# La modelización matemática en la formación de ingenieros

Avenilde Romo-Vázquez

**Resumen:** En esta contribución se presentan elementos de un proyecto de investigación que se desarrolla actualmente y cuyo objetivo es el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática para la formación de ingenieros. En una primera parte se analiza el lugar histórico de las matemáticas en estas formaciones y cómo la modelización ha ido ocupando un espacio cada vez más importante. En una segunda parte se analiza el uso de modelos matemáticos en contextos de ingeniería para reconocer las necesidades matemáticas que surgen en dicho uso. Posteriormente, se presentan elementos teóricos y metodológicos basados en la Teoría Antropológica de lo Didáctico para el diseño de actividades didácticas propias para los futuros ingenieros. Dos ejemplos de contextos de ingeniería, en los cuales se analiza la utilización de modelos matemáticos, permiten ilustrar las potencialidades y límites de estos elementos teóricos y metodológicos. Por último, se hace una reflexión sobre esta propuesta teórico-metodológica.

*Palabras clave:* modelización matemática, formación de ingenieros, actividades didácticas.

**Résumé:** Dans cette contribution, des éléments d'un projet de recherche en cours sont présentés. L'objectif du projet est de concevoir des activités didactiques basées sur la modélisation mathématique pour la formation des ingénieurs. La première partie analyse la place historique occupée par les mathématiques dans les formations d'ingénieurs. La deuxième partie présente l'utilisation des modèles mathématiques dans des contextes d'ingénierie avec l'objectif de déterminer les besoins mathématiques de leur usage. Ensuite, sont présentés des éléments théoriques et méthodologiques basés sur la Théorie Anthropologique du Didactique dans l'intention de concevoir des activités didactiques pour la formation des futurs ingénieurs. Deux exemples de contextes d'ingénierie où l'utilisation des modèles mathématiques a été analysée permettent d'illustrer certaines potentialités et limites de cette proposition théorique-méthodologique, sur laquelle on revient en conclusion.

*Mots clés:* modélisation mathématique, formation des futurs ingénieurs, activités didactiques.

Fecha de recepción: 27 de agosto de 2013; fecha de aceptación: 21 de enero de 2014.

## 1. MATEMÁTICAS PARA INGENIEROS: TEORÍA VS. APLICACIONES

Desde los inicios de las formaciones de ingenieros hasta la actualidad, las matemáticas han tenido un lugar muy importante. Sin embargo, tanto el lugar dado como los roles de su enseñanza se han ido modificado a medida que la formación y la práctica ingenieril evolucionan. Con el objetivo de reconocer cómo esta evolución ha tenido lugar y, más en particular, cómo la modelización se ha consolidado como la herramienta matemática más importante de estas formaciones, se analizan los primeros modelos de formación de *l'École Polytechnique*, la conferencia de Maurice d'Ocagne dictada en 1914, los estudios ICMI 3 e ICMI 11 –publicados en 1988 y 2002, respectivamente–, así como los trabajos de Kent y Noss (2002) y Bissell y Dillon (2000).

### Los primeros modelos de formación, el caso de la escuela politécnica francesa

El análisis de los primeros modelos de formación de la Escuela Politécnica se basa en la obra de Belhoste, Dahan-Dalmedico y Picon (1994), dedicada a relatar la historia de esta escuela de 1794 a 1994. La elección de la Escuela Politécnica se debe a que es una de las primeras escuelas formadoras de ingenieros (fundada en 1794). Esta institución constituye un caso muy particular entre las instituciones formadoras de ingenieros: nace en medio de la revolución, hereda los ideales enciclopedistas del siglo de las luces y sus inicios están marcados por el auge de la ciencia francesa de la época. A pesar de la particularidad de esta institución, el análisis de los tres primeros modelos (un análisis más detallado aparece en Romo-Vázquez, 2009), constituidos durante el periodo de 1794 a 1850, permite conocer los roles dados a las matemáticas y las razones subyacentes a esos roles.

El primer modelo de formación, propuesto por el geómetra Gaspar Monge en 1794, se conoce como modelo "enciclopédico", ya que refleja el ideal enciclopedista de una posible alianza entre las ciencias y las artes (entendiendo las artes como las aplicaciones). Este modelo fue rápidamente reemplazado por el modelo de Laplace, conocido como el modelo "analítico", propuesto en 1795 y en el cual las matemáticas forman un corpus autónomo, proveedor de conocimientos generales, los cuales son posteriormente utilizados en los cursos de aplicación. Lo anterior puede deberse al gran desarrollo del análisis matemático y a la utilización de métodos analíticos en disciplinas como la mecánica, la física, la teoría de máquinas, la geodésica y las probabilidades. Puede suponerse que para Laplace la enseñanza del análisis matemático dotaba a los estudiantes de una base sólida necesaria para la comprensión/aprendizaje de dichas disciplinas. Un elemento que va a afectar la permanencia de este modelo es el curso de análisis propuesto por Cauchy, el cual se caracterizaba por exigir un rigor propio de la disciplina matemática; sin embargo, era tan abstracto que difícilmente podía utilizarse en aplicaciones y en necesidades prácticas. Esto fue denunciado por las escuelas de aplicación, creadas en 1795 y en las cuales eran dictados los cursos de aplicación, como se muestra en la siguiente cita:

> [...] la Escuela Politécnica tiende a perder de vista la utilidad de su enseñanza. Las matemáticas corren peligro de volverse el latín de los ingenieros, medio de selección escolar y de distinción social que uno se apresura a olvidar tan pronto como el examen de salida ha pasado. (Belhoste et ál., 1994, p. 24)[1]

Por otra parte, en el contexto internacional se vive la revolución técnica e industrial, y los industriales demandan profesionales capaces de enfrentar las nuevas necesidades de las industrias. Para satisfacer tales demandas, en 1829 se crea una escuela privada: la Escuela Central de Artes y Manufacturas, en la cual se enseñará "la ciencia industrial". El análisis no se enseña, y la geometría descriptiva, la mecánica y la física son enseñadas desde una perspectiva basada en las aplicaciones. La enseñanza de la "ciencia industrial" parece ser la precursora de lo que ahora se conoce como enseñanza tecnológica y también parece ser la encargada de equilibrar las tensiones entre la abstracción pura y las aplicaciones sin referencia teórica. A pesar de que la Escuela Politécnica sufre cambios internamente –comienza a ser dirigida por académicos en lugar de militares–, no se efectúa ninguna reforma sino hasta que recibe un ataque por parte de ingenieros civiles, hecho que tuvo resonancia en la Asamblea Nacional y en el gobierno. Le Verrier es designado para constituir un nuevo modelo de formación, el cual va a caracterizarse por basar la elección de contenidos en la utilidad de las aplicaciones y descartar el desarrollo de teoría. Las matemáticas teóricas son desplazadas, del lugar privilegiado que mantenían, por las aplicaciones que son consideradas como las más importantes.

La exposición breve de estos primeros tres modelos de formación permite dar cuenta de las tensiones entre teoría y práctica, de la gran dificultad y complejidad de conciliarlas al interior de un modelo de formación. Asimismo, puede percibirse la influencia de los cambios científicos, tecnológicos y sociales, los cuales se cristalizan en la creación de escuelas de aplicación, la implementación de cursos de la "ciencia industrial" y en la modificación del modelo educativo. Siguiendo con el análisis histórico, consideremos ahora la conferencia impartida por Maurice d'Ocagne en el Congreso Internacional de Enseñanza de las Matemáticas que tuvo lugar en París en 1914.

## Matemáticas y ciencias del ingeniero

Maurice d'Ocagne era ingeniero en jefe de Puentes y Caminos (*Ponts et Chaussées*) y profesor de la Escuela Politécnica y de la Escuela de Puentes y Caminos (*Ecole de Ponts*

[1] Las citas han sido traducidas del francés y del inglés al español por la autora del artículo.

*et Chaussés*). En su conferencia titulada "El rol de las matemáticas en las ciencias del ingeniero", d'Ocagne defiende la necesidad de una formación matemática teórica para los ingenieros, y para ilustrarla presenta diferentes problemas donde la "teoría matemática" fue útil para resolverlos. A manera de ejemplo, se presentan a continuación dos de estos problemas:

- El efecto Kelvin (*skineffect)* en los conductores masivos en corrientes alternativas, donde subraya "**el interés práctico**" de este estudio realizado mediante el uso de ecuaciones con derivadas parciales.
- La propagación de las ondas líquidas en los tubos elásticos, problema resuelto por Boulanger a partir del "estudio de una integral discontinua de una ecuación con derivadas parciales de segundo orden, de tipo hiperbólica".

D'Ocagne reconoce que estos problemas no constituyen **la práctica cotidiana del ingeniero**: en el cotidiano, las matemáticas consideradas como necesarias son más básicas, y permiten la utilización de fórmulas, esquemas y métodos gráficos. Tanto la teoría como la matemática operacional y funcional deben ser parte de la formación; la primera para posibilitar la resolución de problemas como los expuestos por d'Ocagne, la segunda para enfrentar el cotidiano profesional del ingeniero. Un elemento relevante en esta conferencia es la importancia dada a las ciencias del ingeniero, las cuales se presentan como disciplinas intermediarias, ya que comportan una fuerte componente matemática pero ofrecen aproximaciones y herramientas para resolver problemas de la ingeniería. Las tensiones entre teoría y práctica parecieran alcanzar cierto equilibrio en estas disciplinas. Las necesidades matemáticas se presentan a dos niveles: teóricas/avanzadas y elementales. La evolución científica y tecnológica que se genera vertiginosamente en el siglo XX, la omnipresencia de programas computacionales, el aumento de especializaciones ingenieriles, la ampliación de los campos científicos –entre ellos, las matemáticas– y el gran número de estudiantes que ingresan a las carreras de ingeniería modifican tanto las prácticas profesionales como las formaciones.

## 2. LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA: NUEVO PARADIGMA EDUCATIVO

### LAS MATEMÁTICAS VISTAS COMO DISCIPLINA DE SERVICIO, ESTUDIO ICMI 3

En el estudio ICMI 3, editado por Howson, Kahane, Lauginie y Turckheim, se presenta el paradigma de las matemáticas vistas como disciplina de servicio. Se reconoce que las formaciones profesionales, que no forman futuros matemáticos, no pueden basar la enseñanza de las matemáticas en el rigor y la estructura propia de las matemáticas sino en su potencialidad como herramienta para resolver, de manera eficaz, problemas prácticos. Una contribución que puede ilustrar lo anterior es la de Pollak, matemático que trabajó durante 33 años en los Laboratorios Bell y quien afirma:

> Antes que todo, necesitamos tener conocimiento del hecho de que el pensamiento matemático, el pensamiento analítico, estructural, cuantitativo, sistemático, puede ser aplicado al mundo real y generar observaciones de gran valor; en otros términos, que la modelización matemática es posible y puede ser eficaz. (Pollak, 1988, p. 32)

Esta cita permite evidenciar que Pollak no expresa los elementos que deben conformar la formación matemática de ingenieros a través de una lista de conceptos y técnicas, sino de pensamientos matemáticos asociados a la modelización matemática. Lo anterior sugiere una transición del modelo de formación teoría-aplicaciones al de teoría-modelización matemática. Este nuevo paradigma puede encontrarse en algunos programas de estudio; consideremos dos. El primero corresponde a la asignatura de álgebra lineal del Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli, México, el cual es analizado en Macias (2012). En la presentación de este programa se señala que el curso aporta al futuro ingeniero "la capacidad para desarrollar un pensamiento lógico, heurístico y algorítmico al modelar fenómenos de naturaleza lineal y resolver problemas". Podemos ver que aparecen tipos de pensamientos relacionados a la modelización de fenómenos, en este caso, de naturaleza lineal. Las herramientas que en este curso se ofrecerán permitirán, por tanto, caracterizar fenómenos a través de un modelo lineal a partir de un tratamiento más "sencillo":

> Muchos fenómenos de la naturaleza que se presentan en la ingeniería se pueden aproximar a través de un modelo lineal. Esta materia nos sirve para caracterizar estos fenómenos y convertirlos en un modelo lineal ya que es más sencillo de manejar y graficar y resolver que uno no lineal. (Programa de álgebra lineal, p. 1)
>
> Una de las sugerencias didácticas consiste en proponer problemas que:
>
> a. Permitan al estudiante la integración de los contenidos, para su análisis y solución.
> b. Refuercen la comprensión de conceptos que serán utilizados en materias posteriores.
> c. Modelen y resuelvan situaciones reales de ingeniería mediante conceptos propios del álgebra lineal. (Programa de álgebra lineal, p. 7)

Podemos ver que la modelización vuelve a aparecer asociada al tratamiento de situaciones reales de ingeniería, aunque no es claro qué tipo de problemas provenientes de estos contextos pueden ser tratados en la enseñanza de esta asignatura. El segundo programa de estudio corresponde a la asignatura de ecuaciones diferenciales e integración en $\mathbb{R}^n$ de la Universidad Austral de Chile, sede Puerto Montt, que es analizado en Soto (2013). Un apartado del programa está dedicado a los aprendizajes esperados:

Con el desarrollo de esta asignatura, se pretende garantizar en los estudiantes el logro de los siguientes aprendizajes (en el ámbito de la aplicación de los conocimientos: saber hacer):

- Modelar un problema conducente al planteamiento de una ecuación diferencial (ordinaria) o de una ecuación de diferencias, siendo capaz, previamente, de clasificarla y de aplicar los métodos estudiados para resolverla.
- Interpretar, modelar y resolver un problema práctico que conduzca al planteamiento de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Distinguir el concepto de sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en el marco de un problema concreto de las ciencias o la práctica. (Programa de estudio de ecuaciones diferenciales e integración en $\mathbb{R}^n$, p. 1)

Se puede notar que la modelización aparece de manera importante en estos aprendizajes esperados, aunque los conocimientos conceptuales y técnicos sobre las ecuaciones diferenciales son vistos como necesarios en la modelización. No hay claridad sobre el tipo de problemas prácticos, sobre todo cuando se piensa en un abordaje didáctico, ¿cómo puede introducirse lo práctico dentro de la clase de matemáticas? Muchas otras interrogantes pueden abrirse paso dentro del paradigma teoría-modelización matemática, por ejemplo: ¿Cómo es la modelización matemática en la práctica profesional de ingenieros? ¿Cómo puede estudiarse y caracterizarse? ¿Es posible llevarla a un modelo de formación y al aula misma? Sin afán de responder estas preguntas sino de tener elementos para problematizarlas, analizamos a continuación investigaciones en las que se han estudiado las matemáticas utilizadas en prácticas profesionales de ingenieros.

## Matemáticas en las prácticas profesionales

Para reconocer cómo las matemáticas, y en especial la modelización, son utilizadas en el contexto profesional actual de los ingenieros, marcado fuertemente por la omnipresencia tecnológica (Kent, 2007), se analizan a continuación diferentes trabajos (Kent y Noss, 2002; Bissell y Dillon, 2000). La investigación de Kent y Noss se llevó a cabo en una empresa de ingenieros civiles en Inglaterra y fue realizada después de haber analizado prácticas profesionales de enfermeras, banqueros y pilotos de avión. Kent y Noss consideraron que en la práctica de ingenieros civiles, a diferencia de las otras prácticas, las matemáticas aparecerían de manera explícita y ellos podrían analizar el papel que desempeñaban en dicha práctica. Sin embargo, en una de las entrevistas uno de los ingenieros afirmó:

> Después de haber dejado la universidad no utilizamos las matemáticas que aprendimos; calcular un cuadrado o un cubo es lo más complejo que uno hace. Para la mayor parte de los ingenieros en esta empresa, una gran cantidad de matemáticas que nos enseñaron, y no diré que aprendimos, no han aparecido todavía. (Kent y Noss, 2002, p. 1)

En esta investigación se mostraron dos elementos que permitían explicar esta invisibilidad de las matemáticas en la práctica de la ingeniería civil.

**División de trabajo matemático: análisis y concepción.** Dos tipos de ingenieros podían ser reconocidos: de análisis y de concepción. Los ingenieros de concepción solicitaban el trabajo matemático a los ingenieros de análisis. Estos últimos eran los encargados de modelar y de dar soluciones a los problemas planteados. Los ingenieros de concepción eran capaces de poner en funcionamiento las soluciones propuestas por los analistas. Las matemáticas fungían como herramienta de comunicación y posibilitaban una economía del trabajo matemático en esta empresa. Esta economía de trabajo matemático puede equipararse con lo que Kent (2007) llama modificación del trabajo matemático provocada por el uso de programas computacionales.

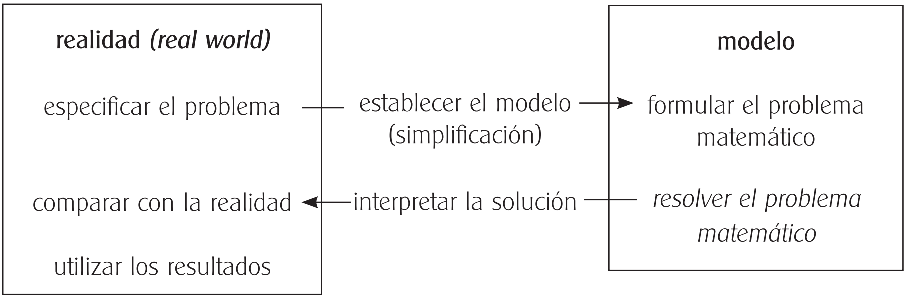
**Guías prácticas.** En esta investigación aparecen documentos conocidos como "guías prácticas", cuyo objetivo es difundir el conocimiento práctico. Es decir, todo aquello que se considera que los ingenieros deben saber acerca de esa práctica. Documentos de esta naturaleza también aparecieron en el trabajo de Vergnaud (1996) dedicado al estudio de ingenieros aeronáuticos. Los autores explican que en estos documentos las matemáticas que aparecen no son las matemáticas universitarias, lo que puede explicar que los ingenieros no reconozcan las matemáticas que utilizan.

Las matemáticas en las prácticas profesionales pueden reconocerse por lo siguiente:

- son matemáticas que se construyen en una relación estrecha con la práctica, **una comprensión a través del uso**;
- sus dimensiones más avanzadas tienden, cada vez más, a estar a cargo de **especialistas** o de **programas computacionales**;
- las necesidades de los no especialistas parecen desplazarse hacia la capacidad de manipular estas matemáticas como una herramienta de comunicación a través de los **lenguajes específicos**, esto contribuye a explicar por qué su rol es tan **poco reconocido**.

Considerando estas características, puede decirse que un paradigma de formación teoría-aplicación difícilmente podría satisfacer las necesidades matemáticas de la práctica. La modelización matemática, como se ilustra en la contribución de Pollak, se revela como un paradigma alternativo, pero ¿qué caracteriza a esta modelización específicamente en la práctica de los ingenieros? Para abordar esta pregunta se analiza a continuación el trabajo de Bissell y Dillon (2000). Los autores presentan primeramente dos

**Figura 1** Ciclo de modelización "rígida"



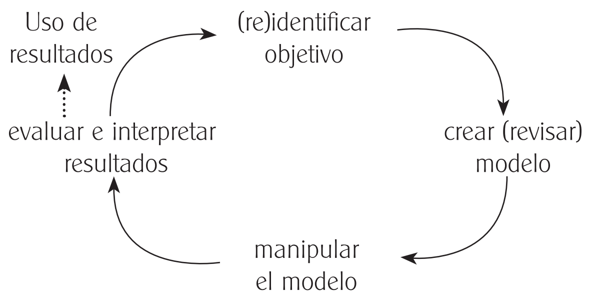

definiciones generales de la modelización matemática: "rígida" *(hard)* y "flexible" *(softer).* Para definir el círculo de modelización "rígida", los autores hacen referencia a un libro sobre control de sistemas dinámicos y señalan que éste se compone de cuatro etapas:

1. describir el sistema físico *(physical modelling),*
2. describir el sistema matemático (model construction),
3. analizar la descripción matemática *(model solution)* e
4. interpretar y sacar provecho de esta descripción *(system design).*

Los autores señalan que, desde un punto de vista de la modelización matemática, estas cuatro etapas corresponden a un "ciclo de modelización" como se muestra en la figura 1. Un proceso de modelización requiere de varios ciclos de este tipo, en los cuales el ingeniero aplicará o utilizará conocimientos y técnicas matemáticas reiteradamente hasta obtener una solución al problema real. Para un proceso como éste, los autores señalan dos tipos de límites. Los primeros provienen de la implementación práctica en la que pueden encontrarse dificultades relacionadas con la precisión de la formulación del problema, particularmente a nivel de la simplificación utilizada, así como con la validación de los resultados obtenidos.

Los segundos resultan de un punto de vista filosófico y práctico subyacente a esta visión de modelización basado en la existencia de una correspondencia platónica entre el mundo de los problemas reales y el mundo de los modelos, y dejan fuera de esta aproximación todos los problemas reales que no pueden corresponderse de manera ideal a un modelo. La modelización "flexible" (*softer*, figura 2) se presenta como una iteración de ciclos de modelización, pero más flexible, en el sentido de que ésta no se ve como una relación de tipo espejo entre el mundo de los problemas reales y éste de los modelos. Además, los procesos implicados en las fases de creación, manipulación y evaluación no se especifican. Pero puede suponerse, sin embargo, que existe un método que, al ser empleado correctamente, termina por asegurar la obtención de una solución.

**Figura 2** Ciclo de modelización "flexible"




Estos dos ciclos de modelización, muy frecuentes en la literatura según estos autores, no dan cuenta de las condiciones reales del funcionamiento de la modelización en la práctica del ingeniero. Contrariamente a lo que en éstos se señala, el ingeniero rara vez crea un nuevo modelo; más bien, el ingeniero selecciona un modelo estándar conocido, con soluciones conocidas, y lo que hace es adaptarlo o modificarlo ligeramente. La adaptación no puede verse como un proceso sencillo, pues implica conocer el modelo y el fenómeno o proceso al cual va a adaptarse. El proceso de modelización es comúnmente incremental, es decir, consiste en una afinación de modelos existentes hecha sobre la base de la experiencia y de la práctica, incluyendo lo que resulta de los fracasos de la modelización. La modelización no es algorítmica sino subjetiva, se apoya regularmente en conocimientos implícitos y saberes prácticos específicos de una disciplina o de un dominio. La intuición es importante y los buenos modelizadores tienen "olfato" para los tipos de modelos susceptibles de ser adaptados a tal o cual circunstancia. Un modelo matemático es útil si y solamente si éste puede ser utilizado con éxito; por lo tanto, es preferible un modelo menos preciso pero que pueda ser utilizado más fácilmente, a un modelo más sofisticado pero menos práctico. Al situarse en esta perspectiva de **utilización y de adaptación** de modelos existentes, una de las preguntas que emerge es: ¿cuáles son las competencias matemáticas necesarias para tal uso de los modelos? Para responder esta pregunta, los autores proponen una jerarquía de competencias en tres niveles: la manipulación, la interpretación y la aplicación, como se presenta en la figura 3.

El primer nivel, o "manipulación", es el de las competencias manipulativas, relacionadas con las competencias matemáticas "básicas": reformulación de una expresión matemática, sustitución correcta de variables y modificación de fórmulas, por ejemplo, en una hoja de cálculo. El segundo nivel, el de la interpretación, se apoya en estas competencias manipulativas, pero éstas no resultan de ningún interés sin las competencias interpretativas. La interpretación y la manipulación son iterativas y lo que se produce con

**Figura 3** Jerarquía de competencias en tres niveles*

| | |
|---|---|
| Aplicación | Habilidad para aplicar la interpretación y hacer recomendaciones apropiadas; esencialmente “proactiva”. |
| Interpretación | Habilidad para interpretar formas modificadas del modelo de forma adecuada para la situación; esencialmente “reactiva”. |
| Manipulación | Habilidad para modificar la forma básica, utilizando habilidades algebraicas y otras; esencialmente “mecánica”. |

* La jerarquía aparece originalmente en idioma inglés y la traducción la ha hecho la autora del artículo.

ellas se relaciona con el tercer nivel, el de la aplicación del modelo, conduciendo a recomendaciones explícitas. Desde un punto de vista educativo y didáctico, lo anterior lleva a cuestionarse sobre cómo un modelo matemático es utilizado para describir/estudiar/analizar un fenómeno en la práctica. Las competencias mencionadas anteriormente, ¿con qué tipos de conocimientos matemáticos universitarios pueden relacionarse? Es decir, las competencias de modelización antes descritas, ¿pueden ser tratadas en los cursos de matemáticas de futuros ingenieros? ¿De qué tipo de herramientas teóricas y metodológicas dispone la matemática educativa para diseñar actividades didácticas para una formación de ingenieros? Y más en específico, para una asignatura de cálculo diferencial e integral, álgebra lineal o bien de ecuaciones diferenciales. A partir del desarrollo de un proyecto de investigación cuyo objetivo es el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática, se han ido desarrollando y se presentan a continuación algunas herramientas teóricas y metodológicas basadas en la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

## 3. HERRAMIENTAS TEÓRICAS Y METODOLÓGICAS PARA EL DISEÑO DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS BASADAS EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD, en adelante) propone un modelo epistemológico para el estudio de la actividad humana en su dimensión institucional. Es decir, un elemento fundamental en esta teoría es la noción de institución, la cual puede definirse de la siguiente manera:

> Las instituciones, es decir, organizaciones sociales estables, enmarcan las actividades humanas y simultáneamente las hacen posibles por los recursos que estas instituciones ponen a disposición de sus sujetos. Estos recursos materiales e intelectuales han sido producidos por comunidades, a lo largo de procesos de enfrentamiento

a situaciones problemáticas, para resolverlas con regularidad y eficacia. (Castela y Romo, 2011, p. 85)

La actividad de modelización matemática se analizará por tanto en el marco de instituciones, reconociendo las restricciones que condicionan y los recursos que posibilitan dicha actividad. La noción de praxeología [$T$, $\tau$, $\theta$, $\Theta$] es la unidad mínima de análisis propuesta en la TAD, y sus cuatro componentes son: tipo de tarea [$T$], técnica [$\tau$], tecnología [$\theta$] y teoría [$\Theta$]. La tarea es lo que se hace; la técnica es la manera en que se hace; la tecnología es un discurso que produce, justifica y explica la técnica, y la teoría, a su vez, produce, justifica y explica la tecnología.

Dado que el objetivo del proyecto de investigación es el diseño de actividades didácticas basadas en la modelización matemática (que tiene lugar en las disciplinas intermediarias y/o en la práctica de ingenieros), se considera necesario identificar las instituciones que participan de la formación del ingeniero y las posibles relaciones que pueden establecerse entre éstas en torno a la modelización matemática. Para ello, se retoma el modelo de instituciones que participan en la formación de ingenieros propuesto en Romo-Vázquez (2009). Las instituciones consideradas son de tres tipos: de producción, de enseñanza y de uso. Por supuesto, lo anterior corresponde a un modelo "limitado", pues pueden existir muchas más instituciones que participen en dicha formación.

Las instituciones de producción son las que producen el modelo matemático, visto como praxeología, y que hacen pesar sobre éste todas sus condiciones y restricciones, pero también generan puntos de apoyo. Se reconocen dos instituciones de producción:

- Matemáticas (como disciplina) P(M)
- Disciplinas Intermediarias (como disciplina) P(DI)

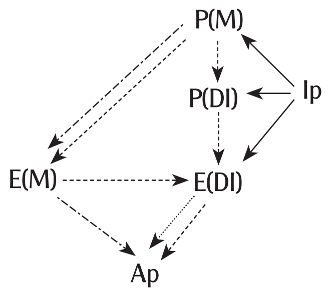
Las instituciones de enseñanza son las responsables de transmitir las praxeologías (modelos matemáticos). En estas instituciones se operan las transposiciones necesarias para adaptarlas a las condiciones y restricciones de la enseñanza, incluso cuando dichas praxeologías se usan. Por ejemplo, si en un curso de teoría de control (disciplina intermediaria) se usa una praxeología matemática, será bajo una lógica escolar. Se reconocen dos instituciones de enseñanza:

- Enseñanza de las Matemáticas E(M)
- Enseñanza de las Disciplinas Intermediarias E(DI)

Las instituciones usuarias es donde las praxeologías matemáticas son utilizadas para atender a las necesidades de la práctica:

- Práctica profesional Ip
- Actividades prácticas Ap

**Esquema 1** Recorridos que sigue una praxeología matemática para pasar de P(M) a Ap




Se considera necesario precisar la diferencia entre Ip y Ap. Ip es una macroinstitución que representa la práctica profesional del ingeniero. Es decir, una empresa de ingeniería de cualquier tipo (civil, de telecomunicaciones, transportes y caminos, por ejemplo) es una subinstitución de Ip. Mientras que en Ap se comprenden las actividades propuestas en el marco de la formación pero de carácter práctico, por ejemplo, el desarrollo de proyectos de ingeniería, estancias en empresas, prácticas profesionales, entre otras. Aunque en el desarrollo de estas actividades pueden tener lugar praxeologías validadas por E(M) y/o E(DI), éstas compartirán lógicas de la práctica, pues el objetivo de las actividades no es enseñar la praxeología sino utilizarla para resolver un problema de la práctica.

Reconocer las relaciones entre estas instituciones y la forma en la cual participan dentro de la formación dependerá de la manera en que la investigación se realice. Sin embargo, de manera general puede reconocerse que las instituciones P(M) y P(DI) participan al menos como instituciones de referencia, es decir, tanto las matemáticas que se enseñan como las asignaturas de disciplinas intermediarias se respaldan en validaciones teóricas generales de las disciplinas. Es posible que dentro de un curso nunca se haga una referencia explícita a estas validaciones que justifican y explican las técnicas presentadas. De la misma manera, la práctica profesional difícilmente estará presente en la formación, pero algunos dispositivos didácticos de tipo Ap pueden ser desarrollados por los estudiantes de ingeniería y, en ese sentido, su formación establecerá una relación con la institución práctica profesional. En Romo-Vázquez (2009) se propuso un esquema que ilustra los recorridos que las praxeologías matemáticas son susceptibles de seguir si éstas se producen en P(M) y se utilizan en la actividades prácticas como se aprecia en el esquema 1.

Los recorridos ilustrados en el esquema 1 pueden detallarse de la siguiente manera:

1. P(M)→E(M)→Ap (simbolizado con -·-·-·-➤)
   De la institución de producción de conocimientos matemáticos a la enseñanza de las matemáticas y de ésta al desarrollo de actividades prácticas.

2. P(M)→P(DI)→E(DI)→ Ap (simbolizado con --------➤ )
   De la institución de producción de conocimientos matemáticos a la institución de producción de conocimientos intermediarios, de ésta a la enseñanza de las disciplinas intermediarias y finalmente a las actividades prácticas.

3. P(M)→E(M)→E(DI)→ Ap (simbolizado con ··········➤ )
   De la institución de producción de conocimientos matemáticos a la enseñanza de las matemáticas, de ésta a la enseñanza de las disciplinas intermediarias y finalmente a la práctica.

En este modelo de recorridos praxeológicos se considera que hay praxeologías de modelización matemática que son producidas en P(M) o en P(DI), lo que implica que estas instituciones validan las técnicas que permiten resolver las tareas de modelización. Sin embargo, estas instituciones son de naturaleza distinta y, por tanto, las tecnologías (validaciones y explicaciones) son también de naturaleza distinta. Una justificación matemática será distinta de una justificación de la disciplina intermediaria y también será distinta de una justificación producida por la práctica. En el sentido de Bissell y Dillon (2000), la interpretación y la facilidad de uso del modelo podrían verse como justificaciones del modelo elegido y de las técnicas asociadas para resolver una tarea de modelización. Para poder analizar estas justificaciones consideramos el modelo praxeológico extendido, en el cual la tecnología tiene dos componentes: teórica [$\theta^{th}$] y práctica [$\theta^{p}$]. La componente práctica, particularmente, es un discurso que tiene seis funciones que permiten describir, validar, explicar, facilitar, motivar y evaluar el uso de técnicas matemáticas en referencia a instituciones usuarias, no necesariamente matemáticas. El modelo puede expresarse de la siguiente manera:

$$\left[ T, \tau, \begin{array}{c} \theta^{th}, \Theta \\ \theta^{p} \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow P(S) \\ \leftarrow Iu \end{array}$$

donde *P(S)* designa la institución productora de saberes e *Iu* la institución usuaria de dichos saberes. Se asume que para resolver tareas en contextos prácticos de ingeniería, el uso de saberes –y más precisamente de modelos matemáticos– se hace mediante técnicas matemáticas validadas por saberes matemáticos [$\theta^{th}$]; esta validación que sustenta la coherencia matemática del modelo puede ser ignorada en el uso del modelo. Para reconocer los discursos que justifican y validan el uso de los modelos, se propone considerar las funciones tecnológicas de la componente práctica [$\theta^{p}$], las cuales aparecen en Castela y Romo-Vázquez (2011) de la siguiente manera:

1. **Describir el tipo de tareas y la técnica.** La producción de un discurso que caracteriza el tipo de tarea y los pasos que componen una técnica son considerados como una pieza de saber no identificable a la maestría de la técnica en sí misma. Las acciones en juego y el contexto donde se sitúa la praxeología, en un sistema compartido, se pueden identificar en la elaboración de un sistema de representaciones verbales y, más ampliamente, simbólicas. La producción de estos lenguajes, y la descripción que ellos permiten, constituye una componente decisiva del proceso de transmisión de una invención técnica.
2. **Validar la técnica.** La función considerada corresponde a lo que en general se entiende bajo el término justificar, en los textos que definen la noción de praxeología. Los saberes considerados establecen que la técnica produce bien lo que ella dice que produce, que los pasos que la componen permiten conseguir los objetivos que le son asignados. En el caso de las matemáticas, esta función es generalmente asegurada por los saberes justificados por las teorías matemáticas. [...] Sin embargo, en otros contextos, los saberes validados experimentalmente en laboratorio o empíricamente en el uso pueden validar una técnica. Éste es particularmente el caso cuando se trata de validar las adaptaciones de la técnica.
3. **Explicar la técnica.** Se trata de saberes que permiten analizar cómo la técnica y sus diferentes pasos permiten conseguir los objetivos pretendidos. Es cuestión de una inteligencia de las causas. Después de la diatriba de los geómetras en torno a los métodos analíticos de Descartes, se sabe que existen –incluso en matemáticas– validaciones que no explican. Existen también validaciones que no validan, porque éstas no respetan completamente las normas de la validación en la institución que examina esta cuestión de la validez, apoyándose por ejemplo en analogías. Contribuyen a la comprensión de las causas de los sujetos y, por tanto, están sumamente relacionadas a su cultura compartida.
4. **Facilitar la aplicación de la técnica.** Los saberes considerados en esta función permiten a los usuarios utilizar con eficacia, pero también con un cierto confort, la técnica. Éstos son portadores de mejoras pero también de advertencias que permiten evitar errores y torpezas conocidas como frecuentes. Este dominio de saberes es el terreno privilegiado de las elaboraciones tecnológicas de los usuarios. Dicho dominio produce efectos retomados de descripciones que lo especifican al adaptarlo a las condiciones particulares del contexto institucional de utilización y al enriquecimiento de la memoria de las experiencias acumuladas.
5. **Motivar la técnica y los pasos que la componen.** Estos saberes están orientados hacia la práctica. Participan de una inteligencia de los fines: son los objetivos esperados que justifican racionalmente los pasos, mostrando su razón de ser. Se trata de escribir una historia de la técnica que sitúe sus componentes, los unos en relación con los otros: ¿por qué (¿para hacer qué?) se realiza tal paso en tal momento? Los saberes de motivación son frecuentemente saberes relacionados con el tipo de tareas, puesto que ellos analizan los objetivos. Permiten anticipar

las etapas esperadas y juegan, por tanto, un papel heurístico importante cuando la aplicación de la técnica necesita adaptaciones.
6. **Evaluar la técnica.** Los saberes considerados aquí tienen que ver con el dominio, las condiciones y los límites de una técnica en relación con las tareas del tipo ***T***. Ellos pueden igualmente concernir la ergonomía de la técnica desde el punto de vista de sus usuarios. Las funciones evaluar, facilitar y motivar están a veces muy relacionadas: la puesta en evidencia de ciertas dificultades (evaluar) puede provocar, al cabo de cierto tiempo, la producción de mejoramientos (facilitar); la motivación está dada por la evaluación. (Castela y Romo-Vázquez, 2011, pp. 88-89)

Estas funciones son, por tanto, herramientas que permiten abordar cuestiones como: ¿en qué condiciones se utiliza un modelo matemático?, ¿qué elementos del contexto de uso deben conocerse para poder utilizar un modelo?, ¿cuáles son los conocimientos que permiten a un modelador elegir y/o utilizar determinado modelo?, ¿cuáles son las explicaciones que acompañan el uso de los modelos? En el modelo praxeológico extendido se reconoce que tanto la elección del modelo o de la técnica más óptima (óptimo puede corresponderse con la facilidad de uso), como las condiciones del contexto de uso, la factibilidad de modelización de un fenómeno o proceso y las adaptaciones que deben operarse sobre un modelo para un cierto contexto se sustentan en saberes prácticos legitimados por *Iu*. Es decir, el modelo praxeológico extendido amplía la noción de validación de la técnica matemática, permite el análisis de los discursos tecnológicos prácticos que posibilitan usos y, más aún, reconoce las posibles relaciones con los discursos tecnológicos teóricos que producen dicha técnica. Por tanto, las funciones tecnológicas de la componente práctica constituyen una herramienta metodológica para analizar la actividad de modelización matemática de los ingenieros.

Este planteamiento teórico, la formación de ingenieros vista a través de instituciones productoras, de enseñanza y el uso del modelo praxeológico extendido para analizar modelos matemáticos en contextos de ingeniería, son la base del diseño de actividades didácticas como se muestra a continuación.

## 4. ANÁLISIS DE MODELOS MATEMÁTICOS EN USO, PRIMERA ETAPA EN EL DISEÑO DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA LA FORMACIÓN DE INGENIEROS

La modelización matemática, como se ha venido mostrando, ocupa un lugar cada vez más importante en las formaciones de ingenieros. Los planes y programas de estudio de diferentes instituciones señalan, ya sea en términos de competencias o de contenidos, que uno de los objetivos de las asignaturas matemáticas es dotar al estudiante de herramientas matemáticas para que modele situaciones prácticas. Sin embargo, existen pocas o nulas sugerencias didácticas precisas sobre cómo enseñar a modelar a los futuros ingenieros, los tipos de problemas que pueden abordarse y cómo éstos se relacionan con conocimientos propios al contexto del problema. Dentro de la matemática educativa se han desarrollado una gran cantidad de investigaciones sobre la modelización matemática, que han producido desde perspectivas teóricas hasta el diseño y experimentación de actividades didácticas en el aula. Lo anterior puede ilustrarse con el estudio ICMI 14, publicado en 2007, coordinado por la Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas y dedicado al tema de la "Modelación y Aplicaciones en Matemática Educativa". Sin embargo, son todavía pocas las investigaciones desarrolladas en el nivel universitario y todavía menos las que se sitúan en la formación matemática de ingenieros, considerando las características propias de la modelización matemática en la práctica de ingenieros. Nuestro objetivo es contribuir en el diseño de actividades didácticas específicamente para la formación de ingenieros y que éstas se basen en análisis de modelos matemáticos en uso. Para lo cual es necesario primeramente elegir un contexto de ingeniería, como se muestra en la metodología de diseño propuesta en Macias (2012).

## El método de la separación ciega de fuentes utilizado en la ingeniería biomédica

El primer contexto analizado es el de la ingeniería biomédica, y específicamente la aplicación del método de la Separación Ciega de Fuentes (BSS, por sus siglas en inglés). Un primer análisis de este método fue realizado conjuntamente con ingenieros-investigadores biomédicos y permitió reconocer el uso de matrices y vectores para modelar las señales eléctricas producidas por el cerebro. En dicho análisis, como se muestra en Romo-Vázquez, Romo-Vázquez y Vélez-Pérez (2012), se reconoce que este método, utilizado para el mejoramiento del diagnóstico de la epilepsia, puede ser una base para el diseño de actividades didácticas. En primer lugar, porque los modelos matemáticos utilizados son matrices y vectores; además, aparece la operación de la inversa de una matriz, todos los cuales son objetos de enseñanza en los cursos de álgebra lineal de las formaciones de ingenieros. El método de la BSS se utiliza generalmente para separar mezclas; en el contexto analizado, se busca separar señales eléctricas de origen cerebral de señales eléctricas de un origen distinto (muscular y ocular, por ejemplo) que se mezclan al ser captadas por electrodos para producir un electroencefalograma. Se reconoce que los modelos, matrices y vectores son adaptados para separar estas mezclas y no creados por cada ingeniero que aborda el problema. Para ilustrar el uso del modelo praxeológico en el análisis de este método, presentamos su principio (Romo-Vázquez et ál., 2012):

El modelo espacial de la mezcla al instante $k$ está definido por: $x(k) = As(k)$

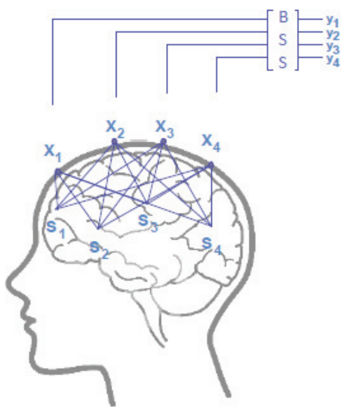
donde:

$x(k) = [x_1(k), \ldots, x_Q(k)]^T$ es el vector de señales observadas (electrodos)
$s(k) = [s_1(k), \ldots, s_P(k)]^T$ es el vector de las fuentes de origen (desconocido)
A(Q x P) matriz de mezcla (desconocida).

El objetivo de la BSS es la estimación de una matriz de separación **B**, que permita la estimación de las fuentes de origen **s** a partir de las señales medidas **x** (véase figura 4):

Desde el punto de vista formal, la separación ciega de fuentes consiste en estimar *P* señales desconocidas **s** (las fuentes) a partir del conocimiento únicamente de *Q* mezclas de las señales **x** (las observaciones). El término ciego significa que las fuentes no son observadas y que el modelo de mezcla **A** también es desconocido. Dentro del análisis praxeológico del método de la BSS pudo verse que la función ***validación de la técnica*** aparece en el momento de determinar el tamaño de la matriz A, la cual debe ser cuadrada de $n \times n$, para poder calcular su inversa. Es decir, los ingenieros-investigadores asumen que *P* es igual a *Q* como se muestra en Romo-Vázquez, Vélez-Pérez, Ranta, Louis-Dorr, Maquin y Maillard (2012): “Asumimos que el número de fuentes es igual al número de sensores Q. En este caso, $A \in R^{Q \times Q}$ y la separación ideal es obtenida cuando $B = A^{-1}$ y, por consiguiente, Y es una estimación (ruidosa) de S.” Los ingenieros-investigadores señalan que el tamaño de A dependerá del número de electrodos que se utilicen. La pregunta que emerge es, ¿cómo se determina un número **óptimo** de electrodos? Los ingenieros-investigadores indican que “se tienen que usar suficientes electrodos para estar seguro de que se captan todas las actividades cerebrales, por lo que en general se utilizan 24 o 64, siguiendo el sistema internacional 10-20”. Esta validación del número de electrodos y, por tanto, del tamaño de la matriz A depende de que se capte “suficiente” actividad cerebral. ¿Por qué es importante reconocer esta validación del tamaño de la matriz A para el diseño de una actividad didáctica? En primer lugar,

**Figura 4** Principio del método de la BSS



podría decirse que para el diseño de una actividad didáctica basado en el método de la BSS es importante reconocer que éste permite separar mezclas y, por tanto, importa reconocer *la naturaleza de la mezcla* y cómo ésta pueda ser modelizada mediante una matriz. Por ejemplo, si para el diseño de una actividad didáctica se considera una mezcla de voces o de sonidos que desea separarse, un elemento importante que debe considerarse –basado en el análisis praxeológico– es que el número de voces o sonidos debe ser igual al número de micrófonos que los captan (lo cual corresponde al caso ideal de que las fuentes $\mathbf{s}$ fueran igual al número de observaciones $\mathbf{x}$ captadas). Este elemento tecnológico propio del contexto debe ser considerado en el diseño de la actividad didáctica.

Un segundo contexto de ingeniería analizado corresponde al de teoría de control, la cual ofrece herramientas para modelar sistemas físicos. En Soto (2013) se analizó este contexto y, más en específico, el modelo de producción digital de voz. La investigación de Soto tenía por objetivo desarrollar una secuencia didáctica basada en modelización matemática para el curso de ecuaciones diferenciales. Un documento inicial que Soto analiza es la tesis doctoral de Escobedo (2006), cuyo título es: *Análisis acústico del llanto del niño recién nacido orientado al diagnóstico de patología en su neurodesarrollo debido a hipoxia*. Soto señala que la elección de esta tesis (documento de P(DI)) se debió a que se genera en la neurociencia y utiliza elementos de la Teoría de Control, en los cuales las ecuaciones diferenciales son fuertemente utilizadas como modelos matemáticos. El modelo de producción de voz presentado en Escobedo (2006) es bastante complejo como puede verse en la siguiente cita:

> Dos factores básicos entran en la producción de voz y lenguaje: el punto o zona de origen del sonido y el filtro; de hecho, toda onda de este tipo puede especificarse en función de estas dos características, esto es base de la formulación matemática de la teoría acústica para la producción de voz y lenguaje (Fant, 1960; Stevens, 1964; Flanagan, 1972); según lo anterior, la salida de voz y lenguaje puede representarse por la expresión (1.1) como: *Salida = Fuente · Filtro.* (Escobedo, 2006, p. 24)

Con el objetivo de analizar este modelo, Soto considera diferentes documentos, textos de teoría de control enfocados hacia la enseñanza de esta disciplina E(DI) –Pérez, Pérez y Pérez (2008), así como Gil y Díaz-Cordovés (2010)–, permitiéndole identificar las ecuaciones diferenciales y la función de transferencia utilizadas como modelos matemáticos "generales" para "controlar" sistemas. Un sistema puede representarse con el esquema bloque más general como se aprecia en la figura 5.

La entrada constituye algo que va a ingresar al sistema –velocidad, temperatura, tensión, etc.–, que puede modificarse y que puede elegirse por el modelador, mientras que la salida es lo que desea obtenerse. Por lo tanto, para controlar el sistema resulta fundamental reconocer la relación entre la salida (lo que desea obtenerse) y la entrada. Esta relación se define en teoría de control a través de la función de transferencia:

**Figura 5** Representación de un sistema mediante un esquema bloque


Considere el sistema lineal e invariante en el tiempo descripto mediante la siguiente ecuación diferencial de n-ésimo orden con coeficientes constantes, que relaciona las variables de entrada- y salida del mismo:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \mathrm{K} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} \mathrm{K} + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)$$

Ec. (20)

Los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y $b_0, b_1, \ldots, b_m$, son constantes reales. Una vez que la entrada $r(t)$ para $t >= t_0$ y las condiciones iniciales de $y(t)$ y las derivadas de $y(t)$ se especifican en el tiempo inicial $t = t_0$, la respuesta de salida $y(t)$ para $t >= t_0$, se determina al resolver la Ec. (20). Sin embargo, desde el punto de vista del análisis y diseño de sistemas lineales, el método que emplea ecuaciones diferenciales en forma exclusiva es bastante incómodo. Por lo que las ecuaciones diferenciales de la forma de la Ec. (20) rara vez se emplean en su forma original para el análisis y diseño de sistemas de control.

Para obtener la función de transferencia del sistema lineal en el dominio de Laplace, simplemente se toma la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación y **se suponen condiciones iniciales cero**. El resultado es:

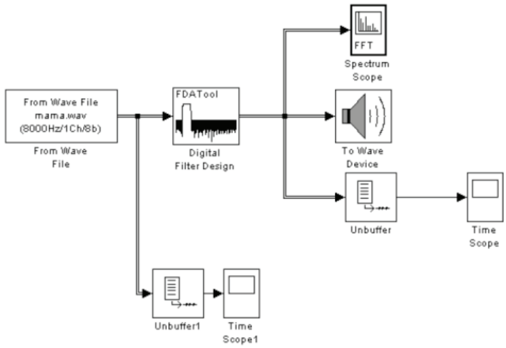
$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \mathrm{K} + a_1 s + a_0)\, Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \mathrm{K} + b_1 s + b_0)\, R(s)$$

La función de transferencia entre $r(t)$ y $y(t)$ está dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \mathrm{K} + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \mathrm{K} + a_1 s + a_0}$$

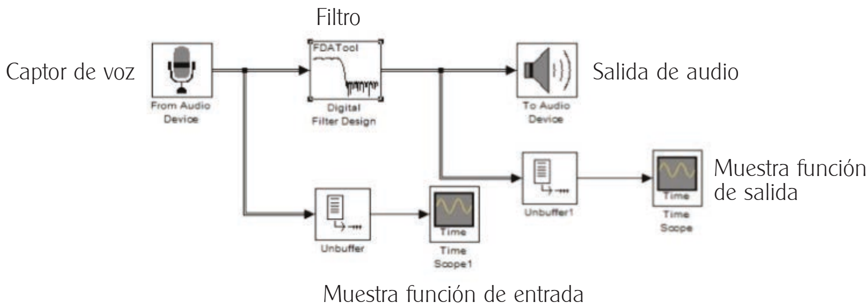
(Pérez et ál., 2008, pp. 34-35)

**Figura 6** Modelo de producción digital de voz (Martínez, 2007)




Se ha reconocido hasta aquí que, en teoría de control, un sistema que desea controlarse puede verse esquematizado mediante bloques, reconociendo la salida (lo que desea obtenerse) y la entrada (lo que puede elegirse para afectar el sistema). Al analizar la definición de la función de transferencia, que es el elemento tecnológico que permitirá controlar el sistema y verificar que éste realice exactamente lo que se espera, puede verse que hay otros elementos que deben ser comprendidos, por ejemplo, sistema lineal e invariante en el tiempo. Un sistema se reconoce lineal cuando se preserva la proporcionalidad: si una entrada es multiplicada por un factor la salida también lo es; y la aditividad: la suma de las entradas es igual a la suma de la salidas. Un sistema invariante en el tiempo es que para cierta entrada se obtiene la misma salida, sin importar el momento en el que se determine y, por tanto, los coeficientes de la ecuación diferencial son constantes. Podemos notar que la noción de linealidad se adapta para describir la naturaleza de los sistemas que se están modelando; lo que resulta importante en la teoría de control es poder reconocer la relación entre las entradas y las salidas del sistema. La representación de los sistemas mediante ecuaciones diferenciales lineales es *válida* para modelar de manera general estos sistemas, aunque en el documento analizado (Pérez et ál., 2008) se reconoce que esta modelización es "incómoda" y rara vez se utiliza. Por otra parte, puede notarse que se utiliza el término "dominio de Laplace" para indicar que la transformada de Laplace será aplicada a las ecuaciones diferenciales que representan cierto sistema físico para transformarlas en ecuaciones algebraicas que puedan operarse "más fácilmente". Se considera que la función ***facilitar la aplicación de la técnica*** permite justificar la aplicación de la transformada de Laplace a estas ecuaciones para poder modelar estos sistemas a través de los esquemas bloques donde las entradas, los componentes del sistema y las salidas se representan mediante bloques. Un análisis sobre el uso de la trasformada de Laplace en la modelización de estos sistemas aparece en Castela y Romo-Vázquez (2011). La ventaja de estos esquemas es que pueden ser simulados mediante herramientas computacionales, como es la librería Simulink del programa Matlab. Para ilustrarlo consideremos el esquema bloque

**Figura 7** Modelo adaptado por Soto




del modelo digital de voz que aparece en Martínez (2007) –documento de P(DI)– y representado en la figura 6. Se puede notar que las ecuaciones diferenciales y la función de transferencia que permiten controlar el sistema no aparecen en el esquema.

Para conformar el esquema, la librería Simulink ofrece una gran variedad de menús que permiten elegir los bloques (entradas, filtros, salidas que representen el tiempo, dispositivos, etc.) para representar cierto sistema. Una vez conformado el esquema, el trabajo de simulación consiste en analizar la(s) salida(s) obtenida(s) en función de la(s) entrada(s); el modelador puede agregar o suprimir bloques y modificar parámetros hasta obtener la(s) salida(s) deseada(s). Todas estas decisiones están sustentadas por ***justificaciones*** que deben ser reconocidas en el análisis praxeológico. En la secuencia diseñada por Soto se consideró como base el modelo de Martínez (2007), el cual fue adaptado como se muestra en la figura 7. Este esquema permite a los estudiantes grabar su voz una vez que se activa el ícono del micrófono y obtener como salida la voz distorsionada por un filtro. Una de las actividades consiste en cambiar parámetros para ir modificando el efecto del filtro y obtener como salida una voz clara y sin distorsión. El modelo que subyace al filtro es una ecuación diferencial de primer orden que funciona como caja negra, es decir, no se solicita a los estudiantes resolver ninguna tarea que los lleve a explicitar el modelo matemático que permita que el filtro funcione. Los estudiantes modifican parámetros y observan los efectos de las modificaciones sin necesariamente determinar qué las rige.

En la secuencia diseñada por Soto aparecen varios esquemas bloques similares al de la figura 7 pero más sencillos, que les permiten a partir de las tareas propuestas reconocer la relación de la función de salida con la función de entrada. La simulación de estos sistemas y el trabajo solicitado mantiene como caja negra a la ecuación diferencial y a la función de transferencia, excepto en la última tarea. En dicha tarea se presenta un esquema bloque y se dice que éste funciona gracias a una ecuación diferencial; una de las tareas consiste en comprobar si la función de salida (cuyas gráficas se han obtenido utilizando el bloque *scope* del programa computacional) se corresponde con la gráfica de la solución de la ecuación diferencial de primer orden $y' + 3y = 1$, que satisface la condición inicial $y(0) = 0$. Los estudiantes pueden resolverla mediante el método de su elección. Esta secuencia permite un trabajo de modelización matemática basado en la reproducción de esquemas bloques, en su simulación, en el análisis de gráficas que permitan reconocer la relación entre las funciones de entrada y salida, así como en la modificación de parámetros. Se busca, por tanto, motivar a los estudiantes a interrogarse sobre el modelo matemático que determina la relación entre la función de entrada y de salida del sistema considerado. La primera experimentación con estudiantes mostró que es necesario afinar la última tarea donde se propone el trabajo con la ecuación diferencial, para que el pasaje entre el trabajo con los esquemas bloques, el modelo digital de voz y la resolución de la ecuación diferencial sea más "suave".

## 5. REFLEXIONES SOBRE EL ENFOQUE TEÓRICO-METODOLÓGICO PROPUESTO

A partir del análisis de los primeros modelos de formación de la Escuela Politécnica, se mostró la existencia de tensiones entre teoría y práctica. La complejidad de conciliarlas se muestra con mayor fuerza en los modelos diseñados por Laplace y Le Verrier. Maurice d'Ocagne pone de manifiesto el papel de las matemáticas en las disciplinas intermediarias o ciencias del ingeniero que parecen equilibrar la teoría matemática, la cual es adaptada a estas disciplinas para poder resolver problemas de investigación y problemas prácticos de la ingeniería. La modelización matemática aparece ya en esta contribución pero no con este nombre, pues la matemática es vista más a un nivel de herramienta. Es con Pollak y el estudio ICMI 3 en su conjunto que se reconoce que ésta es un paradigma alternativo de la formación de ingenieros, lo cual puede confirmarse en los análisis de programas de estudio analizados por Macias (2012) y Soto (2013). La modelización matemática, aunada a los pensamientos lógico, heurístico y algorítmico, aparece como la razón de ser de la formación matemática. Sin embargo, existen pocas propuestas de enseñanza que se basen en las necesidades matemáticas de las disciplinas intermediarias (formación de especialidad) y en la práctica misma. Los cursos de matemáticas parecen concebirse con objetivos de enseñanza basados en la disciplina y lejos del paradigma de la matemática vista como disciplina de servicio.

Las herramientas teóricas y metodológicas aquí presentadas intentan ser una propuesta para el diseño de actividades didácticas de modelización. El trabajo de Bissell y Dillon (2000) pone de manifiesto que la modelización matemática en la práctica de ingenieros, lejos de crear modelos, consiste en la adaptación y refinamiento de modelos tipos. Este resultado es considerado en la propuesta metodológica y se postula que el diseño de las actividades didácticas debe estar basado en el análisis de modelos en uso. El método de la BSS ha sido el primer objeto de análisis y ha permitido estudiar matrices y vectores en tanto que modelos matemáticos en uso. La colaboración con ingenieros-investigadores se ha mantenido desde el inicio del proyecto y esto ha permitido que, en el diseño de las actividades, ellos vigilen los conocimientos asociados al uso de los modelos. Puede decirse que la modelización de mezclas a través de este método puede permitir el diseño de diferentes actividades didácticas, pues existen mezclas de notas musicales, voces y señales eléctricas que pueden ser consideradas para una actividad de modelización en el aula.

Esta propuesta metodológica, y particularmente del análisis de contextos no matemáticos, implica ingresar a otras lógicas disciplinares y prácticas. El trabajo de Soto (2013) permite mostrar que no basta acercarse a una sola fuente de análisis y que los documentos producidos en y para E(DI) son fundamentales para el análisis de los modelos en uso, pues estos documentos, al tener por objetivo difundir la modelización matemática de situaciones y fenómenos, hacen explícitas tanto las tareas, como las técnicas y, sobre todo, los discursos tecnológicos teóricos y prácticos. Sin embargo, muchas de las veces los discursos teóricos matemáticos aparecen a modo de invocación: en matemáticas existe una demostración, una definición, un teorema, pero no se muestra, **sólo se invoca**. El trabajo con ingenieros resulta fundamental para que sean ellos los vigilantes epistemológicos de los conocimientos de ingeniería. Esto implica realizar este tipo de investigaciones con un equipo multidisciplinario y en ese sentido puede resultar difícil llevarlo a cabo.

Por otra parte, se reconoce que un análisis praxeológico más fino de los modelos matemáticos en uso y el diseño de las actividades con estructura praxeológica permitiría reconocer la naturaleza de las transposiciones operadas para pasar del análisis de los modelos matemáticos en uso a su enseñanza. Asimismo, se considera que otras herramientas didácticas deben ser implementadas para analizar con mayor detalle la actividad de modelización matemática que tiene lugar en el aula cuando los estudiantes enfrentan las actividades diseñadas. Las herramientas teórico-metodológicas deben pasar por varios refinamientos, pero se considera que el análisis de modelos matemáticos en uso para basar el diseño de actividades didácticas para la formación de ingenieros es una vía que debe continuarse.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Belhoste, B. (1994), "Un modèle à l'épreuve. L'Ecole Polytechnique de 1794 au Second Empire", en B. Belhoste, A. Dahan-Dalmedico y A. Picon (eds.), *La Formation Polytechnicienne, 1774-1994*, París, Dunod, pp. 9-30.

Bissell, C. y C. Dillon (2000), "Telling tales: models, stories and meanings", *For the Learning of Mathematics*, vol. 20, núm. 3, pp. 3-11.

Blum, W., P. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (eds.) (2007), *Modelling and Applications in Mathematics Education. ICMI Study Series*, Nueva York, Springer.

Bourguignon, J. P. (2001), "Mathematics and others subjects", en D. Holton (ed.), *The*

*Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An* ICMI *Study*, vol. 7, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 313-320.

Castela, C. y A. Romo-Vázquez (2011), "Des mathématiques a l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 31, núm. 1, pp. 79-130.

Chevallard, Y. (1999), "La recherche en didactique et la formation des professeurs: problématiques, concepts, problèmes", en J. L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot y R. Floris (eds.), *Actes de la X*e *Ecole d'été de Didactique*, Houlgate, Académie de Caen, pp. 98-112.

D'Ocagne, M. (1914), "Le rôle des mathématiques dans les sciences de l'ingénieur", en H. Fehr (ed.), *Compte rendu de la Conférence Internationale de l'Enseignement Mathématique du 1914*, París, pp. 211-222.

Escobedo, D. (2006), *Análisis acústico del llanto del niño recién nacido orientado al diagnóstico de patología en su neurodesarrollo debido a hipoxia*, tesis de doctorado no publicada, Santiago de Cuba, Universidad de Oriente.

Gil, J. y A. Díaz-Cordovés (2010), *Fundamentos de Control Automático de Sistemas Continuos y Muestreados*, San Sebastián, Unicopia.

Howson, A. G., J. P. Kahane, P. Lauginie y E. de Turckheim (eds.) (1988), *Mathematics as a Service Subject. ICMI Study Series*, Cambridge, Cambridge University Press.

Kent, P. y R. Noss (2002), "The mathematical components of engineering expertise: The relationship between doing and understanding mathematics", *Proceedings of the IEE Second Annual Symposium on Engineering Education: Professional Engineering Scenarios*, vol. 2, Londres, pp. 39/1 -39/7.

Kent, P. (2007), "Learning Advanced Mathematics: The case of engineering courses. Contribution to the NCTM Handbook chapter: Mathematics thinking and learning at post-secondary level", en F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*, Charlotte, Information Age Pub, pp. 1042-1051.

Macias, C. (2012), *Uso de las nuevas tecnologías en la formación matemática de ingenieros*, tesis de maestría no publicada, México, CICATA-IPN.

Martínez, M. (2007), *Detector de partes vocalizadas de la voz esofágica en dispositivos FPGA*, tesis de maestría no publicada, México, CIDETEC-IPN.

Pérez, M., A. Pérez y E. Pérez (2008), "Introducción a los sistemas de control y modelo matemático para sistemas lineales invariantes en el tiempo", Facultad de Ingeniería, Departamento de Electrónica y Automática, Universidad Nacional de San Juan.

Pollak, H. O. (1988), "Mathematics as a service subject – Why?", en A. G. Howson et ál. (eds.), *Mathematics as a Service Subject*, Series: ICMI Studies, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 28-34.

Romo-Vázquez, A. (2009), *Les mathématiques dans la formation d'ingénieurs*, París, IREM de Paris.

Romo-Vázquez, A., R. Romo-Vázquez y H. Vélez-Pérez (2012), "De la ingeniería biomédica al aula de matemáticas", *Revista Electrónica de Computación, Informática, Biomédica y Electrónica*, vol. 1, núm. 1. [http://recibe.cucei.udg.mx/revista/es/vol1-no1/biomedica.html]

Romo-Vázquez, R., H. Vélez-Pérez, R. Ranta, V. Louis-Dorr, D. Maquin, L. Maillard (2012), "Blind source separation, wavelet denoising and discriminant analysis for eeg artefacts and noise cancelling", *Biomedical Signal Processing and Control*, vol. 7, núm. 4, pp. 389-400.

Vergnaud, G. (1996), "Au fond de l'action, la conceptualisation", en J.-M. Barbier (ed.), *Savoirs théoriques et savoirs d'action*, París, Presses Universitaires de France, pp. 275-292.

Soto, S. (2013), *Una secuencia didáctica basada en modelación matemática*, tesis de maestría no publicada, México, CICATA-IPN.

## DATOS DE LA AUTORA

**Avenilde Romo-Vázquez**
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada,
Instituto Politécnico Nacional, México
aromov@ipn.mx