países. Recientemente, algunos estudiosos quisieron discutir la veracidad de la última afirmación, proponiendo que los estudios de didáctica de la matemática deberían ser locales y, por tanto, focalizados en el país, sus tradiciones y su historia cultural. Nosotros no excluimos que se puedan hacer consideraciones de este modo de pensar (más aún, somos conscientes y estamos de acuerdo con D'Ambrosio, 2002); pero en general, el interés de la didáctica de la matemática es general y no local.

2. LOS INSTRUMENTOS ILUSORIOS

En este apartado presentaremos algunos materiales concretos o recursos didácticos que fueron pensados como idóneos para la enseñanza de algunos temas de la matemática, en particular, para la enseñanza de la aritmética y la lógica. El énfasis que se creó alrededor de estos instrumentos fue siempre excesivo, ya que fueron tomados como verdaderas panaceas para el aprendizaje, mientras que su creación hacía referencia sólo a metodologías concretas de la enseñanza. Presentaremos sólo algunos, pero estos materiales (llamados algunas veces "materiales estructurados", a causa de su especificidad y de las detalladas reglas de uso), continúan utilizándose todavía hoy, aunque con énfasis siempre menor, mientras que otros "inventores", en diferentes países, continúan creando ilusiones en los docentes menos críticos.

Entre los materiales que no mencionaremos específicamente, tenemos dos categorías.

a) Los juegos lúdicos que hacían referencia al aprendizaje bajo eslóganes como: *Aprender jugando*. Por lo general se trataba sólo de juguetes cuya función dentro del aprendizaje quedaba algo escondida o aparecía como ingenua. Un análisis científico de la eficacia de estos juguetes deberá ser afrontado algún día por un estudioso.
b) El uso de las TIC como garantía de aprendizaje. Este tema necesita un análisis profundo detallado y específico, dada la vastedad de los instrumentos hoy disponibles. Pero los estudios sobre las ilusiones en ocasiones acríticas que se desarrollaron alrededor de estos temas son múltiples, por ejemplo, Davis (1992) habla explícitamente de panaceas. Pero ya al alba del uso de varios instrumentos, en particular la PC en la escuela, había voces que intentaban frenar los entusiasmos fáciles y banales (por ejemplo, D'Amore, 1988c).

Como lo hemos dicho, estas dos tipologías de instrumentos (a y b) requieren un análisis específico que aquí no haremos.

2.1 Las regletas o números en colores

Se trata de materiales por lo general de madera con forma de prismas cuadrangulares regulares; el primero (blanco) es un cubo, es decir, la altura del prisma es la misma del lado del cuadrado de base; el segundo (rojo) tiene el doble de la altura del primero; el tercero (verde) tiene el triple de la altura del primero; y así sucesivamente hasta alcanzar una altura diez veces mayor que la altura del primero, y el color del prisma cambia a medida que cambia la altura de este.

La ideación teórica se debe al matemático, pedagogo y filósofo egipcio Caleb Gattegno (1911-1988), y la realización práctica y la relativa experimentación en la práctica didáctica se debe al pedagogo belga Georges Cuisenaire (1891-1975).

La idea original consiste en agregar una variable semiótica a las ya evidentes diferencias de altura entre los prismas para enseñar a dominar los números naturales del 1 al 10 y la suma de dos o más números naturales igual a 10 (1 + 9, 2 + 4 + 4, y así sucesivamente); es decir: juntando prismas de longitudes diversas hasta alcanzar el prisma de altura 10. En todo esto, el color tiene una función de gusto estético, pero ciertamente ninguna importancia de carácter didáctico.

Tuvimos manera de evidenciar los desaciertos didácticos que se esconden detrás de estos instrumentos que, no obstante, tuvieron una gran popularidad y un gran éxito intercontinental. La idea de agregar a las ya tantas variables semióticas de los números naturales la variable cromática, ciertamente agradable y por tanto atractiva, esconde trampas o dificultades no banales (Locatello, Meloni y Sbaragli, 2008).

La primera es que no existe ninguna "lógica cromática" en los modelos de las operaciones elementales: los colores son del todo casuales, no podría ser de otra manera. Rojo más Verde igual a Amarillo no tiene ninguna motivación de carácter cromático.

La segunda es que los números que se citan representan medidas lineales, las alturas de los prismas cuya base es la misma para todos, pero cuya altura es diferente; sin embargo, no es posible una interpretación cardinal ni ordinal de los números (a menos que se hagan forcejeos innaturales); por consiguiente, se pierden o se olvidan significados importantes que forman parte de la construcción cognitiva del conjunto de los números naturales (Marazzani, 2007).

La tercera es que no existe ninguna representación del número cero, salvo la ausencia del objeto; por tanto, no se puede representar $7 + 0$; el número natural cero queda excluido de este instrumento.

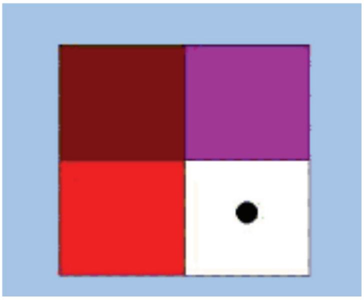
En nuestra opinión, estas graves lagunas y estas evidentes contradicciones no implican automáticamente que no puedan utilizarse las regletas (o números en colores). Todo artefacto humano tiene sus potencialidades positivas; en este caso, por ejemplo, el control directo de las alturas, lo agradable del objeto en sí, la posibilidad de hacer algunas adiciones haciendo simples junturas.

Lo importante es no caer en el engaño ilusorio de la panacea: este instrumento tiene también implicaciones negativas que es necesario conocer; es preciso no idealizar el instrumento como si fuera el mejor entre todos, como si fuera la solución a todos los problemas de aprendizaje. Porque las cosas no son así. Por tanto, es necesario conocer bien las ventajas y desventajas para usar este instrumento, cualquier instrumento, con atención y capacidad crítica. Es necesario dominar el instrumento y no permitir que el instrumento nos domine.

2.2 Los ábacos

La primera ocasión que vimos usar el ábaco en una escuela primaria, al iniciar la década de 1970, se nos presentó como un instrumento cuyo fin era permitir pasar, de manera casi automática, de una base numérica a otra; no por nada se llamaba en ese entonces "ábaco multibase". Entonces era difusa la extravagante idea de que, para poder dominar los nuevos instrumentos informáticos que estaban ingresando en las aulas, se debían dominar varias bases numéricas: la base diez, obviamente, pero también la base cuatro, la seis, la dos...

Para poder usar las PC (algunos hablaban en ese entonces de programar), los estudiantes debían saber gestionar los cálculos en base dos, lo cual explicó también el momentáneo éxito del llamado minicomputador de Georges Papy (1920-2011): un cuadrado de cartón dividido por sus dos medianas en cuatro cuadrados que daban valores diversos a las fichas colocadas en cada uno de ellos (respectivamente, 2^0, 2^1, 2^2 y 2^3).

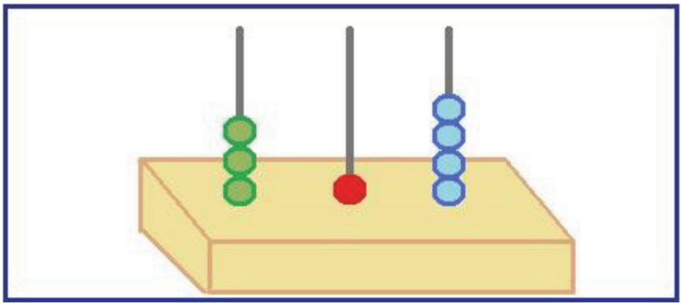


Hoy sabemos que todo esto es totalmente inútil. Para usar las PC, no es necesario saber programar ni mucho menos sirve saber usar con habilidad el sistema numérico de base dos; queda viva y difundida la propuesta didáctica que siempre viene sugerida y evidenciada para controvertir nuestras perplejidades: el ábaco es un buen instrumento para mostrar a nuestros estudiantes que no existe sólo la base diez.

Desde ese tiempo, dijimos a los docentes (y continuamos haciéndolo) que nos parece mucho más interesante mostrar a los estudiantes que existen sistemas numéricos posicionales y sistemas numéricos no posicionales, porque esto muestra a los alumnos lo importante y genial de la idea del sistema posicional, el cual genera, por ejemplo, algoritmos de cálculo simples y rápidos, algoritmos que no hacen necesarios los ábacos para realizarlos, ni piedritas ni otros materiales concretos, ya que basta una hoja de papel y un lápiz. Quienquiera puede intentar realizar la multiplicación 14×6 con lápiz y papel, lo cual resulta banal en el sistema indo-arábigo, pero muy complicado en el romano: XIV × VI...

En este punto, el ábaco se vuelve un instrumento obsoleto, sí, pero curioso, interesante, siempre que sirva no sólo para representar los números, sino también para realizar (intentar realizar) las operaciones.

Aunque el ábaco es un instrumento simple y atractivo, es necesario repensar su función didáctica; un objeto histórico, colocado en el tiempo, interesante, pero ciertamente no una panacea. Se puede utilizar básicamente para mostrar el significado del valor posicional de las cifras que expresan números naturales. Pero debe ser un objeto concreto, posible de tocar y manipular, no sólo un diseño en el tablero o en el libro de texto. Cada columna debe contener nueve bolitas, o fichas; porque, en el momento de agregar la décima, las nueve ya colocadas y la décima de agregar se deben quitar y sólo una de ellas debe colocarse en la columna inmediata a la izquierda. Este es el sentido del sistema de base diez.



314

Pero aquí se anida otro extraño modo "cromático" de ver las cosas. En más de una ocasión, hemos escuchado decir a algunos docentes que las bolitas de las unidades *deben* ser blancas y las de las decenas, rojas: cada una de las bolitas rojas vale 10 bolitas blancas. Esta desafortunada idea es contraria al propio sentido del valor posicional de las cifras; sería como decir que en el numeral 322 la cifra 2 en el centro debe colorearse de rojo, mientras que la cifra de la derecha debe colorearse de negro. El significado del valor posicional es que una cifra, *la misma cifra*, tiene valores diversos según el *puesto* que ocupa, no según *el color* que tenga. Supongamos que un estudiante en la oscuridad toma en la mano tres bolitas. Encendemos la luz. A la pregunta: "¿Cuántas bolitas tomaste?", la respuesta esperada es "tres"; no es, no puede ser "No lo sé, depende del color de cada una de ellas".

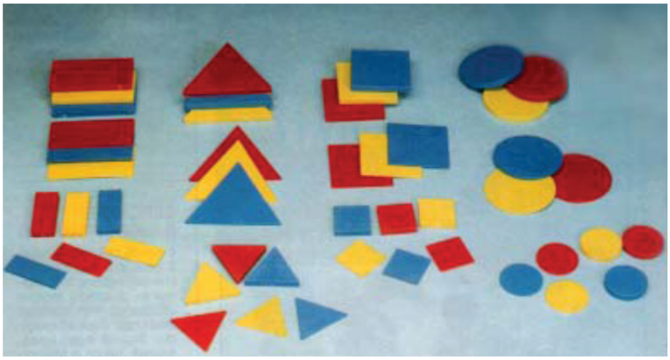
Lo repetimos parcialmente. El sentido aritmético del ábaco es el siguiente: se colocan bolitas perforadas, una a la vez, en la primera columna a la derecha del ábaco; hasta nueve todo va bien; pero cuando se intenta colocar la décima, no será posible, porque el asta donde se están colocando es corta y sólo permite nueve bolitas; entonces, se retiran todas las nueve bolitas ya colocadas y se coloca una en la segunda columna, contando desde la derecha, es decir, la columna de las decenas. Esta bolita representa 10 bolitas, no con base en el color, sino con base en la posición.

El ábaco, por tanto, con todas sus implicaciones y consecuencias, debe ser repensado desde el inicio. Como muchos instrumentos creados por el ser humano, tiene aspectos positivos y negativos. Ciertamente no constituye una panacea.

También las nuevas versiones del ábaco, surgidas en los últimos lustros, tienen aspectos positivos, pero también poseen otros que no se deben eludir: son instrumentos, nada más, no son la solución ni constituyen panaceas. Bienvenidos si se tienen bajo control crítico desde el punto de vista del aprendizaje, pero no deben constituir nuevas ilusiones o crear nuevas recetas.

2.3 Los bloques lógicos

Los llamados "bloques lógicos" fueron creados por el matemático húngaro Zoltan Paul Dienes (1916-2014), uno de los teóricos más influyentes de la New Mathematics a partir de los años 1960. La fama de este instrumento es tal, que no consideramos necesario explicar de qué se trata.



Desde finales de la década de 1950, Dienes se dedicó a plantear teorías con el fin de ilustrar algunos aspectos cognitivos de la matemática de carácter constructivista postpiagetiano; pero apenas a mediados de la década de 1960 su fama fue internacional (Dienes, 1966).

Las ideas de Dienes circularon con extrema desenvoltura en muchas escuelas en el ámbito mundial; pero la aguda crítica que hizo Guy Brousseau (Brousseau, 1986) acabó con toda la ilusión que se había creado alrededor de las propuestas de Dienes, no sólo sus famosos y omnipresentes bloques lógicos, sino toda su construcción teórica. Brousseau llegó a definir un "efecto Dienes" de manera totalmente negativa, con un análisis tan potente y evidente que eliminó toda posibilidad de reacción (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani y Sarrazy, 2010).

Los bloques lógicos (y otros instrumentos para la enseñanza creados por el propio Dienes) tuvieron fama mundial, fueron usados por más de una generación de estudiantes; pero ninguna caja preconfeccionada puede producir aprendizaje; eso sí, puede generar aprendizaje local y circunstanciado (Bruner, 1990). Sin embargo, como lo hemos ya escrito en muchas ocasiones, el "*transfer* cognitivo" (es decir el pasaje de construcción cognitiva de un ambiente a otro) no es automático y los aprendizajes relacionados con un ambiente prefabricado o preconstituido, si se alcanzan, se alcanzan en ese ambiente, porque el aprendizaje del ser humano es situado y su *transfer* o su generalización es tarea típica de la didáctica, no es espontánea ni automática (Lave y Wenger, 1990; D'Amore, 1999; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani y Sarrazy, 2010).

Los "materiales estructurados", como fueron llamados en general, producen aprendizaje en el interior de ellos mismos, localmente; por consiguiente, sirven poco, no sirven en absoluto o son, de hecho, contraproducentes. Ciertamente, un joven estudiante aprende, según sus condiciones, a reconocer que "el conjunto de los círculos amarillos es un subconjunto de los círculos", pero esto no le sirve para concluir espontáneamente, como lo hubiera querido la *mathématique vivante* de Dienes (1972) con un pasaje automático de *transfer* cognitivo, que "el conjunto de los cuadrados es un subconjunto de los rombos". Esta afirmación se adquirirá en otro momento, no es consecuencia directa, no se basa en lo que el estudiante aprendió trabajando con los bloques lógicos de una caja predispuesta.

Aún menos, cuesta trabajo creer que jugando con cuatro notas musicales y aplicando a estas una cierta operación binaria interna, el niño de siete años "estructure su mente" para aprender el concepto de grupo abstracto de tal modo que esté ya disponible para aprender las estructuras algebraicas del mismo tipo, como la formada por las isometrías con la operación binaria de composición (Dienes, 1972; estos ejemplos son tomados del texto citado). Al releer hoy estos sueños, no se logra creer que alguien haya podido pensar razonablemente que esto fuera posible. Pero el estudio de Brousseau (1986) evidenció perfectamente la vacuidad de todo esto.

Lo anterior no quiere decir que no se pueda utilizar este instrumento, basta que no se confunda con panaceas inexistentes y que quien lo proponga en el aula lo haga *cum grano salis*, consciente de los límites, sin vacuas ilusiones. Todo aquello que de matemática se puede hacer con los bloques lógicos se puede hacer con hojas, tapas de botella, figuras de álbumes, fichas de juegos.

3. ALGUNAS AFIRMACIONES PARA CONCLUIR

El sueño de las recetas destruye la profesionalidad de los docentes.

El proceso de enseñanza y aprendizaje es complejo, inútil ilusionarse e ilusionar, no existen recetas. Además, cada estudiante aprende según su propio carácter (Fandiño Pinilla, 2001).

Nadie puede enseñarte a enseñar, tu clase es un unicum.

Como norma, es necesario desconfiar de quien se presenta como alguien capaz de enseñar a enseñar. La tarea de la investigación en didáctica de la matemática no es esta. Por el contrario, dejando plena libertad al profesional de la educación, es decir al docente, de usar las metodologías que considere mejores (en plural), la tarea de la investigación en didáctica de la matemática es la de mostrar y proponer instrumentos concretos para interpretar las situaciones de aula, cuyo esquema es mucho más complejo de lo que podría pensarse en un primer momento, y está formado por maestro, alumno y saber.

El uso de una única metodología de enseñanza lleva al fracaso.

Puesto que cada estudiante aprende según sus propias características, el uso en el aula de una única metodología o modalidad didáctica puede ser exitosa para algunos individuos, pero no para todos. Utilizando diversas modalidades, se aumenta la posibilidad de favorecer el aprendizaje de un mayor número de estudiantes presentes en el aula (D'Amore, 1999).

Sólo la investigación científica hace válidos los resultados.

Nunca confiar en quien no somete al juicio científico serio y pertinente lo que presenta como propuesta de enseñanza (Lederman y Abell, 2007).

El análisis didáctico serio y científico muestra (en ocasiones sorpresivamente) que ciertas actividades dadas por descontadas esconden problemas cognitivos.

Nos limitamos sólo a un ejemplo. En la escuela primaria se utiliza la recta numérica. Algunos docentes la hacen iniciar de cero, otros la hacen partir de 1. Esta "línea" es tan difundida que se termina por creer que es "el modelo" perfecto de los números naturales (cuyo conjunto indicamos con N). Pero los estudios analíticos, por ejemplo, los realizados por la escuela de Athanasios Gagatsis (véase, por ejemplo, Gagatsis, Shiakalli y Panaoura, 2003; Elia, 2011), mostraron varias dificultades e incongruencias.

Comenzamos a pensar en el hecho de que el modelo de N representado por la línea de los números es sólo un modelo ordinal, no cardinal; por tanto, no representa una parte conspicua de significados intuitivos de N. En otras palabras, aquel modelo por sí solo no es completo. Esto representa más una sucesión ordenada que un conjunto numérico cuyos elementos están en posibilidad de responder a la pregunta: "¿Cuántos son?".

Y además, ¿por qué la distancia entre un número n y su sucesivo $n + 1$ debe ser igual a la distancia entre m y $m + 1$? No existe ningún motivo, si se piensa que en N, entre n y $n + 1$ no hay nada, existe el vacío, el conjunto N ordenado es discreto.

Existe además el problema de que los números naturales sirven también en el campo de la medida; en tal caso, la *línea de los números* se puede pensar como el borde escrito de una regla en la cual los números indican distancias desde el extremo 0. Una confusión que el adulto tal vez domina (aunque tenemos nuestras dudas), pero que el joven estudiante no puede controlar.

Además, existe el problema de las operaciones. En N la operación $3 + 5$ tiene como modelo intuitivo, generalmente propuesto por el mismo docente como único, el "unir cardinalidades", la cardinalidad 3 (un conjunto de 3 bolitas) con la cardinalidad 5 (otro conjunto de 5 bolitas). Pero en la línea de los números, este modelo intuitivo se altera y el correcto es de tipo ordinal: partir de 3 y dar 5 pasos o saltos haca la derecha. $3 + 5$ no debería escribirse ni siquiera así, casi no tiene sentido escribirlo así. Se trata de un nuevo modelo, muy poco intuitivo, que funciona sólo porque se supone, en la base, un isomorfismo entre los modelos cardinal y ordinal.

Muchos jóvenes estudiantes, por ejemplo, encuentran dificultades en la interpretación sobre la línea de los números de una operación como $5 + 0$ que, para muchos de ellos, no tiene sentido. Además, hablando de cardinales, $5 + 0$ es 5 sin duda alguna; hablando de ordinales muchos estudiantes no aceptan ni siquiera la escritura $5 + 0$, al considerarla sin significado. Para no hablar de la sustracción, que crea problemas inesperados que están bajo los ojos de todos los docentes. Otra cosa, si la línea de los números se hace partir de 1, como lo hemos visto en muchas ocasiones, entonces todo esto no sólo pierde sentido, sino que se está cometiendo un error. Por ejemplo, no se puede efectuar $5 - 0$, es decir algo que parece muy natural: partir de 5 e "ir" a la izquierda 0 pasos.

Tomamos como ejemplo este modelo para N por ser muy difundido, con el fin de mostrar la manera en que instrumentos que parecen inofensivos e ingenuos y adoptados por muchos esconden, por el contrario, peligros profundos. Lo elegimos precisamente por la difusión que tiene, para sugerir atenciones críticas a todos los docentes, profesionales de la formación de los ciudadanos del mañana.

¿Qué sería la multiplicación sobre la línea de los números? ¿Cómo se pasaría de la adición a la multiplicación? Por lo general se termina con la adición y la sustracción, ya que el modelo de la línea de los números no permite seguir adelante y, parece obvio, un modelo que no permite seguir adelante, evidentemente no es un gran modelo.

Lo cual no significa que no pueda utilizarse este modelo de N; significa sólo que, quien lo use, lo debe estudiar con atención crítica y no creer que es didácticamente indoloro. (En general, sobre este punto puede verse: D'Amore, 1999.)

4. EL NUDO CENTRAL: LA FORMACIÓN DE LOS DOCENTES DE MATEMÁTICA

Formar docentes de matemática en todos los niveles escolares, como ya lo dijimos, implica formación matemática (*in primis*), formación en didáctica de la matemática, formación en historia y epistemología de la matemática (D'Amore, 2004). Pero todo lo que aquí quisimos evidenciar incide en una capacidad crítica que debe convertirse en sensibilidad del futuro docente. Sólo esta sensibilidad debería eliminar por siempre la afanosa búsqueda de la receta y expulsar para siempre del mundo de la escuela a quienes las proponen. Pero la sensibilidad no es posible enseñarla, depende específicamente de la personalidad profesional del docente.

La labor de formadores de seres humanos no es fácil, no puede reducirse a recetas, es un trabajo creativo que cada día requiere nuestra capacidad crítica, siempre atenta y vigilante. Si fuese reconducida a recetas, cualquier persona podría ser docente, y con éxito. Sin embargo, el docente se irrita cuando un extraño al mundo de la formación lo critica o le sugiere métodos diferentes o tiempos diferentes de los que él considera apropiados. Además, al aplicar metodologías de enseñanza que se consideran correctamente funcionales para el aprendizaje, el docente utiliza la propia competencia, que no sólo es *en matemática*, sino que también es una *competencia matemática*, muy diferente de la competencia de un matemático profesional o de un ingeniero (Fandiño Pinilla, 2003, 2006; D'Amore, Godino y Fandiño Pinilla, 2008).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AA. VV. SMP (de 1965), *SMP School Mathematics Project*, Cambridge, Cambridge University Press.

Adler, J. (2000), "Conceptualising Resources as a Theme for Teacher Education", *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 3, núm. 3, pp. 205-224. Doi: 10.1023/A:1009903206236.

Adler, J., D. Ball, K. Krainer, F. L. Lin y J. Novotna (2005), "Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 60, núm. 3, pp. 359-381. Doi: 10.1007/s10649-005-5072-6.

Artigue, M., R. Gras, C. Laborde y P. Tavignot, (eds.) (1994), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Bagni, G. T. (1996), *Storia della matemática*, vol. II, Bolonia, Pitagora.

——— (2004a), "Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche", *La matematica e la sua didattica*, vol. 18, núm. 3, pp. 51-70.

——— (2004b), "La storia della scienza: dall'epistemologia alla didattica", *Progetto Alice*, vol. 15, pp. 547-579.

——— (2004c), "Insegnamento-apprendimento storico", *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 27A-B, núm. 6, pp. 706−721.

Bagni, G. T. y B. D'Amore (2007), "A trecento anni dalla nascita di Leonhard Euler", *Scuola ticinese*, vol. 36, núm. 281, pp. 10-11.

Bagni, G. T., F. Furinghetti y F. Spagnolo (2004), "History and Epistemology in Mathematics Education", en L. Cannizzaro, A. Fiori y O. Robutti (eds.), *Italian Research in Mathematics Education 2000-2003*, Milán, Ghisetti e Corvi, pp. 170-192.

Boero, P. (1986), "Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare", *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, vol. 9, núm. 9, pp. 48-93.

Boero, P., C. Dapueto y L. Parenti (1996), "Didactics of mathematics and the professional knowledge of teachers", en A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (eds.). *International handbook of mathematics education*, Dordrecht y Londres, Kluwer Academic Publishers, pp. 1097-1121. Doi: 10.1007/978-94-009-1465-0_30.

Brissiaud, R. (1988), "De l'âge du capitaine à l'âge du berger. Quel contrôle de la validité d'un énoncé de problème au CE2?", *Revue française de pédagogie*, núm. 82, pp. 23-31.

Brousseau, G. (1965), *Les mathématiques du cours préparatoire*, Parigi, Dunod.

——— (1972), "Processus de mathématisation", *La mathématique à l'école élémentaire,* París, APMEP, pp. 428-457.

——— (1980a), "Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire", *Revue de laryngologie, otologie, rhinologie*, vol. 101, núms. 3-4, pp. 107-131.

——— (1980b), "L'échec et le contrat", *Recherches en didactique des mathématiques*, núm. 41, pp. 177-182.

——— (1982), *À propos d'ingénierie didactique*, Université de Bordeaux I, IREM.

——— (1984), "Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage", *Actes du colloque de la troisième Université d'été de didactique des mathématiques d'Olivet.*

——— (1986), *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Tesis para el doctorado de estado, Université de Bordeaux I.

——— (1986), "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, núm. 2, pp. 33-115.

——— (2015), "Peregrinaciones en la didáctica de la matemática", en B. D'Amore y M. I. Fandiño Pinilla (eds.), *Didáctica de la matemática. Una mirada internacional, empírica y teórica*, Chía (Colombia), Universidad de la Sabana, pp. 13-28. ISBN: 978-958.12.0371.0.

Brousseau, G. y B. D'Amore (2008), "I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica. Dall'empirico al didattico", en B. D'Amore y S. Sbaragli (eds.) (2008), *Didattica della matematica e azioni d'aula*, Actas del XXII Convegno Nazionale: Incontri con la matemática, Castel San Pietro Terme (Bo), 7, 8 y 9 de noviembre de 2008, Bolonia, Pitagora, pp. 3-14.

Brousseau, G. y J. Perez (1981), *Le cas Gaël*, Université de Bordeaux I, IREM.

Bruner, J. (1990), *Acts of Meaning*, Cambridge (MA), Harvard University Press.

Caldelli, M. L. y B. D'Amore (1986), *Idee per un laboratorio di matematica nella scuola dell'obbligo*, Florencia, La Nuova Italia.

Camici, C., A. Cini, L. Cottino, E. Dal Corso, B. D'Amore, A. Ferrini, M. Francini, A. M. Maraldi, C. Michelini, G. Nobis, A. Ponti, M. Ricci y C. Stella (2002), "Uguale è un segno di relazione o un indicatore di procedura?", *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 25, núm. 3, pp. 255-270.

Cornu, B. (1994), "Teacher Education and Communication and Information Technologies: Implications for Faculties of Education", en B. Collis, I. Nikolova y K. Martcheva (eds.) (1995), *Information technologies in teacher education. Issues and experiences for countries in transition. Proceedings of a European Workshop*, París, UNESCO, pp. 93-104.

D'Ambrosio, U. (2002), *Etnomatematica*, Bolonia, Pitagora.

D'Amore, B. (1975), *La matematica inventata*, Bolonia, Pitagora.

——— (1981), *Mostra dei materiali utilizzati per l'educazione matemática*, Catálogo-presentación de la muestra efectuada en la Escuela primaria "G. Garibaldi" de Bolonia, del 30 mayo al 6 junio de 1981, Bolonia, Direzione didattica XV circolo-Assessorato P.I. del Comune di Bologna.

——— (1982a), *Introduzione al catalogo della mostra* "Esposizione di matematica '81-'82", S. E. Gardolo (Tn), Trento, Provincia Autonóma de Trento, Assessorato Istruzione.

——— (1982b), *Cura e introduzione al catalogo della mostra: Un progetto di matematica in mostra*, mayo-junio de 1982, Scuola Elementare Scandellara, Bolonia, Comune di Bologna-Assessorato al coordinamento delle politiche scolastiche.

——— (1987a), *Una mostra di matemática*, Teramo, Giunti y Lisciani.

——— (1987b), "Cura e introduzione" del catalogo*: Un progetto di Matematica in mostra*, Scuola Elementare Scandellara, Bolonia, mayo-junio de 1987.

——— (1988a), "Introducción" al catálogo de la muestra: *Ma.S.E... giocassimo alla matematica*, mustra Ma.S.E. (Matematica Scuola Elementare), Imola (BO), inauguración: 14 mayo de 1988.

——— (1988b), "Il laboratorio di matematica come fucina di idee e di pensiero produttivo", *L'educazione matematica*, núm. 3, suplemento 1, pp. 41-51.

——— (1988c), "Evviva i burattini", *Scuola e Informatica - La Tartaruga*, núm. 2, pp. 20-23.

——— (1989a), "Introduzione" al catalogo: *I bambini e l'educazione matematica-Progetto Ma.S.E.* (Matematica Scuola Elementare), Lugo (Ra), inauguración: 23 de mayo de 1989.

——— (1989b), "Introducción", en *La Matematica fra i 3 e gli 8 anni - Guida alla visita dei laboratório*, Comune di Castel San Pietro Terme (Bo).

D'Amore, B. (1990-1991), "Imparare in laboratorio", *Riforma della scuola*, 4 puntate, vol. I, núm. 11, 1990, pp. 42-43; "Numeri e teoremi in camice bianco", vol. II, núms. 1/2, 1991, pp. 51-53; "Fare per saper pensare", vol. III, núm. 5, 1991, pp. 37-40; "Filosofia e linguaggi del laboratorio", vol. IV, núm. 9, 1991, pp. 36-38. [Resumen en: AA.VV. (1991), *Some italian contributions in the domain of the Psychology of Math. Ed.*, Génova]. [Resumen en M. Barra y otros (1992), *The Italian Research in Mathematics Education: Common Roots and Present Trends*, Quebec, ICME, agosto de 1992, p. 129]. [Este artículo fue reeditado por completo en apéndice en B. D'Amore y M. Picotti (1991), *Insegnare matematica negli anni novanta nella scuola media inferiore*, Milán].

——— (1991), "logica Logica LOGICA, la didattica della logica fra gli 8 e i 15 anni", en B. D'Amore (ed.) (1991), *La Matematica fra gli 8 ed i 15 anni*, Bolonia y Roma, Apeiron, pp. 79-90.

——— (1993a), *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*, Progetto Ma.S.E., vol. XA, Milán, Angeli. [Segunda edición, 1996, Prefacio de G. Vergnaud]. [En español: D'Amore, B. (1997), *Problemas. Pedagogía y psicología de la matemática en la actividad de resolución de problemas*, trad. de F. Vecino Rubio, Madrid, Síntesis].

——— (1993b), "Il problema del pastore", *La vita scolastica*, núm. 2, pp. 14-16.

——— (1995), "Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matemática", *La matematica e la sua didattica*, vol. 9, núm. 3, pp. 328-370.

——— (1999), *Elementi di didattica della matemática*, Prefacio de Colette Laborde, Bolonia, Pitagora. [En español: D'Amore, B. (2006), *Didáctica de la matemática*, Prefacio de Luis Rico Romero, Colette Laborde y Guy Brousseau, Bogotá, Editorial Magisterio. En portugués: D'Amore, B. (2007), *Elementos da Didática da Matemática*, Prefacio de Ubiratan D'Ambrosio, Luis Rico Romero, Colette Laborde y Guy Brousseau, Sao Paulo, Livraria da Física. El libro fue comentado por Hermann Maier en *ZDM*, 2001, vol. 33, núm. 4, pp. 103-108].

——— (2001), "Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos", *Uno*, núm. 27, pp. 51-78.

——— (2002), "Basta con le cianfrusaglie!", *La Vita Scolastica*, núm. 8, pp. 14-18.

——— (2003), *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*, Prefacio de Guy Brousseau, Bolonia, Pitagora. [En español: D'Amore, B. (2005), *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*, Prefacio de Ricardo Cantoral, México, Reverté-Relime].

D'Amore, B. (2004), "Il ruolo dell'epistemologia nella formazione degli insegnanti di matematica nella scuola secondaria", *La matematica e la sua didattica*, vol. 18, núm. 4, pp. 4-30.

——— (2005), "La argumentación matemática de jóvenes alumnos y la lógica hindú (*nyaya*)", *Uno*, núm. 38, pp. 83-99. [En inglés: D'Amore, B. (2005), "Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (nyaya)", *For the learning of mathematics*, vol. 25, núm. 2, pp. 26-32. En italiano: D'Amore, B. (2005), "L'argomentazione matematica di allievi di scuola secondaria e la logica indiana (nyaya)", *La matematica e la sua didattica*, vol. 19, núm. 4, pp. 481-500].

——— (2006), "Didattica della matematica 'C'", en S. Sbaragli (ed.) (2006), *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno*, Actas del Congreso Internacional homónimo, Castel San Pietro Terme (Bo), 23 de septiembre de 2006, Roma, Carocci, pp. 93-96.

——— (2014), *Il problema di matematica nella pratica didattica*, Modena, Digital Index.

D'Amore, B. y M. I. Fandiño Pinilla (2002), "Un acercamiento analítico al triángulo de la didáctica", *Educación Matemática*, vol. 14, núm. 1, pp. 48-62.

——— (2003), "Le due facce del laboratorio. Laboratori di recupero e sviluppo", *La vita scolastica. Dossier*, núm. 1, pp. 4-8.

——— (2007), "Leonhard Euler, maestro di epistemologia e linguaggio", *Bollettino dei docenti di matematica*, núm. 55, pp. 9-14.

D'Amore, B., M. I. Fandiño Pinilla, I. Marazzani y B. Sarrazy (2010), *Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto"*, Prefacio y posfacio de Guy Brousseau, Bolonia, Archetipolibri.

D'Amore, B., M. I. Fandiño Pinilla, I. Marazzani y S. Sbaragli (2008), *La didattica e le difficoltà in matemática*, Trento, Erickson.

D'Amore, B. y L. Giovannoni (1997), "Coinvolgere gli allievi nella costruzione del sapere matematico. Un'esperienza didattica nella scuola media", *La matematica e la sua didattica*, vol. 11, núm. 4, pp. 360-399.

D'Amore, B., D. J. Godino y M. I. Fandiño Pinilla (2008), *Competencias y matemática*, Bogotá, Magisterio.

D'Amore, B. e I. Marazzani (eds.) (2005), *Laboratorio di matematica nella scuola primaria. Attività per creare competenze*, Bolonia, Pitagora.

——— (2008), "L'angolo, oggetto matematico e modello spontaneo", *La matematica e la sua didattica*, vol. 22, núm. 3, pp. 285-329.

——— (2011), "Problemi e laboratori. Metodologie per l'apprendimento della

matemática", *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*, vol. 4, Bolonia, Pitagora.
D'Amore, B. y M. Matteuzzi (1975), *Dal numero alla struttura*, Bolonia, Zanichelli.
D'Amore, B. y S. Sbaragli (2011), *Principi di base della didattica della matematica*. Proyecto: *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*, vol. 2, Bolonia, Pitagora.
D'Amore, B. y F. Speranza (eds.) (1989), *Lo sviluppo storico della matematica - Spunti didattici*, vol. I, Roma, Armando.
——— (eds.) (1992), *Lo sviluppo storico della matematica-Spunti didattici*, vol. II, Roma, Armando.
——— (eds.) (1995), *La matematica e la sua storia. Alcuni esempi per spunti didattici*, Milán, Angeli.
D'Amore, B., L. Radford y G. T. Bagni (2006), "Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali", *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 29B, núm. 1, pp. 11-40.
Davis, Z. (1992), "Alternative mathematics materials: Panacea or obstacle?", en C. Breen y J. Coombe (eds.), *Transformations: The first years of the Mathematics Education Project*, Ciudad del Cabo (SA), Mathematics Education Project, pp. 18-37.
De Bartolomeis, F. (1978), *Sistema dei laboratori per una scuola nuova necessaria e possibile*, Milán, Feltrinelli.
Dienes, Z. P. (1966), *Construction des mathématiques*, París, Presses Universitaires de France.
——— (1972), *La mathématique vivante*, París, OCDL.
Duval, R. (1995a), *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Berna, Peter Lang.
——— (1995b), "Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?", *Actes de l'École d'été* 1995.
Elia, I. (2011), "Le rôle de la droite graduée dans la résolution de problèmes additifs", *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Irem de Estrasburgo, vol. 16, pp. 45-66.
Fandiño Pinilla, M. I. (2001), "La formazione degli insegnanti di matematica: una cornice teorica di riferimento", *La matematica e la sua didattica*, vol. 15, núm. 4, pp. 352-373.
——— (2003), "'Diventare competente', una sfida con radici antropologiche", *La matematica e la sua didattica*, vol. 17, núm. 3, pp. 260-280.
——— (2006), *Currículo, evaluación y formación docente en matemática*, Bogotá, Magisterio.

Fandiño Pinilla, M. I. (2008), *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*, Prólogo de Giorgio Bolondi, Bogotá, Magisterio.

——— (2010), *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática,* Prólogo de Giorgio Bolondi, Bogotá, Magisterio.

Fauvel, J. y J. A. van Maanen (eds.) (2000), *History in Mathematics Education. An ICMI study*, Dordrecht, Kluwer.

Fischbein, E. (1985a), "Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari", en L. Chini Artusi (ed.) (1985), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Bolonia, Zanichelli-UMI, pp. 122-132.

——— (1985b), "Intuizioni e pensiero analitico nell'educazione matemática", en L. Chini Artusi (ed.) (1985), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Bolonia, Zanichelli-UMI, pp. 8-19.

Fischbein, E. y G. Vergnaud (1992), *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, (ed. Bruno D'Amore), Bolonia, Pitagora.

Frabboni, F. (2004), *Il laboratorio*, Roma y Bari, Laterza.

Frank, M. L. (1985), "What myths about mathematics are held and conveyed by teachers?", *Arithmetic Teacher*, núm. 37, pp. 10-12.

Freitas, J. L. M. y V. Rezende (2013), "Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica", *RPEM, Revista Paranaense de Educação Matemática*, vol. 2, núm. 3, pp. 10-34.

Glaeser, G. (1975), *La matematica moderna per chi deve insegnare,* Milán, Feltrinelli.

Gagatsis, A., M. Shiakalli y A. Panaoura (2003), "La droite arithmétique comme modèle géométrique de l'addition et de la soustraction des nombres entiers", *Annales de didactique et de sciences cognitives*, núm. 8, pp. 95-112.

Hilbert, D. (1899), "Grundlagen der Geometrie", en AA. VV. (1899), *Festschrift zur Feier der Entüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen*, Leipzig, Teubner, pp. 1-92.

Kimmel, H., y F. Deek (1996), "Instructional technology: A tool or a panacea?", *Journal of Science Education and Technology*, vol. 5, núm. 1, pp. 87-91. Doi: 10.1007/BF01575474.

Kister, P. y J. Navarro (1973), *La nueva matemática*, Barcelona, Salvat.

Kleinmuntz, B. (ed.) (1976), *Problem solving. Ricerche, metodi, teoria,* Roma, Armando.

Kline, M. (1973), *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math*, Nueva York, St. Martin's Press.

Lave, J. y E. Wenger (1990), *Situated Learning: Legitimate Periperal Participation*, Cambridge, Cambridge University Press.

Leder, G. C., E. Pehkonen y G. Törner (eds.) (2002), *Beliefs: A hidden variable* *on mathematics education?* Dordrecht, Boston y Londres, Kluwer Academic Press, pp. 177-194.

Lederman, N. G. y S. K. Abell (eds.) (2007), *Handbook of Research on Science Education*, Routledge (NJ), Lawrence Erlbaum Associates.

Locatello S., G. Meloni y S. Sbaragli (2008), "Soli, muretti, regoli e coppie ... Riflessioni sull'uso acritico dei regoli Cuisenaire-Gattegno: i numeri in colore", *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 31A, núm. 5, pp. 455-483.

Marazzani, I. (ed.) (2007), *I numeri grandi*, Trento, Erickson.

Mashaal, M. (2006), *Bourbaki: A Secret Society of Mathematicians*, Providence (RI), American Mathematical Society.

Moser, J. M. (1985a), "Alcuni aspetti delle più recenti ricerche sull'apprendimento dei concetti e delle abilità fondamentali della addizione e della sottrazione", en L. Chini Artusi (ed.) (1985), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Bolonia, Zanichelli-UMI, pp. 46-60.

——— (1985b), "Analisi delle strategie di risoluzione dei problemi verbali", en L. Chini Artusi (ed.) (1985), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Bolonia, Zanichelli-UMI, pp. 61-85.

Nuffield Project (1972), *Computers and young children*, Veaving Guides, núm. 4, Londres, Nuffield Foundation.

Papert, S. (1980), *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*, Nueva York, Basic Books.

Pehkonen, E. (1994), "On Teachers' Beliefs and Changing Mathematics Teaching", *Journal für Mathematik-Didaktik*, vol. 15, núms. 3-4, pp. 177-209.

Pehkonen, E. y G. Törner (1996), "Introduction to the theme: Mathematical beliefs", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, núm. 28, pp. 99-100.

Phillips, C. J. (2014), *The New Math: A Political History*, Chicago, University of Chicago Press.

Powers, K. D. y D. T. Powers (1999), "Making sense of teaching methods in computing education", en AA. VV. (1999), *Actas del Congreso Frontiers in Education Conference*, San Juan, Puerto Rico, vol. 1, núm. 11B3, pp. 30-35. Doi:10.1109/FIE.1999.839224.

Resnick, L. B. y W. W. Ford (1981), *The psychology of mathematics for instruction*, Hillsdale (NJ), L.E.A.

Schoenfeld, A. H. (1983), "Beyond the purely cognitive: beliefs systems, social cognitions and metacognitions as driving forces in intellectual performance", *Cognitive Science*, vol. 7, núm. 4, pp. 329-363.

Scott, P. B. (1983), "A Survey of Perceived Use of Mathematics Materials by Elementary Teachers in a Large Urban School District", *School Science and Mathematics*, vol. 83, núm. 1, pp. 61-68. Doi: 10.1111/j.1949-8594.1983.tb10091.x.

Treagust, D. F. (2007), "General instructional methods and strategies", en N. G. Lederman y S. K. Abell (eds.) (2007), *Handbook of Research on Science Education*, Routledge (NJ), Lawrence Erlbaum Associates, vol. 1, pp. 373-391.

Vergnaud, G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berna, Peter Lang.

——— (1982), "A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems", en T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (eds.) (1982), *Addition and subtraction*, Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 39-59.

——— (1983), "Multiplicative structures", en R. Lesh e I. Landau (eds.) (1983), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, Nueva York y Londres, Academic Press, pp. 127-174.

Yourdon, E. y L. Constantine (1979), *Structured Design: Fundamentals of a Discipline of Computer Program and System Design,* Saddle River (NJ), Prentice-Hall.

AGRADECIMIENTOS

Los autores de este artículo deseamos agradecer a los tres revisores anónimos que generosamente contribuyeron, con comentarios y sugerencias, a pasar de una versión anterior a la actual. Un agradecimiento especial para los amigos y colegas Salvador Llinares y Alicia Ávila, a quienes les pedimos asesoría en la preparación de esta versión.

DATOS DE LOS AUTORES

Bruno D'Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
bruno.damore@unibo.it

Martha Isabel Fandiño Pinilla
NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
bruno.damore@unibo.it

www.incontriconlamatematica.net/sitoufficialebm/index.php
www.dm.unibo.it/rsddm
NRME Network of Research in Mathematics Education: www.nrme.org/