ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

El papel del análisis de problemas aritméticos en la formación continua del docente

The role of arithmetic problems analysis in teachers service training

Cecilia Papini

Resumen: En este artículo interpretamos diálogos de un grupo de docentes de escuela primaria en el contexto de un encuentro de formación en relación con la enseñanza de la matemática. En una primera parte, describimos brevemente el marco de referencia y el contexto de realización del dispositivo de formación previsto, para luego analizar la producción del grupo de docentes y proponer una interpretación de los diálogos del encuentro. Los docentes participantes, coordinados por un investigador en didáctica de la matemática, producen en forma colaborativa conocimientos relativos a la enseñanza de las matemáticas cuando se enfrentan a tareas de diseñar, implementar, registrar y analizar situaciones didácticas.

Palabras clave: formación docente, análisis de problemas aritméticos, anticipación de estrategias de los alumnos, explicaciones del docente, enseñanza de las matemáticas.

Abstract: In this article, we interpret the discussions of a primary school teachers group in the context of a formation course related with mathematics teaching.
In the first part, we briefly describe the framework and the implementation context of the proposed course. Then we analyze the teachers group production and we propose an interpretation of the dialogues that took place during the formation meeting. Participants teachers, coordinated by a researcher in mathematics education, collaboratively produce knowledge on teaching mathematics when faced with tasks such as: design, implement, record and analyze teaching situations.

Fecha de recepción: 8 de octubre de 2014; fecha de aceptación: 6 de junio de 2015

Keywords: teacher training, arithmetic problems analysis, students strategies anticipation, teacher explanations, mathematics teaching.

Résumé: Dans ce travail, nous interprétons les dialogues d'un groupe d'enseignants de l'école primaire dans le cadre d'un projet de formation continue.

D'abord, nous décrivons brièvement le cadre et le contexte de réalisation de la formation prévue pour ensuite analyser la production du groupe d'enseignants et proposer une interprétation des dialogues de réunion de formation.

Les enseignants participants, coordonnés par un chercheur en didactique des mathématiques, produisent en collaboration connaissances pour l'enseignement des mathématiques confrontés, à des tâches de conception, de mise en œuvre, l'enregistrement et l'analyse des situations didactiques.

Mots-clés: formation des enseignants, l'analyse mathématique de problèmes arithmétiques, stratégies d'avance étudiants, explications des enseignants, enseignement des mathématiques.

INTRODUCCIÓN

Los diseños y documentos curriculares de la provincia de Buenos Aires proponen a los maestros cambios sustanciales en los modos de enseñar matemática. En ellos se habla de un alumno activo, protagonista en el logro de sus propios aprendizajes y de un docente que acompaña el trabajo del alumno, que diseña y gestiona situaciones de enseñanza posibilitadoras de esta actividad intelectual.

En el caso de la matemática se advierte que estas ideas, transversales a todas las disciplinas en los documentos oficiales, están influenciadas por producciones científicas del campo de la didáctica de la matemática. Los documentos retoman ideas de algunos autores que subscriben la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau 1993, 2007) o las líneas de investigadores franceses en Didáctica de la Matemática.

En estos modelos teóricos de la didáctica de la matemática, se concibe al maestro como el agente educativo que posibilita un amplio margen de responsabilidad matemática a los alumnos en el aula. La clase es vista como una comunidad que produce conocimientos matemáticos a partir de la interacción de los alumnos con problemas que los enfrentan a rupturas respecto de los conocimientos que tienen en un cierto momento. Este trabajo matemático de los alumnos no sólo se realiza en el ámbito personal o individual, en la confrontación de cada alumno con una problemática que ofrece resistencias, sino también en el contexto del grupo de clase que comparte preguntas, explica y discute procedimientos, argumenta en favor de su validez, acuerda y negocia significados con sus pares y con el docente (Brousseau, 1993, 2007; Sadovsky, 2004, 2005).

En este contexto, muchos maestros manifiestan dificultades o incomprensión frente a las exigencias que estas situaciones les plantean y requieren cursos de formación que les permitan orientar sus prácticas en la dirección solicitada. Asimismo, suelen expresar inconformidad frente a muchas de las ofertas formativas habilitadas en el sistema. Sadovsky (2010) sostiene que una de las razones de estas dificultades reside en la forma unidireccional en la que históricamente se ha configurado una concepción de capacitación docente, en la que un capacitador (que posee un saber experto) "transfiere" a los docentes un conjunto de contenidos. Esta transferencia de conocimiento se suele planificar sin la consideración de las características de los problemas o de las inquietudes que el docente puede tener previstas para el desarrollo del proceso de enseñanza en el aula.[1] Justamente el término "capacitación" llama la atención sobre esta unidireccionalidad, pues resalta un sentido de la formación docente en el que alguien más capaz transfiere esas capacidades a otro sujeto y coloca en un segundo plano, o desestima, las diversas mediaciones y transformaciones de los conocimientos que se dan en los procesos de enseñanza y aprendizaje, de los propios docentes.

Desde esta perspectiva, Bednarz (1997) sostiene que el docente no debe ser concebido sólo como un ejecutante. Las comprensiones de los problemas que los docentes manifiestan en la práctica deben subyacer en los programas de formación, práctica que además es muy cambiante y exige la toma de diferentes decisiones en función de las especificidades del contexto. La autora fundamenta esta posición diciendo que si asumimos el conocimiento de los alumnos con un carácter "construido, reflexivo y contextual", entonces debemos reconocer las mismas características en el saber del docente en su campo de intervención específica, en este caso el de la enseñanza de la matemática. Según Bednarz, "la evolución del 'saber enseñar' del docente pasa por la comprensión que éste tiene de su acción y que es partiendo de esa comprensión, que transforma esa acción" (1997, p. 2). La construcción de situaciones de enseñanza de matemática para sus propios alumnos que conlleva la reflexión sobre estas situaciones, previa y posterior a su puesta en el aula, son una fuente de producción de los propios conocimientos didácticos de los docentes en este campo (Berdnarz y Proulx, 2010).

[1] Queremos subrayar que nuestra descripción apunta a la concepción general de la capacitación y no a las decisiones personales de tal o cual capacitador.

Estas ideas, que son parte de nuestro marco teórico, nos conducen a hacer la siguiente hipótesis: si en los cursos de formación continua damos a los docentes la posibilidad de asumir una posición protagónica, activa, en la identificación, análisis crítico y re-elaboración de las ideas que estructuran sus proyectos de enseñanza; si alentamos que produzcan en el marco de esas discusiones conocimientos sobre didáctica de la matemática, es posible que estos mismos conocimientos nuevos (para ellos) les planteen inquietudes que faciliten o impulsen cambios en su práctica de enseñanza.

Consideramos que un modo de posibilitar esta perspectiva de enseñanza es la planificación colectiva de algunas de sus clases. Los docentes deben resolver y analizar problemas matemáticos que propongan a sus alumnos a raíz de un cierto objetivo de enseñanza. Cuando los docentes anticipan posibles resoluciones por parte de sus alumnos, proyectan interacciones con ellos mismos sobre la base de esas anticipaciones; es probable que se desarrolle un proceso de problematización, tanto matemático como didáctico, que desemboque en la producción de conocimientos nuevos para el grupo de docentes. Esta producción se da en relación con su propia clase de matemática, por lo tanto, es probable un cambio en la mirada del docente respecto de ella y, posiblemente también cambie su posición en la clase, fundamentalmente en relación con el reconocimiento de las ideas de sus alumnos.

Con el propósito de explorar esta hipótesis diseñamos un dispositivo de formación que propone, intencionalmente, ubicar a los participantes en posición de elaborar –y re elaborar– ideas propias sobre la enseñanza de la matemática en diálogo con su propia práctica docente, con las directrices curriculares y con la producción en el campo de la investigación en didáctica de la matemática. Por todo ello, el objetivo de la investigación es estudiar el proceso de producción de conocimientos sobre didáctica de la matemática de un grupo de docentes en activo, que participan en un proceso de formación. En este artículo exponemos episodios correspondientes a un trayecto de formación.

BREVE DESCRIPCIÓN DEL TRAYECTO DE FORMACIÓN

En 2010 coordinamos un plan de formación con docentes de escuelas primarias públicas de la ciudad de Tandil.[2] Concebimos para este trayecto la escuela como

[2] Ubicada en la provincia de Buenos Aires, República Argentina.

"unidad" participante (y no el docente considerado individualmente), y lo enmarcamos en la perspectiva de trabajo colaborativo entre docentes. Participaron cinco escuelas públicas primarias de la ciudad de Tandil y por cada una de ellas asistió un equipo constituido por un maestro de grado, el orientador educacional y un directivo del centro. La coordinación estuvo a cargo de la investigadora principal, contando con la colaboración de otra profesora de matemática y cuatro estudiantes del último año de la carrera de profesorado en matemática.[3]

Estudiamos este trayecto de formación[4] que incluyó siete encuentros presenciales, mensuales, de cuatro horas cada uno. Los organizamos a partir de las siguientes actividades centrales: planificar de manera compartida situaciones didácticas para llevarlas a cabo en las aulas de los participantes y analizar sus desarrollos a través de algunos registros de las mismas. Es decir, en algunos de los encuentros, los maestros elaboraron, en forma colectiva, situaciones de enseñanza que luego se implementaron, conducidas y registradas por los equipos de las escuelas. El análisis del funcionamiento en clase de las experiencias planificadas fue el objeto de trabajo de los últimos encuentros. De esta manera, el trayecto de formación se estructuró sobre la base del análisis de una experiencia de enseñanza de las escuelas participantes, cuyos rasgos fueron planificados de manera compartida en el espacio formativo.

Estas actividades centrales implicaron tareas específicas para los docentes tales como: seleccionar problemas, resolverlos, analizarlos anticipando posibles resoluciones de los alumnos; modificar los problemas y secuenciarlos para construir la situación de enseñanza; concebir una puesta en escena con sus distintos momentos, distintos espacios de intervención para los alumnos y para el docente; llevar la secuencia de enseñanza a un aula y gestionarla; planear el registro de las clases y registrarlas efectivamente; analizar estos registros, comprender y explicar distintos aspectos de los mismos teniendo como marco de referencia todo el análisis previo realizado.

Con el propósito de iniciar la construcción de un marco de análisis compartido, propusimos para el primero de los encuentros de formación, el estudio de una colección de problemas, los cuales están incluidos en un apartado del diseño curricular

---

[3] Estudiantes de profesorado en matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA.

[4] El estudio de este trayecto de formación es el eje del trabajo de tesis de doctorado en realización, titulado "Estudio del proceso de producción de conocimientos de un grupo de docentes de educación primaria, en el marco de un proyecto formativo en enseñanza de la matemática", dirigido por la Dra. Patricia Sadovsky, para la Carrera de Doctorado en Ciencias de La Educación, Facultad de Filosofía y Humanidades, Universidad Nacional de Córdoba..

de segundo ciclo,[5] de la provincia de Buenos Aires. En la introducción de este bloque, el documento curricular señala: "Resolver problemas que exijan componer y descomponer números en forma aditiva y multiplicativa analizando el valor posicional y las relaciones con la multiplicación y la división por la unidad seguida de ceros" (DGCyE, 2008, pp. 151 y 152). Incluimos estas dos páginas en el Anexo II.

Elegimos estos problemas por dos razones: por un lado, la temática del valor posicional del sistema de numeración y su relación con las operaciones básicas es un asunto de enseñanza que interesa e involucra a todos los grados de la educación primaria y, por otro, porque el hecho de incluir problemas que pertenezcan al diseño curricular correspondiente a la jurisdicción de estos maestros otorga mayor legitimidad a la tarea de estudiarlos.

La consigna de trabajo propuesta a los equipos participantes en el encuentro fue la siguiente: resolver los problemas y anticipar qué conocimientos matemáticos pueden movilizar, qué dificultades o posibilidades pueden ofrecer a sus alumnos, en qué contextos o cómo los usarían en el aula. Entendemos que esta actividad constituye un primer paso para el diseño de una situación de enseñanza para el aula.

Esta tarea lleva implícita una idea de "problema" como parte del contenido de la interacción entre docentes y alumnos en el aula de matemática, que nos interesaba comunicar "en acto". Consideramos que un problema se constituye cuando se explicitan los conocimientos de los niños a los que se dirige, cuando se concibe una trayectoria a raíz de los mismos, según la cual los niños pondrán en juego ciertas relaciones que se irán transformando a partir de las interacciones en la clase. Cuando los docentes pueden imaginarse la clase en términos de este tipo de interacciones, también pueden pensar en alumnos que producen sus propias ideas, sus propios conocimientos matemáticos, diferentes de los del docente (Brousseau, 2007; Sensevy, 2000, 2007).

Desarrollamos estas tareas compartidas durante el primer encuentro en dos etapas. Una primera, en dos grupos de nueve y siete docentes, un coordinador y dos estudiantes por cada subgrupo y, la segunda, destinada a la reflexión colectiva y conjunta del grupo completo.

En los apartados que siguen analizamos la producción de uno de los subgrupos durante la primera etapa y la puesta en común de todo el grupo, porque consideramos centrales las ideas que se construyeron alrededor de la tarea de *anticipar*

---

[5] Corresponde a los tres últimos años de la escuela primaria, cuarto, quinto y sexto, niños de 9 a 12 años, aproximadamente.

las posibles resoluciones de los niños. A la luz de los resultados obtenidos, en un primer análisis propusimos un marco de interpretación para los diálogos que los docentes manifestaban en estos dos momentos del primer encuentro de formación.

1. Dos tipos de problemas diferentes, posibilidades diferentes

El análisis del registro de este primer encuentro hace evidente que no todos los problemas matemáticos, cuya resolución enfrentan en ese momento los docentes del grupo, favorecen el mismo tipo de reflexión. Concretamente, podemos identificar dos tipos de problemas en relación con las maneras de enfrentarse a ellos o de discutir respecto a ellos. Por un lado, problemas que resuelven rápidamente y con certeza, si bien con diferentes matices, pero no ocasionan dudas ni discusiones. Por otro, un problema, intercalado entre los demás, que genera dudas y desconcierto que constituyen la base de un debate interesante que involucra distintas dimensiones.

Como expusimos los problemas resueltos en este encuentro de formación involucran la temática del valor posicional del sistema de numeración en relación con las operaciones. Incluimos todos los problemas en el Anexo II (DGCyE, 2008, pp. 151 y 152); a modo de ejemplo, transcribimos a continuación dos de aquellos que no motivaron discusión.

> En un juego hay billetes de 1.000, de 100, de 10 y de 1. ¿Cuántos de cada uno se precisan para pagar 4.444; 44.404 y 44.004? ¿Se podrá pagar justo $238 usando sólo billetes de $10?
>
> ¿Cuál de estos números es mayor? (completar la expresión con el signo < o > sobre la línea de puntos)
> 6 x 1.000 + 3 x 100 ...... 8 x 100 + 2 x 100
> 3 x 100.000 + 3 x 100 ...... 2 x 100.000

El análisis de los diálogos del grupo de maestros alrededor de estos problemas nos muestra que los docentes no encuentran dificultades para resolverlos y, fundamentalmente, nos invita a pensar que parecen suponer que sus alumnos los resolverían igual que ellos, sin dificultades. Por ejemplo, encontramos respuestas tales como: "*pero es más que obvio esto*", "*él (refiriéndose al alumno), para saber si es mayor o no, utiliza distintas estrategias, lo compone y listo*", "*compara* *la cantidad de ceros, no es necesario multiplicar"*, y en todos los casos deciden la respuesta o calculan el resultado rápidamente y luego pasan a ocuparse del próximo problema. Este tipo de expresiones y de acciones, que traslucen gran certeza, darían cuenta de que aún no están en condiciones de reconocer la dificultad de aquello que es *obvio* para ellos.

Al confrontar estos diálogos con el que transcribimos en el apartado que sigue, tomamos conciencia de que la "obviedad" o escasa dificultad que tienen estos problemas para los maestros, funciona como un obstáculo para reconocer que habría algún aprendizaje posible para los niños que se enfrentan a ellos.

2. Dificultad matemática y producción didáctica

En este apartado mostramos fragmentos de los diálogos alrededor de un problema que resultó difícil para los maestros y, como consecuencia –interpretamos– generó preguntas y producciones nuevas para el grupo. Las discusiones que se produjeron en la resolución involucraron consideraciones diferentes, anticipaciones respecto de las posibilidades de los chicos para enfrentar el problema, y derivaron, también, en una reflexión colectiva sobre el sentido de la anticipación.

Veamos primero el problema en cuestión.

Analicen cómo y por qué se "agregan" o "quitan" ceros.
23 x 10 = 340 : 10 = 234 x 1.000 =

Como dijimos, mientras resuelven rápidamente los problemas anteriores (sin cuestionarse, calculan el resultado y pasan al siguiente), al enfrentarse a éste último enunciado los maestros desarrollaron un diálogo que recorre distintas temáticas y abre interrogantes que los otros no. Se preguntan qué harán los alumnos, qué dirían como docentes, cómo intervendrían; diferencian "aplicar la regla" de "explicar la regla" o poder fundamentarla, ensayan algunas explicaciones que no les convencen, y se plantean cuestiones al imaginar una clase alrededor de este problema. Se les nota desconcertados, con muchas dudas e incertidumbres que diferencian este momento del trabajo colectivo.

A continuación transcribimos y analizamos el diálogo mencionado organizado en episodios que permiten focalizar algunas de las temáticas abordadas por los maestros. Incluimos el diálogo completo al final del artículo (en el Anexo I).

Primer episodio: Reconocimiento de un problema

El siguiente episodio muestra que los docentes no tienen elaborada la explicación que demanda este problema matemático y se enfrentan a la necesidad de producirla. El problema los interpela y les permite distinguir la regla, de la justificación de la regla: ellos saben que se agregan o quitan ceros para resolver estas operaciones, eso no está en cuestión, la dificultad que se les plantea es la de entender por qué se agregan o quitan ceros.

Posteriormente a la lectura del enunciado del problema, se genera el siguiente diálogo:

> [Unos segundos en silencio, en principio los docentes no participan, cambian de tema hablan de otra cosa, luego retoman el problema].

Esta primera reacción de silencio trasluce desconcierto ante el problema, que empieza a ser percibido como diferente de los demás (cuyas respuestas, como dijimos, fueron rápidas y con certeza).

> 1 As: Porque agregás una decena. ¿Pero los chicos por qué te dirán? [responde la pregunta del problema "por qué se agregan ceros" e inmediatamente añade otra pregunta].

El docente As ensaya una primera explicación matemática e inmediatamente se pregunta por las posibles explicaciones de sus alumnos. Entendemos que estos dos hechos están relacionados para él y, en algún sentido, el primero da lugar al segundo, es decir, la explicación que esboza lo lleva a preguntarse por las posibles explicaciones de los alumnos.

> 2 J: No sé qué dirán.

Otro maestro, J, no retoma la explicación de As pero sí toma en cuenta la pregunta sobre las posibles respuestas de los alumnos. Notamos que ya en estas dos primeras frases del diálogo tienen presente a sus alumnos.

> 3 As: El tema es cómo vos hacés la participación como docente

As agrega una tercera problemática a las que ya consideró en el protocolo 1: ¿cuál es la explicación matemática, cuáles son las posibles explicaciones de los chicos y, según el protocolo 3, cómo intervendría el docente o cómo propondría el maestro una explicación que esté al alcance de sus alumnos, como la que requiere este problema?

4 As: Cómo intervenís, claro [retoma la voz de otro docente que no se puede identificar].
5 P: Cuándo vos le enseñás la mutiplicación por la unidad seguida de ceros, ¿cómo le enseñás al chico? A eso apunté ¿cómo le vas a enseñar por qué se agregan o quitan ceros?

Intervienen el resto de los docentes, P también retoma y explicita la última pregunta de As (líneas 3 y 4), hace foco en la necesidad de enseñar, y lo hace reafirmando la relación con la pregunta matemática que está en el origen de esta reflexión y genera la dificultad: ¿por qué se agregan o quitan ceros? Además, P parece diferenciar y situar en este momento que se trata de enseñar un "por qué".

6 E: Pero vos no le tenés que explicar al chico
7 P: ¡No, no! Pero acá dice analicen cómo y por qué se agregan o quitan ceros... después que aprende él a multiplicarlo por la decena

E verbaliza un supuesto que está presente en varios de los diálogos: "el maestro no tiene que explicar" y P reacciona rápidamente mostrando acuerdo con él y sin cuestionarlo. Pero al mismo tiempo, P insiste en la necesidad de responder a la pregunta matemática que está pendiente y, en términos de enseñanza, insiste en distinguir el operar del justificar la operación, como se menciona en el protocolo 5.

8 J: Entonces ¿cuál es la explicación?

J confirma la hipótesis que la explicación no está disponible para estos maestros en este momento del diálogo, y esto impide que puedan concebir una explicación para (y por) los alumnos.

Están desconcertados no saben cómo explicar, interrumpen con otros temas que no tienen relación con la discusión.

Podemos interpretar que la necesidad de producir una explicación matemática que los docentes no tienen, abre también la posibilidad de formularse preguntas vinculadas a la enseñanza de esta misma explicación. En el seno de una discusión que tiene para ellos un carácter matemático se trenzan ciertos hilos de cuestiones didácticas: ¿Cuál es la explicación matemática? ¿Cómo lo explicaría el alumno? ¿Cómo se lo explico yo?

Este surgimiento imbricado de contenidos, matemáticos y didácticos, provocado por la dificultad matemática que enfrentan, parece permitirles diferenciar el problema matemático para ellos, de las posibles respuestas de los alumnos. Esta separación habilita la posibilidad de imaginarse la interacción con sus alumnos en clase a propósito de este problema.

En este episodio comienzan a esbozarse algunas temáticas que se profundizan en los episodios siguientes: usar una regla es distinto que justificarla, construir una explicación para sí no es lo mismo que construir una para los niños y es diferente "explicárselos" (a los alumnos) y que los alumnos produzcan por sí mismos la explicación.

Segundo episodio: Usar una regla es distinto que justificarla

Este episodio nos permite profundizar en dos distinciones que ya se esbozaron en el episodio anterior: la separación entre usar una regla y justificarla, y la distinción entre una explicación construida por el maestro para sí mismo y elaborar una explicación que esté al alcance de los niños.

El diálogo continúa de esta manera:

9 P: lo que pasa es que vos vas a tener 23 decenas ahí.
10 As: si vos lo pensás como lo dice el chico, vos tenés que hacer la intervención.
11 As: vamos a suponer que vos no enseñaste nada, ¿con qué sale?

Mientras P sigue centrada en producir una explicación para ella y ensaya un comienzo: "hay 23 decenas", As oscila entre pensar *cómo lo diría un chico* y cómo se lo enseñaría ella.

12 E: pero vos le ponés varios ejemplos donde se repita la misma situación.

En el intento de producir una explicación para los alumnos, E sugiere o ensaya una aproximación de tipo inductiva: a través de varios ejemplos se constituiría la regla de agregar el cero (retomamos esta cuestión más adelante, en el episodio cuatro).

13 P: Pero no aprende solo a quitar o sacar ceros.

14 E: ¿Por qué se le agrega un cero? Una cosa es que se dé cuenta y otra es que lo pueda fundamentar.

Si bien P sigue interesada en la cuestión de aprender la regla, aprender a "*sacar ceros*", E (protocolo 14) insiste en marcar que hay diferencias entre aprender a *usar la regla* y *poder fundamentarla*.

En este episodio tenemos indicios que nos permiten interpretar que los maestros están distinguiendo entre la elaboración de una explicación para sí mismos (o para el maestro) y una explicación adecuada para los alumnos, es decir, la explicación de P (vas a tener 23 decenas) no parece ser aceptada por As y E en ese sentido.

Por otro lado, relacionamos las afirmaciones de P (protocolo 13) con las de E (protocolos 6 y 7) porque nos permiten identificar la presencia de otro eje de la discusión: ¿cómo debería enseñar o intervenir el maestro? Por un lado, E (6) dice y P acepta "no le tenés que explicar al chico", y por otro, P (13) afirma "pero no aprende solo". En el episodio que sigue reportamos una reflexión sobre esta temática: cómo se apropian los niños de la justificación de la regla.

Tercer episodio: ¿cómo se apropian los chicos de la fundamentación de la regla?

La búsqueda de esta explicación matemática por y para los docentes (justificaciones para sí mismos), da lugar a que se pregunten por las posibles respuestas de sus alumnos, y en relación con esto también se plantean posibles "maneras" de enseñarla. En el seno de esta búsqueda, empieza a tener un sentido la tarea de anticipar.

Esta interpretación está asociada al siguiente episodio:

15 P: Para que lo pueda fundamentar tiene que haber sido explicado por el docente.

16 Varias: ¡No! [con énfasis].

Estas intervenciones muestran la emergencia de una zona de problematización que se repite en distintos episodios del diálogo: cómo es que el niño aprende a justificar esta regla. P considera que el maestro tiene que explicársela previamente y, de nuevo, el grupo reacciona rechazando esa posibilidad.

17 P: Porque vos le podés mostrar 23x10=230, suponte, ¿qué contrasta ahí? Y que se le agregó un cero, ¿por qué? Ahí está el analizar por qué, qué cuenta hiciste, cómo lo pensaste.

P avanza en el mismo tema y cambia la versión anterior (de la explicación previa) por otra: el analizar *qué cuenta hacés y cómo la pensaste* va a dar lugar, según P, a explicar *por qué* se agrega un cero. Parece suponer que de la pregunta sobre esa acción, de identificar qué cuenta y resolverla, surgirá la justificación de la regla que buscan enseñar. Sin embargo, la propia discusión deja ver que la resolución no necesariamente aporta a la justificación de la regla y que no necesariamente el niño va a encontrar en lo que hizo la explicación que se busca.

[Varios docentes discuten qué harán los chicos. Ensayan explicaciones de los chicos].
18 P: Por ahí piensan en el valor de las decenas, ¿yo qué tengo? "el 23", 23 decenas, que armen 23 grupitos de 10.
19 As: Van a hacer la cuenta parada.
20 M: 23+23+23...10 veces.
21 E: O al revés 10 +10+10 hasta 23 veces.
[Discuten cuál de esas dos es más fácil para los chicos].

En las últimas líneas de este episodio los docentes proponen dos maneras de justificar la regla de la multiplicación por 10 que tienen sentidos muy diferentes. Esto les permite preguntarse cuál será más conveniente para sus alumnos: pues decir 23 veces 10 unidades (o 23 grupitos de 10) tiene un sentido diferente que 10 veces 23 unidades (o 10 grupitos de 23). Consideramos que esta producción se vuelve clave en varios sentidos.

Problematizar las soluciones 10+10+10... 23 veces o 23+23+23... 10 veces, empuja a considerar que habría diferentes recorridos posibles para resolver el problema y a preguntarse cuál de ellas sería más cercana a las ideas de los alumnos. Pero también permite plantearse que la primera solución puede explicar por qué necesariamente el resultado de 23x10 termina en cero; sumar "dieces" siempre da números que terminan en cero y estaría más cercana a la justificación de la regla. Al mismo tiempo, este último argumento le quitaría obviedad a la propiedad conmutativa de la multiplicación, abriría posibilidades para problematizarla, desnaturalizarla, porque si bien las dos versiones dan el mismo resultado, sus sentidos pueden no ser iguales en relación con el problema que las contextualiza. Por eso decimos que esta búsqueda de explicaciones, que no resulta obvia, habilita a pensar sobre los posibles procedimientos de los alumnos y al mismo tiempo otorga un sentido a la tarea de anticipar.

En estrecha relación con la pregunta que identifica este episodio, cómo se apropian los niños de la fundamentación de esta regla, configuramos el próximo episodio porque daría lugar a la reflexión sobre cómo se producen conocimientos matemáticos en el aula.

Cuarto episodio: ¿cómo se producen los conocimientos matemáticos en el aula?

Extraemos del diálogo las líneas que siguen, porque interpretamos que instalan la posibilidad de problematizar los modos de producción de conocimiento matemático en el aula.

> As: Vamos a suponer que vos no enseñaste nada, ¿con qué sale? [se refiere al alumno].
> E: Pero vos le ponés varios ejemplos donde se repite la misma situación.
> ....
> E: Tal vez tenés que poner más 23x10, 15x10, 38x10 [le contesta a otra docente que propone plantearle a los niños 23x10=230 para que busquen una explicación para la regla].

As y E están tratando de imaginarse una escena en el aula en la que se produzca esta explicación para la regla. Interpretamos que E considera que a partir de varios ejemplos el niño podrá inferir ciertas regularidades y encontrar esas explicaciones que estos docentes se proponen enseñar.

Entendemos también que esta propuesta de E encierra el supuesto de que las fundamentaciones matemáticas para la regla se encuentran contenidas en los propios ejemplos de las operaciones y ella esperaría que el alumno las descubra resolviendo o analizando estos ejemplos. Este sería un momento propicio para reflexionar sobre la construcción de esta explicación matemática:

una cadena de argumentos asociados a las propiedades del sistema de numeración y de la multiplicación, que no se desprenden necesariamente del *hacer la cuenta*.

Quinto episodio: El aula como espacio de exploración

Transcribimos el quinto episodio que es también el final del diálogo de la etapa de discusión del sub grupo.

> As: Ese mecanismo que vos decís lo hizo mi hijo en primero [cuenta qué hizo].
> Y: ¿Podríamos probarlo en un salón para saber qué dicen los chicos?
> [Otra docente se ofrece a ponerlo en tercero, intercambian que pueden ponerlo en tercero o en cuarto, que puede resultar porque lo saben aplicar pero seguro que no se han preguntado por qué; se organizan entre dos o tres de la misma escuela].

Este interés de los maestros por explorar el funcionamiento de una "idea" en el aula también es una novedad, muestra un posicionamiento docente diferente de aquel que se ubica en situación de aplicar propuestas de clase elaboradas por otros.

3. Una síntesis de esta primera etapa

Como dijimos, podemos pensar que este último problema propuesto contiene una dificultad matemática diferente de la que involucran los demás: lleva implícita la justificación de una regla matemática. Si bien los docentes conocen y saben aplicar las reglas de la multiplicación o división por potencias de 10, posiblemente no se han detenido antes a reflexionar sobre este conocimiento. Enfrentados al problema, no solamente lo descubren sino también lo toman como un conocimiento cuya enseñanza vale la pena considerar.

Podemos decir que aquello que les implica un desafío los detiene, los invita a pensar más allá, fundamentalmente si disponen de las herramientas para enfrentarlo. Este problema de justificar una regla los interpela, pero en una medida tal que hace que vean como posible su enseñanza en al aula. Por el contrario, la "obviedad" o escasa dificultad que tienen para los maestros los demás problemas, funciona como un obstáculo para reconocer que habría algún aprendizaje posible para los niños.

El hecho de que se detengan a realizar anticipaciones sobre el problema objeto de estudio revelaría que la situación les posibilita una producción de otro tipo, que aún no han explorado. La tarea de justificar la regla de la multiplicación o división por potencias de 10 les exige la búsqueda de un encadenamiento de relaciones que implican diferente complejidad y cierto grado de originalidad.

Todo ocurre como si los docentes pensaran que si el problema introduce un desafío para ellos, habría allí algo nuevo para producir, pero, a la vez, esas explicaciones que elaboran para sí mismos no necesariamente están al alcance de los niños, con lo cual también habría que adaptarlas o producir otras. Este es un momento clave en el diálogo, porque permite a los maestros identificar que los conocimientos que ellos han obtenido sobre este problema no necesariamente estarían al alcance de sus alumnos.

Entendemos que en este ir y venir de los docentes entre la producción de ideas propias sobre el problema en cuestión y la búsqueda de posibles ideas de los niños alrededor de estos contenidos se encuentra una oportunidad de diferenciar los conocimientos de los niños de los propios, y que esa diferenciación impulsaría la necesidad de anticipar las posibles resoluciones de los alumnos para este problema. Asociado a esta necesidad de anticipar, también está el interés por la tarea de planificar recorridos de enseñanza para el aula, en relación con la producción de conocimientos por los alumnos.

4. La puesta en común confirma las interpretaciones y amplía a nuevas cuestiones

La puesta en común del grupo completo de docentes profundiza y amplía el repertorio de cuestiones que se discuten y también nos permite seguir sosteniendo las interpretaciones que esbozamos antes.

Una vez realizada la primera etapa, en la que los docentes se reunieron en dos subgrupos de trabajo, el grupo completo se junta para realizar un análisis colectivo. En esta segunda etapa, el intercambio de ideas entre los integrantes genera reflexiones sobre temáticas diferentes.

Transcribimos un segmento del diálogo alrededor de la idea de anticipar y lo dividimos en dos episodios, en relación con las temáticas que recuperamos en cada uno de ellos.

Primer episodio: Anticipar vs. Aceptar respuestas diferentes

En las líneas de este episodio identificamos una oposición interesante para ser discutida en el espacio de formación, alrededor de la tarea de anticipar. Algunos docentes plantean una tensión u oposición entre anticipar las posibles resoluciones de los alumnos y estar dispuestos, como maestros, para aceptar aquellas respuestas distintas a las esperadas.

Transcribimos el episodio y reflexionamos sobre este sentido de "anticipar" como herramienta didáctica para la clase de matemática.

> 1 E: ¡Qué difícil es anticipar! Por más que uno se siente a anticipar. Más que anticipar, uno tiene que poder tener la flexibilidad de permitir que el otro te dé una respuesta.

E expresa la dificultad que les ha supuesto tratar de anticipar las posibles respuestas de los alumnos en la etapa del trabajo anterior. Ella, además, instala una cierta oposición entre la tarea de *anticipar* las respuestas de los niños y ubicarse como maestros en una posición de *flexibilidad* para aceptar ideas no pensadas previamente.

> 2 As: Es más difícil anticipar cuando vos sabés cuál es la posible respuesta.

Entendemos que esta intervención de As va en el sentido que expresamos en el apartado 3, es decir, si *sabés la respuesta* o si los maestros resuelven fácilmente el problema es más difícil anticipar. O, al revés, la dificultad del problema colocaría en una mejor posición, o más propicia, para anticipar.

> 3 E: Fijate que nosotros estamos resolviendo y nos asombramos de datos como de los ceros, ni se nos había ocurrido, **hay cosas que no se nos ocurren,** que el otro vea que está pensando cosas que no se me habían ocurrido y que son válidas. Es más importante que nosotros seamos flexibles.

E insiste sobre la dificultad para anticipar: *hay cosas que no se nos ocurren;* parece suponer que anticipar significa predecir la totalidad de las respuestas posibles. También insiste en la oposición que propuso en el protocolo 1, anticipar *versus* tener la flexibilidad para aceptar respuestas que no pensó antes.

3 Mi: Para capitalizar.

Entendemos que esta idea de *capitalizar* de *Mi* se refiere a que esta posición flexible en el aula permite al docente obtener respuestas que no se le habían ocurrido, engrosa o amplía su repertorio de respuestas posibles.

...
4 E: ¡Y qué poco acotado que es!
[intervienen varios a favor de la opinión de E].
5 E: ¿Cuántas respuestas posibles hay? Hay algunos que no, que es esto o esto, pero en un caso posible como el de recién, cuando uno anticipa piensa en todas las posibilidades o algunas no se le ocurren.
6 M: Es imposible pensar en todas las posibilidades.

Estas intervenciones confirman las interpretaciones del protocolo 3, los docentes estarían considerando que anticipar sería predecir, pensar en todas las posibilidades, por eso es tan difícil, poco acotado e imposible.

7 P: Es un poco lo que estamos haciendo, que los chicos piensen ¡uy! Eso a mí no se me ocurrió, qué bueno eso yo no lo tenía pensado.
8 As: Que hay varias posibilidades más allá de lo que a mí se me ocurrió como alumno, y ahora que lo dice mi compañera en la pizarra también favorece.
9 E: Por eso yo digo que lo que tenemos que internalizar es esto, me parece todavía más importante que estar media hora anticipando sobre un problema, yo tengo que ser de mente abierta.

Los docentes P, As y E, al parecer, imaginan la posibilidad de que aparezcan en el aula una variedad de respuestas de los alumnos, diferentes entre sí y también distintas de las que ellos pensaron. Para que el maestro esté en posición de aceptar esta escena, E insiste en que es necesaria esta *flexibilidad* (o mente abierta) que, según dice, se opone a la tarea de anticipar. Según E, anticipar sería construir todas las respuestas posibles para que cualquier respuesta que surja en el contexto del aula se encuentre dentro de las previstas. En este sentido, opone esa idea “predictiva” de anticipar, que consta de un número determinado de respuestas posibles, a la idea de flexibilidad para aceptar respuestas que no se pensaron antes.

Como dijimos, encontramos en este episodio la posibilidad de tematizar un conocimiento importante para la formación. Si el formador identifica esta oposición, entre anticipar y ser flexible para aceptar respuestas diferentes, puede invitar a cuestionarla.

En contra de esta oposición pensamos la anticipación como una herramienta que ubica al docente en una posición más flexible para aceptar distintos procedimientos. Anticipar las posibles resoluciones de los alumnos para un problema es un ejercicio que involucra un análisis de distintas relaciones implicadas para resolverlo. En la medida en que la red de relaciones vinculadas a ciertos conceptos es más densa, se amplía la capacidad para comprender otras posibilidades. En ese sentido la anticipación abona a la flexibilidad en lugar de oponerse a ella.

El episodio que sigue, que es continuación del anterior, nos permite identificar un cambio interesante alrededor de la idea de anticipación.

Segundo Episodio: Resignificación del sentido didáctico de la anticipación

En este episodio, los docentes J y M proponen una versión distinta para la idea de anticipación que cuestiona la de anticipación como predicción. El diálogo es el siguiente:

> 10 Y: ¿Para qué servirá anticipar, entonces?
> 11 J: Te predispone y te preparas de otra manera para afrontar esta respuesta, pero quizá no es lo mismo que vos estás parado acá y tenés que llegar acá paso por paso, no es lo mismo que yo intervenga y le dé la respuesta, por ahí ¿no?

Interpretamos que en la primera línea de esta intervención, J rompe con esta oposición que se planteó antes entre anticipación y flexibilidad del docente. J postula justamente lo contrario, la tarea de anticipar abonaría a esta flexibilidad del docente para aceptar respuestas diferentes. También J plantea un tema nuevo en este encuentro de formación: habría un camino o recorrido posible (o *un paso a paso*) entre la posición actual del alumno y la posición a la que se pretende que llegue y, también, una intervención del maestro en este recorrido que habría que planear.

12 E: ¡No! Yo no digo que anticipar no sea importante, digo que hay algo que es más todavía.
13 M: Para no decir que no, porque antes decías "no, está mal". Para que uno sepa cómo avanzar, si quiero ir de acá hasta acá en partes y no decir cómo es de entrada.

M entrelaza su comentario al de J: por un lado, acuerda con él en que anticipar te predispone mejor porque te permite aceptar respuestas que de otro modo rechazarías y, por otro, retoma la mirada de J porque también visualiza un recorrido en partes y una intervención del maestro que merece ser pensada.

La interpretación de este episodio nos invita a añadir una idea de otro orden al sentido de la anticipación. Hablamos de la anticipación como herramienta de producción de nuevos conocimientos, de nuevas relaciones, y agregamos que involucrarse en la tarea de anticipar permite enfrentarse a la imposibilidad de anticipar todo. Esto ubica al docente en posición de dimensionar la inmensidad del mundo de las relaciones y predispone a buscar algunos posibles recorridos de relaciones entre las ideas de los alumnos y los objetos matemáticos a enseñar.

CONCLUSIONES

La identificación de dos tipos de problemas, o dos maneras diferentes de enfrentarlos, permite interpretar que la dificultad matemática que ofrecen es un elemento de interés a la hora de utilizarlos como herramientas de producción de conocimientos en espacios de formación docente. Por el contrario, la escasa dificultad u obviedad funciona como obstáculo para reconocer que habría conocimientos posibles para analizar en torno de algunos problemas.

Es decir, cierta dificultad o incertidumbre en la resolución de un problema genera condiciones favorables para producir explicaciones nuevas. La dificultad encontrada por los maestros frente al problema de justificar la regla (de agregar o quitar ceros para la multiplicación o división por potencias de diez), posibilita preguntarse por las justificaciones para sí mismos y también por las explicaciones para sus alumnos, e invita a diferenciar esas explicaciones. Esta diferenciación coloca al docente en situación de poder "observar" las estrategias de sus alumnos y de reconocer que ellos pueden tener otros conocimientos en relación con un problema propuesto.

Podemos identificar en este trayecto que los docentes atravesaron un proceso de este tipo: encuentran una dificultad, intentan explicarla, se preguntan cómo la explicarían sus alumnos y luego cómo se lo explicarían ellos a sus alumnos. Y, en este mismo proceso, en el que se justifica la necesidad de discutir un objeto matemático y construir una explicación satisfactoria para los alumnos, también queda justificada o encuentra un sentido la anticipación de cuestiones del aula.

Dicho de otro modo, el hecho de enfrentarse a un problema que exige pensar en términos matemáticos y construir un pequeño discurso nuevo en relación con la dificultad que plantea, permite hacer esas distinciones entre los conocimientos propios (de los maestros) y los de los niños. La necesidad de construir este discurso nuevo (que no suele estar en los textos utilizados y que no es obvio para el maestro) introduce una vitalidad a la tarea de explicar y de enseñar que justifica el sentido de anticipar lo que puede ocurrir en el aula con la explicación de ellos mismos y con la comprensión de los niños.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bednarz, N. (1997). *Formación continua de los docentes de matemática: una necesaria consideración del contexto*. Universidad de Quebec. Montreal.

Bednarz, N. y Proulx, J. (2010). Développement professionelle des enseignants en mathématiques. En B. De Lièvre, A. Braun, V. Carelle y W. Lahaye (ed) y L. Dionne (coord. du numéro), *Éducation et formation*. Travail en communautés, collaboration et partenairiats pour le développement professionnelle des enseignants, e-293, pp.21-36. Université de Mons. Bélgica.

Brousseau, G. (1993). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Serie B. Trabajos de Matemática. Centro de Estudios Avanzados (CEA). Facultad de Matemática y Astronomía. Universidad Nacional de Córdoba.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas*. Traducido por Dilma Fregona. Libros del Zorzal. Buenos Aires.

DGCyE (2008). *Diseño curricular para la educación primaria de la provincia de Buenos Aires*, Segundo Ciclo, Matemática, pp. 143-218, La Plata.

Sadovsky, P. (2004). *Condiciones Didácticas para un Espacio de Articulación entre Prácticas Aritméticas y Prácticas Algebraicas*, Informe final de Tesis de Doctorado, Facultad de Filosofía y Letras. UBA.

Sadovsky, P (2005). *Enseñar matemática hoy*. Libros del Zorzal. Buenos Aires: Argentina.
Sadovsky, P. (2010). Conferencia en el marco del Encuentro de alfabetización organizado por el Instituto Superior de Formación Docente núm. 809, Esquel, Chubut.
Sensevy G. (2000). Vers un modele de l'action didactique du professeur à propos de la course à 20. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 20(3), pp. 263-304.
Sensevy G. (2007). "Categorías para describir y comprender la acción didáctica". Capítulo traducido con la autorización de los autores, tomado del libro Sensevy, G & A.

ANEXO I

Problema: Analicen cómo y por qué se "agregan" o "quitan" ceros.

23 x 10 = 340 : 10 = 234 x 1.000 =

Transcripción de la discusión del sub grupo de docentes:

[Unos segundos en silencio, en principio no contestan, cambian de tema hablan de otra cosa, luego retoman].
As: Porque agregás una decena, ¿pero los chicos por qué te dirán?
J: No sé qué dirán.
As: El tema es cómo vos hacés la participación como docente.
As: Cómo intervenís claro [retoma la voz de otro docente que no se puede identificar].
P: ¿Cuándo vos le enseñás la mutiplicación por la unidad seguida de ceros cómo le enseñás al chico? ¿A eso apunté cómo le vas a enseñar por qué se agregan o quitan ceros?
E: Pero vos no le tenés que explicar al chico
P: ¡No, no! pero acá dice analicen cómo y por qué se agregan o quitan ceros... después que aprende él a multiplicarlo por la decena.
J: ¿Entonces cuál es la explicación?
[Están desconcertadas no saben cómo explicar, interrumpen con cuestiones del mate].
P: Lo que pasa es que vos vas a tener 23 decenas ahí.
As: Si vos lo pensás como lo dice el chico vos tenés que hacer la intervención.

As: Vamos a suponer que vos no enseñaste nada, ¿con qué sale?
E: Pero vos le ponés varios ejemplos donde se repita la misma situación.
P: Pero no aprende sólo a quitar o sacar ceros.
E: ¿Por qué se le agrega un cero? Una cosa es que se dé cuenta y otra es que lo puedas fundamentar.
P: Para que lo pueda fundamentar tiene que haber sido explicado por el docente.
Varias: ¡No! [con énfasis]
P: Porque vos le podés mostrar 23x10=230 suponte, ¿qué contrasta ahí? Y que se le agregó un cero, ¿por qué? Ahí está el analizar por qué, qué cuenta hiciste cómo lo pensaste.
[Varias discuten qué harán los chicos. Ensayan explicaciones de los chicos].
As: Te va a parar la cuenta.
[Varias afirman].
P: Por ahí piensan en el valor de las decenas, ¿yo qué tengo? "el 23", 23 decenas, que armen 23 grupitos de 10.
As: Van a hacer la cuenta parada.
M: 23+23+23...10 veces.
E: O al revés 10 +10+10 hasta 23 veces.
[Discuten cuál de esas dos es más fácil para los chicos].
Y: Entonces asumen que multiplicar es sumar tantas veces.
Varias: Sí.
P: Si viene trabajado como siempre recontra asume que el "por" es "veces".
P: Cuando se me complica en el cómo largar hago eso, pongo 23x10=230, ¿por qué da 230? ¿De dónde lo sacamos?
As: ¡Lo pusiste vos te dicen!
[Se ríen].
E: Tal vez tenés que poner más 23x10, 15x10, 38x10.
[Discuten cómo lo podrán resolver los chicos, la cuenta parada, ponerles el resultado y vuelven al ejercicio que tienen que resolver, que les pregunta por qué se agrega el cero].
As: La regla sale en seguida el asunto es por qué es así.
P: Entonces fijate por qué y por ahí sale eso de empezar a agrupar.
Ve: Por ahí en este de ir de a 10, 20 30 40 50 ... ¿qué pasa? Me preocupo por cambiar ese 1, 2 3 4 5 y después ya sé que viene un cero, 10 20 30 40 50...90 100 110 entonces lo que se va modificando es a partir del segundo lugar de la decena, porque siempre en la unidad va a haber un cero, de 10 en 10 siempre hay un cero
[escuchan con mucha atención].

As: Ese mecanismo que vos decís lo hizo mi hijo en primero [cuenta qué hizo].
Y: ¿Podríamos probarlo en un salón para saber qué dicen los chicos?
[Otra docente se ofrece a ponerlo en tercero, intercambian que pueden ponerlo en tercero o en cuarto, que puede resultar porque lo saben aplicar pero seguro que no se han preguntado por qué, se organizan entre dos o tres de la misma escuela].

ANEXO II

Páginas 151 y 152, correspondiente al apartado "Valor Posicional", Bloque de Números Naturales, del Diseño curricular de segundo ciclo de la provincia de Buenos Aires (DGCyE, 2008). Resaltamos la temática y los problemas trabajados en el encuentro estudiado.

Organización y secuenciación por año | Números Naturales

4º	5º	6º
Usar y conocer los números		
Resolver problemas que implican usar, leer, escribir y comparar números hasta el orden de los millones	**Resolver problemas que implican usar, leer, escribir y comparar números sin límite**	**Resolver problemas que implican usar, leer, escribir y comparar números sin límite**
El docente propondrá a los alumnos/as problemas que les permitan explorar las regularidades de la serie numérica oral y escrita para leer y escribir números convencionalmente hasta al menos los millones. Para ello será necesario ofrecer información sobre los nombres y escritura de números redondos (diez mil, veinte mil....cien mil, doscientos mil, trescientos mil... un millón, dos millones, etc.). Los alumnos/as resolverán problemas que involucren ordenar números de mayor a menor, completar y analizar grillas con números de 10 en 10, de 100 en 100, de 1000 en 1000, etc. Podrán interpretar información en rectas numéricas, averiguar anteriores y siguientes de un número, resolver problemas que impliquen usar escalas ascendentes y descendentes de 100 en 100, de 1000 en 1000, de 500 en 500, de 5000 en 5000, etc. Por ejemplo: *En un taller tienen 13.500 tornillos. Si fabrican 500 por semana, ¿cuántos tendrán en cada una de las próximas cuatro semanas?*	El docente propondrá a los alumnos/as problemas que les permitan explorar las regularidades de la serie numérica oral y escrita para leer y escribir números de cualquier tamaño en forma convencional. Para ello será necesario ofrecer información sobre nombres y escrituras de números "redondos" (miles, diez miles, cien miles, millones, diez millones, billones, etc.) Por ejemplo: *¿Cuál de los siguientes números es el treinta y tres millones trescientos mil treinta y tres? 33.300.033 - 33.330.303 - 33.303.033 - 333.333.033. Si así se escribe cuatro mil millones (4.000.000.000), ¿qué números serán éstos: 4.444.444.444; 400.000.000.000?* También se ofrecerán problemas que exijan ordenar números; utilizar la recta numérica para representarlos; usar escalas ascendentes y descendentes de 1000 en 1000, de 2500 en 2500, de 5000 en 5000, etc. Por ejemplo: *En un taller tienen 350.000 tornillos. Si compran 2500 por semana, ¿cuántos tendrán en cada una de las próximas cuatro semanas?*	Si los alumnos/as de 6º aún no tuvieran dominio de este contenido a partir del trabajo de años anteriores, el docente propondrá problemas que les permitan explorar las regularidades de la serie numérica oral y escrita para leer y escribir números de cualquier tamaño en forma convencional. Para ello será necesario ofrecer información sobre nombres y escrituras de números "redondos" (miles, diez miles, cien miles, millones, diez millones, billones, etc.). Algunos problemas: *¿Cuál de los siguientes números es el treinta y tres millones trescientos mil treinta y tres? 33.300.033 - 33.330.303 - 33.303.033 - 333.333.033. Si así se escribe cuatro mil millones (4.000.000.000), ¿qué números serán éstos: 4.444.444.444; 400.000.000.000?* También se ofrecerán problemas que exijan ordenar números; utilizar la recta numérica para representarlos; usar escalas ascendentes y descendentes, etc.
Valor posicional		
Resolver problemas que exijan componer y descomponer números en forma aditiva y multiplicativa analizando el valor posicional y las relaciones con la multiplicación y la división por la unidad seguida de ceros	**Resolver problemas que exijan componer y descomponer números en forma aditiva y multiplicativa analizando el valor posicional y las relaciones con la multiplicación y la división por la unidad seguida de ceros**	**Resolver problemas que exijan componer y descomponer números en forma aditiva y multiplicativa analizando el valor posicional y las relaciones con la multiplicación y la división por la unidad seguida de ceros**
El docente propiciará la resolución de problemas que involucren descomponer y componer un número en sumas y multiplicaciones por la unidad seguida de ceros a partir de la información que brinda su escritura. Por ejemplo: *En un juego hay billetes de 1000, de 100, de 10 y de 1. ¿Cuántos de cada uno se precisan para pagar 4.444; 44.404 y 44.004?* *¿Se podrá pagar justo $ 238 usando sólo billetes de $ 10?* *Analicen cómo y por qué se "agregan" o "quitan" ceros.* *23 x 10 = 340 : 10 = 234 x 1.000 =*	El docente propiciará la resolución de problemas que involucren descomponer y componer un número en sumas y multiplicaciones por la unidad seguida de ceros a partir de la información que brinda su escritura. Por ejemplo: *En un juego hay tarjetas con diferentes puntajes: 100.000, 10.000, 1000, 100, 10 y 1 ¿Cómo harían para formar estos puntajes con la menor cantidad de tarjetas? 134.003 ; 987.989 y 1.111.075* *¿Con cuáles de estos cálculos se obtiene el número 756.987?*	El docente propiciará el análisis del valor posicional a través de problemas que exijan componer y descomponer números. Por ejemplo: *¿Con cuáles de estos cálculos se obtiene el número 756.987?* *756x1000 + 9 x 100 + 8 x 10 + 7* *7x 100.000 + 56 x 1000 + 7 x 1+ 8 x 10 + 100 x 9* *¿Cuál de estos números es mayor?* *6 x 1000 + 3 x100...... 8 x 100 + 2 x100* *3 x 100000 + 3x100.....2 x 100000*

<table>
<tr>
<td>¿Con cuál de estos cálculos se obtiene el número 56.987?
6 x 10000 + 5 x 1000 + 9 x 100 + 8 x 10 + 7
5 x 10000 + 6 x 1000 + 7 x 1+ 8 x 10 + 100 x 9
Otros problemas exigen anticipar el resultado de cálculos que involucren sumar y restar alguna unidad seguida de ceros a cualquier número. Por ejemplo:
¿Qué cálculo harías para transformar el 6.789 en 6.089? ¿Y en 6.009? Anotalo y luego verificalo con la calculadora.
Otros problemas ponen en evidencia la relación entre el valor posicional y la división por 10 y 100. Por ejemplo: ¿Cuántas cajas de 100 tizas se pueden llenar con 3.456 tizas? ¿Sobran tizas? ¿Cuántas?
El docente, a partir de esta variedad de problemas, podrá promover el análisis de la fertilidad del uso de las características del sistema de numeración decimal para operar con la unidad seguida de ceros a partir de la información que brinda la escritura del número.</td>
<td>75x10.000 + 6 x 1000 + 9 x 100 + 8 x 10 + 7
7x 100.000 + 56 x 1000 + 7 x 1+ 8 x 10 + 100 x 9
7 x 100.000+ 5 x100.000 + 6987
Otros problemas exigen anticipar el resultado de cálculos que involucren sumar y restar alguna unidad seguida de ceros a cualquier número. Por ejemplo: ¿Qué cálculo harías para transformar el 3.333.333 en 3.000.303? ¿Y en 4.444.444? Anotalo y luego verificalo con la calculadora
Otros problemas ponen en evidencia la relación entre el valor posicional y la división por 10, 100 y 1000. Por ejemplo: ¿Cuántas cajas de 100 tizas se pueden llenar con 35.456 tizas? ¿Sobran tizas? ¿Cuántas? ¿Y si en cada caja hubiera 1000? ¿Cuántas tizas sobrarían?
El docente, a partir de esta variedad de problemas, podrá promover el análisis de la fertilidad del uso de las características del sistema de numeración decimal para operar con la unidad seguida de ceros a partir de la información que brinda la escritura del número.</td>
<td>El docente también presentará problemas que demanden anticipar resultados en multiplicaciones y divisiones. Por ejemplo:
¿Es verdad que 34 resmas de 1000 hojas alcanzan para darle 100 a cada alumno/a de una escuela de 340 alumnos/as? Intentá resolverlo sin hacer cuentas.
Completá la tabla sin hacer las cuentas de dividir:
<table>
<tr><th>dividendo</th><th>divisor</th><th>cociente</th><th>resto</th></tr>
<tr><td>4400</td><td>100</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4444</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>100</td><td>4</td><td>44</td></tr>
</table>
A partir de esta variedad de problemas el docente podrá promover el análisis de la fertilidad del uso de las características del sistema de numeración decimal para operar con la unidad seguida de ceros a partir de la información que brinda la escritura del número.</td>
</tr>
<tr><th colspan="3">Comparar sistemas de numeración</th></tr>
<tr>
<td>Explorar las características del sistema de numeración romano y compararlas con el sistema de numeración posicional decimal.</td>
<td>Explorar diversos sistemas de numeración posicionales, no posicionales, aditivos, multiplicativos, decimales y analizar su evolución histórica.</td>
<td>Identificar relaciones entre el sistema de numeración decimal posicional y algunos de los sistemas de medida, apoyados en las relaciones de proporcionalidad directa.</td>
</tr>
<tr>
<td>Los alumnos/as podrán aprender a usar los símbolos y reglas del sistema de numeración romana para leer y escribir números. El docente ofrecerá también oportunidades para que los alumnos/as comparen las características del sistema de numeración romana con el decimal considerando cantidad de símbolos, valor absoluto y relativo, operaciones que involucra, uso del cero, etc.
Por ejemplo:
Colocar V o F y justificar o dar ejemplos:
- El sistema de numeración romano no necesita un símbolo para representar el 0.
- El sistema de numeración decimal tiene más símbolos que el romano.
- En los dos sistemas siempre sucede que un número que se escribe con más símbolos es más grande.</td>
<td>El docente podrá seleccionar algunos sistemas de numeración no posicionales y otros posicionales, algunos aditivos, algunos multiplicativos y otros mixtos, etc. A partir de la información sobre símbolos y reglas de cada sistema, se analizarán las características de cada uno. La comparación entre ellos permitirá profundizar en el análisis del sistema decimal. También es necesario proveer a los alumnos/as de información que les permita considerar cómo la evolución de los sistemas de numeración ha facilitado la escritura y el cálculo. Por ejemplo: Los nombres de los números en guaraní indican que a veces se suma y a veces se multiplica: Peteĩ es el 1; Mokõi es el 2, Pa es el 10, Pateĩ es el 11; Mokõipa es el 20; Sa es el 100. ¿Cómo se dirá 200? Colocar V o F y justificar o dar ejemplos.
- Los sistemas de numeración chino y egipcio no necesitan un símbolo para representar el 0.
-El sistema de numeración decimal tiene más símbolos que el romano.
- En el sistema decimal, si un número entero se escribe con más símbolos es más grande que otro que se escribe con menos símbolos.</td>
<td>Cuando el docente proponga el estudio de las unidades convencionales de medida, promoverá el análisis de cómo, en nuestro sistema de medida, los múltiplos y submúltiplos en base 10 permiten operar a partir de la información que brinda la escritura del número y de la multiplicación y la división por la unidad seguida de ceros, apoyados en las relaciones de proporcionalidad directa. Por ejemplo: ¿A cuántos metros equivale 5.678 km?
Completar la siguiente tabla:
<table>
<tr><td>Gramos</td><td>4</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Miligramos</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td>
</tr>
</table>

DATOS DE LA AUTORA

Cecilia Papini
Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional
del Centro de la provincia de Buenos Aires, Argentina
mcpapini@gmail.com

www.revista-educacion-matematica.com