ISSN: 1665-5826

Educación Matemática

México • 25 años • marzo de 2014

Parte I
Recuentos y prospectivas

- Teresa Rojano
- Salvador Llinares
- Alicia Ávila
- Carlos Bosch Giral

Parte II
Aproximaciones teóricas en la educación matemática

- Josep Gascón
- Luis Radford
- Gelsa Knijnik
- María Dolores Lozano

Parte III
Nuevos aportes al campo de la educación matemática

- Luis Moreno Armella
- María Trigueros
- Alfinio Flores Peñafiel
- Sonia Ursini
- José Luis Cortina
- Daniel Eudave Muñoz
- Avenilde Romo-Vázquez

Comité editorial

El Comité Editorial agradece profundamente a Editorial Santillana la cesión de los derechos de uso del diseño editorial de EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA es una publicación internacional arbitrada, que ofrece un foro interdisciplinario para la presentación y discusión de ideas, conceptos y modelos que puedan ejercer una influencia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La revista publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática. EDUCACIÓN MATEMÁTICA aparece tres veces al año y es indexada en ZDM (Zentralbatt für Didaktik der Mathematik), MathDi (Mathematics Didactics Database), Latindex, REDALYC (Red de revistas científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal), Scientific Electronic Library Online (SCIELO) y Clase (Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades). Las colaboraciones son recibidas en: revedumat@yahoo.com.mx y aliavi@prodigy.net.mx.

Educación Matemática

Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C.

Educación Matemática 25 años • marzo de 2014

Número especial coordinado por Alicia Ávila

Contenido

Parte III. NUEVOS APORTES AL CAMPO DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Editora responsable: Alicia Ávila Storer
Cuidado editorial: Susana Moreno Parada
Corrección de estilo: Belkis Maldonado
Diagramación: Fabiano Durand

Certificado de reserva de derechos al uso exclusivo: 04-2002-111517075100-102
Certificado de licitud de contenido: 10070
Certificado de licitud de título: 12499

Fecha de edición: marzo de 2014

El tiro fue de 100 ejemplares.

Impreso en México/Printed in Mexico.

www.revista-educacion-matematica.com

Presentación

Hace 25 años se publicó el primer número de Educación Matemática. Este número especial tiene como objetivo celebrar los 25 años de existencia de la revista; contiene 15 escritos de colegas que son o fueron miembros de su Comité Editorial y que desarrollan sus trabajos en diversos países, como Brasil, Canadá, España, Estados Unidos y México. En estos escritos se reflejan los intereses y objetos de investigación que se han constituido en este cuarto de siglo, así como las múltiples orientaciones y acercamientos teóricos que actualmente se trabajan en la comunidad internacional de investigadores de este campo.

Los temas tratados son diversos y en un cierto sentido, complementarios. Con el fin de dar armonía al conjunto del volumen, se modificaron las secciones habituales de Educación Matemática y el número se ha organizado en tres partes:

I. Recuentos y prospectivas
II. Aproximaciones teóricas en la educación matemática
III. Nuevos aportes al campo de la educación matemática

En la *Parte I. Recuentos y prospectivas* se incluyen tres revisiones que, sobre la base del pasado, miran al futuro: una vinculada a las tecnologías digitales en la educación matemática, de la autoría de Tere Rojano, otra dedicada a la formación y el aprendizaje de los maestros, escrita por Salvador Llinares sobre la base de su amplia experiencia en este tema, y una más que dediqué a los saberes matemáticos de la experiencia y su vinculación con la escolarización de jóvenes y adultos en situación de pobreza. Los tres temas resumen las trayectorias de los objetos que abordan y plantean desafíos para el futuro de la investigación. Esta parte cierra con un trabajo de Carlos Bosch que recuenta los resultados del programa *La ciencia en tu escuela*, implementado en México durante varios años con el objetivo de acercar a maestros y científicos para que ambos grupos propongan maneras diferentes y atractivas para la enseñanza de las matemáticas y las ciencias.

La *Parte II. Aproximaciones teóricas en la educación matemática* incluye diversas aproximaciones y reflexiones teóricas; la primera expresa la preocupación por la emancipación de la didáctica, tanto en lo institucional, como en lo epistemológico; esta doble independencia es propuesta por Josep Gascón a partir de los Modelos Epistemológicos de Referencia, cuestión que, como dice el autor, obliga a redefiniciones, a rupturas y a la construcción de instrumentos y conceptos.

En otro artículo de esta sección, Luis Radford plantea la idea marxista de la *praxis*, como un concepto que permitiría entender el conocimiento (incluido el conocimiento matemático) como necesariamente inmerso en una *praxis* cultural.

Gelsa Knijnik, en esta línea de acercamientos teóricos, propone nuevas interpretaciones a hechos del mundo real en su escrito "Juegos de lenguaje matemático en distintas formas de vida", y analiza estos "juegos" mediante conceptos acuñados por Foucault y Wittgenstein. Knijnik se vale de las ideas de estos autores para hacernos ver que la matemática de la escuela no es la única, ni la única *verdadera*.

En otra vertiente teórica, y en torno a la cognición, Dolores Lozano expone la perspectiva enactivista como una alternativa conceptual para investigar y esclarecer el aprendizaje (y la enseñanza) de las matemáticas. Esta aproximación, dice la autora, es poco conocida y ha sido escasamente utilizada como marco para interpretar la educación matemática, aunque progresivamente esta situación ha ido cambiando y en la actualidad desde diversas regiones se han producido resultados utilizándola.

La *Parte III. Nuevos aportes al campo de la educación matemática* es la más robusta. Contiene una serie de estudios con referentes empíricos en torno a temas de matemáticas que cruzan la educación en sus distintos niveles, desde la básica hasta la profesional. Las fracciones, la estadística, el cálculo y la modelación son los temas curriculares tratados.

Las fracciones, a pesar de haber sido sumamente estudiadas desde la década de 1980, se presentan aquí con temas y enfoques novedosos: Alfinio Flores expone un análisis de la división de fracciones y las estrategias utilizadas por los niños para resolver problemas que la implican, mientras que José Luis Cortina reporta investigaciones sobre el tema desarrolladas en el marco de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje.

Por su parte, Luis Moreno, apoyándose en la historia del cálculo, diserta con profundidad sobre la tensión entre la intuición y la formalización en la enseñanza de esta rama de las matemáticas, cerrando su escrito con una consideración muy sugerente: la posibilidad de que las herramientas digitales sean la puerta de entrada al futuro del cálculo.

En esta sección también se incluye un trabajo de Sonia Ursini sobre los afectos y su impacto en el aprendizaje de las matemáticas y se constata el interés por el desarrollo de propuestas didácticas para la educación superior concebidas desde distintas perspectivas teóricas, como la Teoría APOS, que sirve a María Trigueros en su novedoso tratamiento de las ecuaciones diferenciales mediante la modelación. El apartado cierra con el interesante escrito de Avenilde Romo-Vázquez, dedicado a la modelación en la formación matemática de los ingenieros desde otra perspectiva teórica: la teoría antropológica de lo didáctico y, específicamente, la noción de praxeología.

Según lo que en esta sección se lee, los temas no se han agotado, y sus múltiples aristas continúan ofreciendo resistencias y retos para la educación matemática y espacios fértiles de indagación para los investigadores.

La inclusión de cuestiones históricas, de evidencias sobre los procesos cognitivos de los estudiantes, de nuevos conceptos y respaldos teóricos (como el que proporciona la *didactique professionnelle* utilizada por Eudave en su investigación en torno al uso que hacen de la estadísticas los trabajadores sociales), o del uso de herramientas diversas para mejorar la vinculación con las matemáticas durante la formación profesional, hace que este apartado resulte muy sugerente.

El impacto de los resultados de la investigación en las prácticas de enseñanza es preocupación común a todos los trabajos, independientemente del enfoque que hayan asumido y las poblaciones que se hayan estudiado. Tere Rojano señala este punto como el núcleo duro de la relación entre investigación y práctica. Y le doy la razón, según el contenido de los artículos incluidos, en los últimos tiempos las investigaciones tienden a acercarse a las prácticas, pero aún no se han obtenido respuestas suficientes acerca de cómo hacer para que lo que ocurre en las escuelas, más allá de los círculos "ecológicamente controlados" por los investigadores, cambie sustancialmente para mejorar. Este dato llama a redoblar esfuerzos por entender las resistencias del sistema educativo, así como el pensamiento, el aprendizaje y la acción de los profesores.

Como ya mencioné, este número especial de Educación Matemática muestra avances representativos en la investigación en este campo. Los trabajos de revisión que constituyen la *Parte I. Recuentos y prospectivas* muestran las evoluciones y complejizaciones de los temas abordados. La sección que expone nuevos trabajos de indagación con referentes empíricos muestra que los temas y los problemas no se han agotado, y que la originalidad continúa siendo un rasgo posible en la indagación en educación matemática. Las reflexiones teóricas de hoy día expresan también la madurez de nuestras reflexiones y aportes.

Por todo lo anterior, y porque en el volumen se conjuntan diversas cuestiones –la matemática elemental y la matemática superior, los hechos y las teorías, lo escolar y lo no escolar, los avances y los obstáculos en nuestros afanes por influir en la prácticas de enseñanza, la experiencia y la madurez de muchos de sus autores con la juventud y la búsqueda de originalidad de otros–, confiamos en que este número especial constituirá un referente para la comunidad internacional de investigadores y educadores de la educación matemática.

Respecto del procedimiento de conformación del número, conviene mencionar que se trata de un número arbitrado. Un excelente Comité Evaluador realizó el trabajo de revisión y retroalimentación de los escritos. No obstante se extendió una invitación a los colegas para enviar sus contribuciones, se realizó un proceso de revisión que llevó a ajustar e incluso a reescribir muchos de los trabajos. Expreso, a nombre del Comité Editorial y el mío propio, el más sincero agradecimiento a todos los colegas que conformaron este Comité por el magnífico y puntual trabajo realizado.

En abril de 1989 apareció el primer número de Educación Matemática, gracias a la idea y el entusiasmo de Elfriede Wenzelburger y un grupo de colegas de diversas instituciones mexicanas interesados en crear una revista en español que difundiera los trabajos de investigación en el campo que en aquel entonces comenzaban a producirse. Un lustro después, Guillermina Waldegg quedó al frente del equipo y durante años aportó su trabajo y su inteligencia para la construcción de la revista.

Este número, publicado 25 años después de aquél en el que se insertaron las contribuciones de Guillermo Arreguín, Ignacio Barradas, Eduardo Mancera o Elfriede Wenzelburger, testimonia la evolución y la riqueza del trabajo de investigación en educación matemática que se desarrolla actualmente. Muchos de los escritos incluidos son clave para entender los logros alcanzados y los retos para un mejor futuro de la educación matemática en nuestros países. Quienes conformamos el Comité Editorial confiamos en que su lectura produzca fructíferos debates entre miembros de nuestra comunidad y contribuya a los esfuerzos actuales por transformar la educación matemática que tiene lugar en las aulas a las que asisten niños, jóvenes, profesionales en formación, así como personas adultas que por su condición de vulnerabilidad social asisten a una escolarización tardía.

Alicia Ávila
Coordinadora del número especial de 25 años

Parte I

Recuentos y prospectivas

El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo

Teresa Rojano

Resumen: Se plantea una prospectiva de investigación futura, a partir de un recuento de los resultados de estudios empíricos y teóricos sobre entornos tecnológicos de aprendizaje en matemáticas, llevados a cabo a lo largo de tres décadas. También se analizan los factores favorables y los obstructores potenciales para la implementación de un currículo de matemáticas que incorpore a las tecnologías digitales como agentes de cambio, tanto a nivel de contenidos como de prácticas de aula. El artículo se enfoca sobre todo en el uso de la tecnología en la educación básica y media, y se intenta dar una visión panorámica internacional (sin pretender que ésta sea exhaustiva).

Palabras clave: tecnologías digitales y educación matemática, análisis retrospectivo, visión prospectiva, literatura especializada internacional.

Abstract: A prospective for future research is outlined on the basis of a brief revision of the outcomes from empirical and theoretical studies on the use of technology learning environments in mathematics, that have been undertaken for three decades. At the same time, propitious factors as well as potential obstructors for a productive implementation of a mathematics curriculum that incorporates digital technologies as agents of change are analyzed. The article focuses on the use of technology in the elementary and middle and junior secondary school, but at the same time it intends to provide an international (albeit not exhaustive) overview.

Keywords: digital technologies and mathematics education, retrospective analysis, prospective vision, international specialized literature.

INTRODUCCIÓN

En su conferencia plenaria de 2010, en el congreso del 17th ICMI Study, "Mathematics Education and Technology–Rethinking the Terrain", Seymour Papert señaló que si bien ha sido importante investigar cómo el conocimiento existente puede ser aprendido (y enseñado) en entornos tecnológicos, pedía a la audiencia del congreso que dedicáramos un 10% de nuestras reflexiones durante la reunión a considerar qué nuevos tipos de prácticas y qué nuevos conocimientos matemáticos podrían emerger

Fecha de recepción: 31 de agosto de 2013; fecha de aceptación: 23 de diciembre de 2013.

como resultado del acceso a un uso efectivo de las tecnologías digitales. Siguiendo el espíritu de la sugerencia de Papert, en este artículo expongo una prospectiva sobre cómo la evolución tecnológica, junto con la experiencia acumulada de 30 años de investigación intensiva sobre su uso en la educación matemática, puede llegar en el futuro a influir no sólo en el currículo oficial sino en el currículo implementado y en las prácticas de enseñanza dentro y fuera del aula de matemáticas. Para ello, recurro a varias fuentes, entre otras, al libro que fue el resultado de la reunión del 17th ICMI Study que he mencionado (Hoyles y Lagrange, 2010), a la entrada "Technology and curricula in mathematics education" de la *Encyclopedia of Mathematics Education* (Lerman, 2012) y al libro *Improving Classroom Learning with ICT*, en el que se sintetizan las experiencias y los resultados del proyecto InterActive Education (Sutherland, Robertson y John, 2009) llevado a cabo por investigadores de la Universidad de Bristol, Inglaterra.

Más allá de la posibilidad que ofrecen los entornos tecnológicos de aprendizaje de un acceso temprano a ideas poderosas en matemáticas, las potencialidades didácticas probadas de dichos entornos (tanto de naturaleza cognitiva como epistemológica) hicieron suponer que su influencia podría llegar a moldear un currículo de matemáticas completamente nuevo, así como a revolucionar las prácticas de aula. Sin embargo, esta posibilidad ha sido seriamente cuestionada a partir de los resultados de evaluaciones internacionales recientes y de estudios sobre el uso real de la tecnología por parte de los maestros, lo cual ha dado lugar a intensos debates en la comunidad internacional de matemáticos y educadores matemáticos. Aquí me referiré a dos posturas extremas que surgieron en medio de tales debates y a cómo esas posturas evolucionaron hacia una gama de perspectivas sobre el uso de las tecnologías computacionales en la educación matemática.

PROGRAMACIÓN, IDEAS MATEMÁTICAS Y EL CURRÍCULO

Los inicios de la presencia de la tecnología computacional en la educación pueden ubicarse en la década de 1970, cuando la programación computacional se empezó a enseñar en las escuelas. Los contenidos de los cursos estaban desligados del currículo de matemáticas, a pesar de que la programación está fuertemente relacionada con las ideas de variable y de algoritmo (Sutherland y Rojano, 2012). Por esa misma época, Papert y sus colegas desarrollaron el lenguaje de programación Logo, cuya principal característica es la de una tortuga en la pantalla que puede ser controlada por comandos de programación. Los estudios empíricos realizados en la década de 1980 revelaron el poder de este ambiente de programación para facilitar la comprensión de conceptos matemáticos específicos. En particular, se evidenció que mediante el trabajo con Logo era posible que estudiantes muy jóvenes exploraran ideas matemáticas, como las ideas de variable, variación funcional, razón y proporción, procesos recursivos, generalización matemática y su simbolización (Hoyles y Noss, 1992; Hoyles y Sutherland, 1992). Debido a estos resultados y a la introducción de actividades con Logo en algunas escuelas (principalmente del Reino Unido), emergen distintas perspectivas y posicionamientos sobre la relación entre el uso de la tecnología computacional y el currículo de matemáticas.

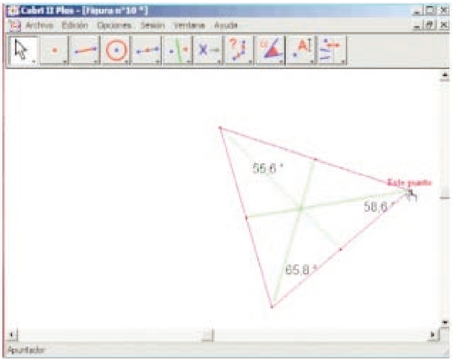
Como se puede notar, algunos de los tópicos que podrían introducirse en la escuela primaria utilizando Logo desbordan los límites del grupo de temas clásicos del currículo de ese nivel escolar. De ahí que desde esos años se iniciara una discusión (que continúa hoy en día) sobre la posibilidad de que el uso de las tecnologías computacionales influya en cambios de fondo del programa oficial. Por ejemplo, en vista de los resultados de los trabajos experimentales con Logo, ideas matemáticas poderosas como la generalización y la recursividad bien podrían tener cabida en el currículo de la escuela elemental. Sin embargo, después de tres décadas de debate persiste la interrogante de cómo lograr la articulación de tales temas con temas curriculares bien establecidos. Esta inquietud proviene no sólo del ámbito de los diseñadores y desarrolladores del currículo, sino también y principalmente de quienes pondrían en práctica el uso de tales tecnologías en el aula, es decir, de los maestros.

TECNOLOGÍA Y CURRÍCULO, DOS TENDENCIAS

Por otra parte, entre las décadas de 1980 y 1990, para algunos diseñadores y desarrolladores de *software* para la enseñanza de las matemáticas, se planteó la disyuntiva de hacer desarrollos para apoyar al currículo oficial o hacer desarrollos para traspasar los límites institucionales tradicionales de la educación matemática. Así, en este terreno y de entonces a la fecha, pueden distinguirse dos tendencias: la del uso de la tecnología ajustada al currículo y la del uso de la tecnología como un medio de cambio.

Respecto a la primera de estas dos tendencias, destacan los programas de geometría dinámica (GD), como Cabri-Géometre y Geometer Sketchpad, desarrollados en un inicio para apoyar la enseñanza de la geometría euclidiana en distintos niveles escolares. De acuerdo a la descripción de Jones, Mackrell y Stevenson (2010), en un ambiente de GD el usuario puede 'asir' con el *mouse* un elemento de una figura en la pantalla y arrastrarlo, y conforme estos arrastres tienen lugar, la figura o diagrama cambia de tal manera que las relaciones geométricas especificadas (o implicadas) en su construcción se mantienen (Ibíd., p. 50). Esta característica hace de la GD una herramienta didáctica muy poderosa, en vista de que a través de la construcción de figuras en la pantalla y del arrastre de los elementos en la figura, el usuario tiene un acceso exploratorio y experimental al mundo de la geometría. Así, propiedades como "la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180°" o el teorema "las medianas en un triángulo cualquiera son concurrentes" pueden descubrirse o comprobarse mediante exploraciones 'por construcción y arrastre' (figura 1). Puede entonces decirse que en

Figura 1 Trazo de las medianas en un triángulo con Cabri Géometre. Colocando el cursor en uno de los vértices, ‘por arrastre’ se puede deformar el triángulo y confirmar la concurrencia de las medianas en todos los triángulos así generados



este caso las tecnologías digitales son creadas para servir a propósitos de un currículo clásico. Es decir, la innovación no reside en el contenido matemático que se intenta enseñar, sino en la forma de acercar al estudiante a contenidos establecidos en el programa de matemáticas oficial.

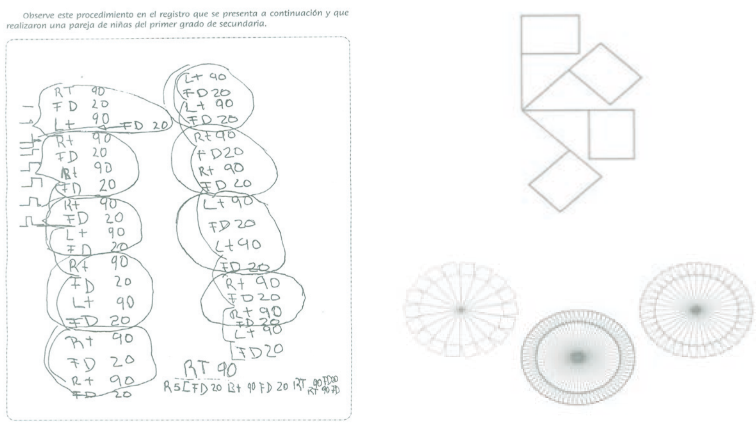
Por otra parte, respecto a la segunda tendencia, el programa Logo constituye el ejemplo por excelencia de que la tecnología no sólo puede cambiar la forma de enseñar y aprender matemáticas, sino que puede trastocar los contenidos del currículo mismo. En el diseño de las actividades preparadas para los trabajos experimentales con Logo puede advertirse esta tendencia a usar la tecnología como un medio para transformar la matemática escolar (y por ende, el currículo; véase figura 2).

Hacia la década de 1990, estas dos tendencias tan marcadas en un tiempo evolucionaron hacia una gama amplia de perspectivas sobre la relación entre la tecnología y el currículo. Lo anterior tuvo lugar a raíz de los desarrollos posteriores a Logo y a los programas de GD y, sobre todo, a partir de los resultados del uso de los nuevos desarrollos en investigaciones empíricas con estudiantes.

EL AUGE DE LAS INVESTIGACIONES SOBRE TD EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

A inicios de la década de 1990, había ya una variedad amplia de tecnologías digitales (TD) accesibles para ser usadas en la escuela, incluidas las hojas electrónicas de cálculo, los graficadores y los sistemas computacionales de álgebra (CAS, por sus siglas en inglés), entre otras. Con la creciente presencia de herramientas para la enseñanza de las matemáticas, se incrementaron a su vez las investigaciones que ponían a prueba su uso

Figura 2 Actividad de generalización con Logo. El programa escrito por estudiantes de secundaria genera la figura de las 'banderas' y gracias a la función recursiva del mismo se generan las figuras 'circulares'



por parte de los estudiantes. Dichas investigaciones coincidieron en sus conclusiones en que los entornos tecnológicos poseen una gran potencialidad para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (Drijvers, Kieran y Mariotti, 2010), la cual se traduce en:

- Un impacto en el nivel epistemológico.
- La posibilidad de un acercamiento experimental y práctico al aprendizaje de la geometría.
- La factibilidad de una iniciación temprana al aprendizaje del álgebra y al estudio de la matemática de la variación.
- Una aproximación a la enseñanza de las matemáticas vía la modelación de fenómenos del mundo físico.
- El logro de la transversalidad en la enseñanza de distintas materias de estudio.
- La emergencia de nuevas prácticas de aula.
- La posibilidad de la inclusión de nuevos temas en el currículo de matemáticas de distintos niveles escolares (por ejemplo, recursividad, generalización y matemática del cambio en la educación básica, y geometría tridimensional y estadística inferencial en la educación pre-universitaria y universitaria, manipulando datos auténticos).

En este escenario rico en innovaciones y trabajo experimental, se diversifica el papel de las TD en la educación matemática, por una parte, continuando con el desarrollo de programas ajustados a propósitos curriculares, como Autograph y Fathom, utilizados en la enseñanza de la estadística (figura 3) y, por otra, desarrollando programas para hacer accesibles las matemáticas a nuevos grupos de estudiantes, como SimCalc, diseñado

Figura 3 Distribución de promedios de muestras de una población geométrica modelada con Fathom

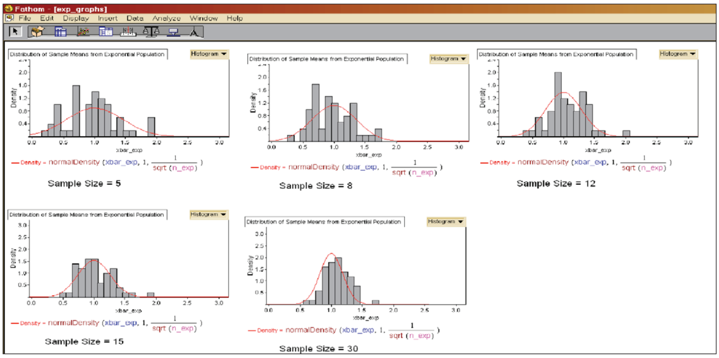


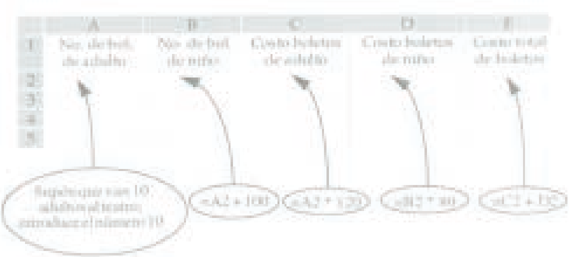
Figura 4 Pantalla de SimCalc. En el lado izquierdo se despliegan las gráficas de posición conforme se desplazan los personajes del simulador (parte superior), y del lado derecho se despliegan simultáneamente las gráficas de velocidad correspondientes.

para democratizar la enseñanza del cálculo (Kaput, 1994) (figura 4), o haciendo adaptaciones de tecnologías que no fueron diseñadas con fines educativos, como las hojas de cálculo, utilizadas para la enseñanza de la modelación, la resolución de problemas de varias variables, la generalización y las funciones (Sutherland y Rojano, 1993; Molyneux et ál., 1999) (figura 5).

Figura 5 Hoja de trabajo sobre la resolución de un problema de varias variables con Excel (Proyecto EMAT, SEP-Cinvestav)

Problema del Teatro

En una función de una obra de teatro, los boletos de adulto costaban $120 pesos y los de niño costaban $80 pesos. Se vendieron 100 boletos más de niño que de adulto. ¿Cuántos boletos de cada tipo se vendieron si se recaudaron $30,000 pesos en total?
Usa tu Hoja de Cálculo para resolver este problema.



¿Cuánto se recauda si van 10 adultos al teatro?
Cambia el número en la celda A2 (número de boletos de adulto) hasta que en la celda E2 obtengas 30,000.
Encontrarás que se vendieron 110 boletos de adulto.
¿Cuántos boletos de niño se vendieron?

A esa diversificación de roles de las TD la acompañan más estudios empíricos, pero también se plantea en la comunidad de investigadores de la educación matemática la necesidad de profundizar en las teorizaciones formuladas hasta ese momento (finales de la década de 1990 y principios de la década de 2000). A continuación describo brevemente las perspectivas teóricas que se han consolidado a partir de una preocupación por dar explicaciones plausibles a fenómenos que surgen en nuevos estudios y por delinear pautas para el uso efectivo de las tecnologías en el salón de clases.

LOS AÑOS DOS MIL

Nuevos resultados-nuevas teorizaciones

Adicionalmente a las potencialidades didácticas de las td evidenciadas por los estudios de la década de 1990, investigaciones más recientes revelan otro tipo de resultados, los cuales señalan serios obstáculos para el uso de dichas tecnologías en el aula, es decir, para su uso en un ambiente distinto al de las situaciones creadas para los estudios experimentales, ecológicamente protegidas y con variables determinantes controladas (Artigue, 2007b). Por ejemplo, algunas de esas investigaciones reportan que independientemente de la intención de los desarrolladores, los estudiantes pueden utilizar las tecnologías diseñadas para el aprendizaje de las matemáticas con propósitos no-matemáticos. Éste es el caso de los estudiantes que utilizan el *software* de GD para hacer dibujos en la pantalla, en lugar de construir objetos matemáticos con propiedades geométricas. O bien, en un contexto más amplio que el de la educación matemática, está el caso reportado por Sutherland, Robertson y John (2009) quienes, en un experimento en el que estudiantes de primaria trabajaban con un *software* de simulación de la ecología marina, encontraron que los niños trataban al simulador como un juego de computadora y terminaron embarcándose en un proceso de 'ganar' (Ibíd., p. 32). El simulador Fishtank utilizado en el experimento fue diseñado bajo principios construccionistas,[1] para que los usuarios diseñaran (y no sólo observaran) el comportamiento de los peces, pero claramente en el experimento referido surgió una discrepancia entre la intencionalidad del *software* y su utilización por los usuarios reales; es decir, en este caso, como en el ejemplo del uso del *software* de GD como herr amienta de dibujo, surge un uso idiosincrásico de la tecnología. Este tipo de experiencias condujo al grupo de investigadores a concluir que, para lograr un uso efectivo de las TD en la educación, es necesario tender puentes entre los aprendizajes incidental, idiosincrásico e intencional (Ibíd., pp. 32-33).

Otro tipo de discrepancia que puede obstruir una implementación adecuada del uso de TD en el salón de clase es cuando dicha implementación se centra en el profesor y no en las estrategias pedagógicas sugeridas en los documentos curriculares modernos, las cuales deben ser centradas en los alumnos, con acercamientos exploratorios y experimentales.

Por otra parte y en este mismo orden de cosas, se han reportado evidencias de que los profesores no están explotando la potencialidad de las TD para el aprendizaje de las matemáticas, a pesar de lo que se especifica al respecto en los documentos oficiales (estándares, currículo) y a pesar de la evidencia acumulada a lo largo de tres décadas de investigación en el campo (Assude, Buteau y Forgasz, 2010).

[1] De acuerdo con la teoría del construccionismo, el individuo aprende construyendo modelos mentales para entender el mundo que lo rodea y sostiene que el aprendizaje tiene lugar de manera más efectiva cuando los individuos son activos construyendo objetos tangibles en el mundo real (Papert, 1980; Harel y Papert, 1991; Noss y Hoyles, 1996).

Ante el panorama que presentan resultados como los anteriores, en el nuevo milenio se plantea la necesidad de profundizar en teorizaciones que conduzcan a la elaboración de marcos para el desarrollo de prácticas en el aula de matemáticas que exploten la potencialidad de la tecnología. Es decir, las nuevas tendencias teóricas están marcadas por su intención de acercar la investigación a la práctica. Con esta característica, actualmente pueden identificarse de manera general las siguientes perspectivas teóricas:

- **Teoría de la génesis instrumental**, que distingue entre la tecnología (artefacto) y el instrumento. En esta teoría, el artefacto es considerado el dispositivo o programa tecnológico que permite resolver tareas o realizar actividades para el aprendizaje, y el instrumento es una construcción mental del sujeto cuando se apropia del artefacto para resolver tareas y abordar situaciones de aprendizaje que se le presentan. En este sentido, la teoría también separa la intención del diseñador de lo que el usuario construye en su contexto de uso (Artigue, 2007a).[2]
- **Teoría de la mediación semiótica en la clase de matemáticas**, que sugiere pautas para las prácticas del profesor de matemáticas, basadas en el rol de los sistemas de signos en la mediación entre el maestro, la tecnología y los alumnos (Bartolini Bussi y Mariotti, 2008).
- **Teoría del construccionismo**, que se basa en el principio constructivista de que el individuo aprende construyendo modelos mentales para entender el mundo que lo rodea y sostiene que el aprendizaje tiene lugar de manera más efectiva cuando los individuos son activos construyendo objetos tangibles en el mundo real (Papert, 1980; Harel y Papert, 1991). De acuerdo a esta teoría, dicha construcción de objetos mentales tiene lugar en los llamados micromundos, en los que los sujetos, por ejemplo, pueden percibir los invariantes en una actividad específica, los cuales contienen el germen de la generalidad que podrán identificar en otros contextos (noción de abstracción situada: Noss y Hoyles, 1996).

Pero no sólo en el terreno teórico se hacen formulaciones que atienden la necesidad de delinear pautas para la transformación de las prácticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y la ciencia a través de la tecnología, sino que también la evolución tecnológica se ha convertido en un factor de cambio y se observa entre los desarrolladores una tendencia al diseño de herramientas para la transformación de esas prácticas. En el siguiente apartado se incluyen ejemplos de desarrollos que llevan una intencionalidad transformadora desde su concepción.

---

[2] Esta perspectiva general acerca de la relación usuario-artefacto-instrumento ha dado lugar a nuevas formulaciones teóricas, algunas de las cuales incorporan elementos de la teoría antropológica de la didáctica de Yves Chevallard (1999) o variables institucionales, como la disponibilidad tecnológica en la escuela o el involucramiento de las autoridades educativas (Drijvers y Trouche, 2008).

Evolución tecnológica

La experiencia de introducir la tecnología a la escuela ha dado pie a una multiplicidad de modelos de uso, los cuales en muchos casos se han acompasado con las innovaciones tecnológicas. Por ejemplo, el uso de calculadoras y computadoras personales en el salón de clases se ha complementado con el uso del pizarrón electrónico. De este modo, se puede combinar el trabajo individual o por equipos pequeños con el despliegue en pantalla grande de las producciones de los alumnos, creándose condiciones propicias para discusiones grupales, contrastación de soluciones, puestas en común, institucionalización del saber (Trouche, 2004), entre otras prácticas de construcción social del conocimiento. En la década pasada se implementaron proyectos gubernamentales con estas características en varias partes del mundo. En México se desarrollaron materiales interactivos apegados a los libros de texto gratuito de primaria para su despliegue y manipulación en pizarrones interactivos (Trigueros et ál., 2006) y en el Reino Unido se introdujo el uso masivo de esos pizarrones en las aulas de la enseñanza obligatoria (Kennewell, 2009). A pesar de que ambas experiencias no reportan resultados muy optimistas respecto al uso de dicha tecnología, puede decirse que con los modelos de uso a que ésta da lugar, se puede dar por terminada la dicotomía tan marcada, en la década de 1980, de las tecnologías diseñadas para un uso personal y privado (como las calculadoras gráficas), por un lado, y las tecnologías en las que se hace público el trabajo personal (como las computadoras personales), por el otro.

También, en relación a la transformación de prácticas, innovaciones tecnológicas más recientes están cambiando las condiciones para el aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, el acceso en dispositivos móviles (a través de la red) a aplicaciones nuevas (*Apps* para tabletas) y a materiales interactivos desarrollados en décadas anteriores (como por ejemplo, GD, hojas de cálculo, CAS) puede alentar modelos más flexibles del uso de la tecnología, tanto para la enseñanza como para el aprendizaje. En este punto hago la distinción entre enseñanza y aprendizaje, en razón de que la posibilidad de trabajo individual en dichos dispositivos, con aplicaciones diseñadas para el autoestudio, pone en el centro al aprendiz y la tecnología funciona como un medio para el aprendizaje autónomo y el llamado aprendizaje para la vida (*life-long learning*). En estos desarrollos se disminuye el énfasis en la enseñanza. Por ejemplo, las aplicaciones *i-factor* y *i-factor pro* para iPads están diseñadas para la factorización de expresiones cuadráticas y para la resolución de ecuaciones de segundo grado, respectivamente, y pueden utilizarse para verificar los resultados de tareas previamente realizadas por el estudiante con álgebra de papel y lápiz, apoyándolo así en el desarrollo de habilidades de álgebra manipulativa. Este tipo de *Apps* tiene la característica de que se le presentan al usuario, de manera automatizada, familias de problemas o ejercicios algebraicos que incluyen variantes en la estructura de las expresiones y en el dominio numérico de coeficientes y soluciones de las ecuaciones.

Por otra parte, se han desarrollado *Apps* para tabletas en las que los usuarios

Figura 6 Manipulación directa de una figura geométrica en pantalla *touch screen* de tableta digital (imagen video James Kaput Center, UMASS, www.kaputcenter.umassd.edu, virneo.com/40085636)

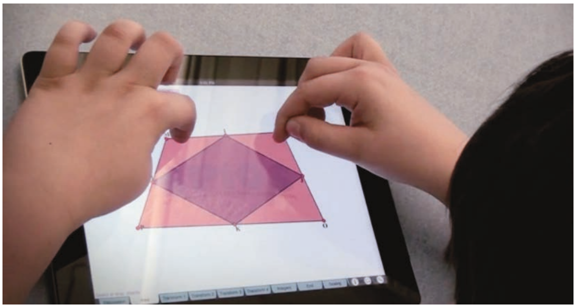
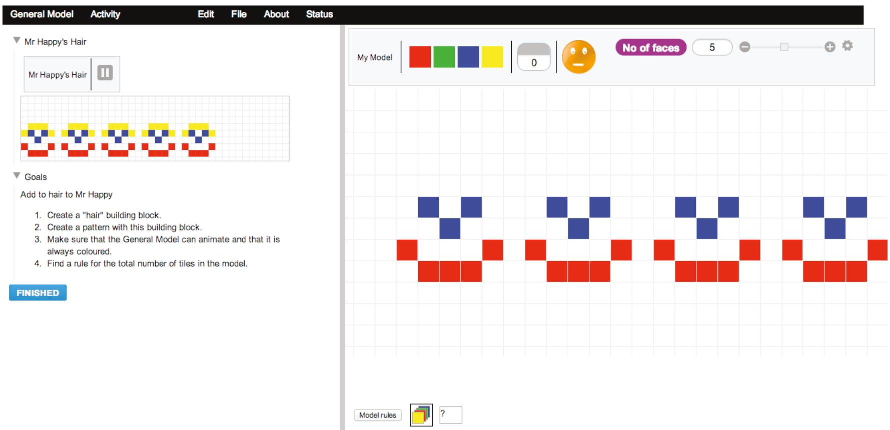


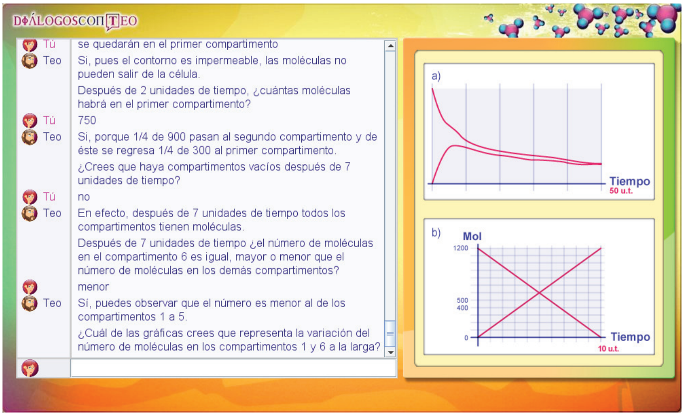
Figura 7 Pantalla de eXpresser. Del lado izquierdo aparece la ventana del mundo general, y del derecho, la ventana de 'mi mundo'. La retroalimentación del soporte inteligente aparece en la parte superior derecha



prácticamente 'tocan' y manipulan los objetos geométricos, sin la mediación del *mouse* o del teclado. Este tipo de interacción tan directa con el objeto de conocimiento hace suponer que el trabajo con estos materiales tendrá repercusiones en el nivel cognitivo y epistemológico, es decir, en la forma en que los estudiantes construyen el conocimiento matemático (figura 6).

Otras innovaciones incluyen un sistema de soporte inteligente que proporciona retroalimentación al usuario cuando trabaja en un entorno tecnológico de aprendizaje (o micromundo). Tal es el caso del programa eXpresser, desarrollado en el London

Figura 8 Pantalla del modelo de difusión molecular en Diálogos Inteligentes. Del lado derecho aparece la ventana del micromundo (gráficas con parámetros manipulables) y del lado izquierdo, aparece la ventana de diálogo



Knowledge Lab (www.lkl.ac.uk), en el cual los estudiantes trabajan en un micromundo para el aprendizaje de la generalización a partir de construir y analizar patrones en secuencias figurativas (figura 7). Durante la realización de una tarea, el sistema plantea al usuario preguntas o hace sugerencias en momentos considerados por los diseñadores de la actividad como 'oportunidades de aprendizaje' (Noss et ál., 2009).

Por su parte, en las unidades interactivas *diálogos inteligentes*, desarrolladas en colaboración por el Laboratorio de Innovación Tecnológica y Educativa (LITE) y el Instituto de Matemáticas de la UNAM, se despliegan en la pantalla, de manera simultánea, una ventana de micromundo y una ventana de *chat*, dinámicamente vinculadas entre sí. Así, el sistema entabla un diálogo con los usuarios mientras éstos trabajan en el micromundo. En este caso, la interacción es con los dos sistemas, y una acción del estudiante en el micromundo puede dar lugar a una pregunta o sugerencia por parte del sistema, en la ventana de *chat*. A su vez, las respuestas por parte del usuario en esta ventana pueden recibir retroalimentación en ambas ventanas. Del mismo modo que en eXpresser, en el diseño de las unidades interactivas de *diálogos inteligentes* también se identifican previamente momentos críticos de retroalimentación. Cuando el contenido de las unidades incluye actividades de modelación parametrizada en ciencias, dichos momentos corresponden a momentos de predicción del comportamiento de un fenómeno, de confirmación de una conjetura o de validación del modelo (figura 8).

Cabe mencionar que en los dos ejemplos anteriores, las interacciones entre el usuario y el entorno tecnológico son de naturaleza compleja y distan mucho del tipo de aplicaciones que en la década de 1980 solían desarrollarse con sistemas de inteligencia artificial y que dieron lugar a los llamados tutoriales, cuyo diseño se basaba en modelos de enseñanza programada (Rojano y Abreu, 2012). De hecho, esa complejidad en la interacción está relacionada con la intencionalidad del diseño didáctico, pues, en ambos casos, el soporte inteligente está pensado como un recurso de retroalimentación oportuna, puntual, específica y personalizada, como un complemento a la retroalimentación del maestro o de los compañeros de clase. Es decir, haciendo referencia a lo que se mencionó en una sección anterior, este par de herramientas llevan en su diseño la intención de ayudar a transformar las prácticas de aula, en lo que a las posibilidades de retroalimentación focalizada se refiere.

La emergencia de modos de uso novedosos, a raíz de la evolución tecnológica, hace necesaria la investigación correspondiente a partir de la cual se verifiquen las hipótesis de trabajo de los nuevos diseños, tanto de artefactos como de *Apps* y de *software* especializado. En otras palabras, el futuro del uso de la tecnología para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas debiera no sólo depender de la evolución tecnológica, sino también de los resultados de investigaciones que hagan transparentes, para maestros y diseñadores del currículo, las potencialidades y las limitaciones de esas innovaciones.

EVOLUCIÓN TECNOLÓGICA Y EL FUTURO DEL CURRÍCULO, DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y DE LA INVESTIGACIÓN

Las innovaciones tecnológicas como factor de cambio

A pesar de los resultados desalentadores de las investigaciones de inicios del milenio respecto al poco o nulo impacto tecnológico en las prácticas docentes, el *boom* de las innovaciones tecnológicas de los años recientes y la enorme diseminación de su uso en la sociedad en general han revivido el interés por la integración de la tecnología a la educación. Dicho interés ha resurgido con fuerza al interior de las comunidades de investigadores, maestros, autoridades educativas, padres de familia y diseñadores y desarrolladores de currículo, y en el caso particular de la educación matemática, algunos de los nuevos desarrollos se han convertido en factores potenciales de cambio en la concepción de la enseñanza de esta disciplina. A continuación hago un breve recuento de algunos de esos factores.

Los desarrollos recientes de la GD de tres dimensiones (3D) permiten a los estudiantes obtener visualmente información sobre figuras tridimensionales. De este modo, temas de geometría espacial que tradicionalmente estaban reservados para el currículo universitario y que requerían del análisis de las expresiones analíticas de las figuras o del dominio de propiedades y teoremas de matemática avanzada, ahora pueden ser abordados por estudiantes de bachillerato (figura 9).

A partir de las investigaciones realizadas en ambientes de CAS, se ha encontrado

Figura 9 Figura geométrica de Cabri-3D

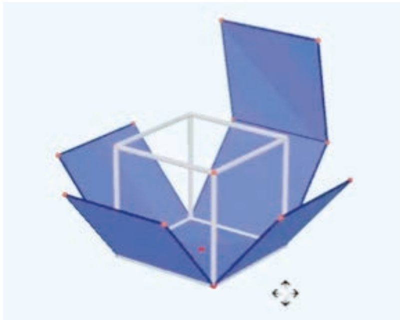
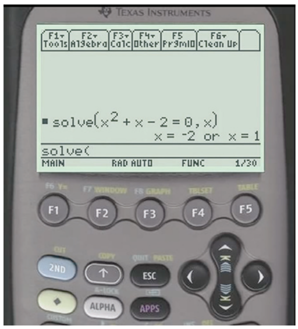


Figura 10 Pantalla de calculadora con CAS



que es posible reducir el énfasis en los aspectos manipulativos del álgebra y enfocar el trabajo de los estudiantes en tareas conceptuales (Kieran, 2007), o bien promover tanto aspectos conceptuales como técnicos de la matemática (figura 10) (Artigue, 2002; Lagrange, 2003).

- Las nuevas versiones de algunos programas especializados corren en tabletas digitales y los estudiantes pueden físicamente tocar y manipular representaciones de objetos matemáticos, lo cual permite una interacción directa entre el sujeto y el objeto de conocimiento (véase figura 6).
- Versiones recientes de las hojas de cálculo ofrecen un ambiente amigable para actividades de modelación matemática que involucran representaciones matemáticas múltiples y simuladores de fenómenos del mundo físico.
- La versión libre (*open source*) de GD GeoGebra favorece la conexión entre geometría euclidiana, geometría cartesiana y geometría analítica.

- La incorporación de soportes inteligentes en los entornos tecnológicos de aprendizaje permite una retroalimentación oportuna y focalizada en las acciones del usuario.
- La conectividad vía Internet puede influir en la forma en que las TD puedan ser integradas al currículo de matemáticas, tanto en términos de los materiales y contenidos educativos accesibles en la nube, como debido a que estudiantes y maestros pueden trabajar colaborativamente dentro de comunidades virtuales.
- La conectividad está cambiando la manera en que se diseñan las TD. Por ejemplo, GeoGebra se desarrolla colaborativamente como *software* libre dentro del movimiento '*open-source software*'.
- La forma en que la conectividad puede transformar las prácticas matemáticas en la escuela, particularmente si los estudiantes pueden usar las redes sociales para crear comunidades matemáticas de colaboración, da lugar a un área promisoria de investigación futura.
- Las posibilidades de uso de las TD para la evaluación del aprendizaje de las matemáticas abren un área nueva de investigación.
- La implementación a nivel nacional de modelos de uso de las TD para la enseñanza de las matemáticas, llevada a cabo en varios países, es un signo de aceptación más o menos amplia de la presencia de tales herramientas en el salón de clases. A diferencia de los estudios a pequeña escala centrados en el estudiante, los estudios a gran escala se enfocan en aspectos sistémicos que toman en cuenta cuestiones como la adopción de la tecnología por parte del maestro y la integración de la tecnología al currículo (Sinclair et ál., 2010, pp. 61-62).

Este breve recuento conduce de nuevo a interrogantes sobre la relación tecnología-currículo de matemáticas, la cual resulta ser cambiante en el tiempo y de una región a otra.

LA RELACIÓN TECNOLOGÍA-CURRÍCULO NO ES ESTÁTICA

A pesar de que aún persiste la controversia sobre el impacto potencial de la tecnología en el currículo de matemáticas, los estudios empíricos realizados en la última década, en los cuales se utilizó una gran variedad de *software* y aplicaciones, ya han influido de hecho en cambios curriculares a distintos niveles (Sutherland y Rojano, 2012):

- Al conectar diferentes áreas curriculares, en el mismo o en diferentes niveles escolares. Esta interconexión explota la posibilidad de trabajar con representaciones múltiples de conceptos o situaciones, vinculadas dinámicamente entre sí.
- Al permitir a los estudiantes acceso temprano a ideas poderosas en matemáticas, como por ejemplo, la posibilidad de introducir el estudio de la matemática de la variación desde la enseñanza elemental.
- Por el hecho de proporcionar herramientas a los estudiantes para analizar gran-

des conjuntos de datos auténticos en los cursos de estadística del bachillerato y la universidad.

- Al incorporar nuevos temas al currículo, como por ejemplo, temas de geometría 3D.
- Con la eliminación de temas curriculares clásicos. Tal es el caso del Reino Unido, donde se removió buena parte del álgebra manipulativa en la década de 1990. En esa propuesta curricular, la resolución de ecuaciones y problemas se realiza por ensayo y refinamiento, con ayuda de la calculadora. Cabe mencionar que tiempo después y a raíz de los resultados reportados por investigaciones sobre didáctica del álgebra, las autoridades educativas se retractaron de esa decisión y hoy en día se observa una presencia importante de temas del álgebra simbólica de papel y lápiz en el currículo inglés (Sutherland, 2007).

Pero la relación tecnología-currículo no sólo cambia en función de los avances en la investigación y en la innovación tecnológica, esta relación también cambia a lo largo del tiempo y de unos países a otros. Por ejemplo, en la URSS de la década de 1980, se consideraba a la informática como una 'Nueva Matemática' y se introdujeron metacontenidos como descubrimiento, colaboración, generalización, transferencia y matemáticas en distintas materias (Julie et ál., 2010).

Por otra parte, en varios países se ha introducido explícitamente al currículo de matemáticas el uso de programas como Logo, hojas de cálculo, CAS, GD y aplicaciones para la enseñanza de tópicos específicos. En algunos de esos países, la incorporación se ha hecho de manera obligatoria (como en Hong Kong, Francia y Rusia), mientras que en otros se ha hecho de manera opcional (como en Sudáfrica, México, Brasil y países centroamericanos) (Julie et ál., 2010).

Además de analizar la integración de las TD al currículo, es necesario profundizar en el estudio de la influencia real de la tecnología en el currículo implementado (o *enacted curriculum*). Si bien, esta problemática se ha atendido desde la perspectiva del papel del maestro en los procesos de implementación, y teóricamente se ha investigado a través de los procesos de instrumentación y orquestación en el aula, existen otros factores identificados en estudios sobre TD y educación en general. A este respecto, quiero referirme al proyecto interActive Education, en el que se identifican e investigan factores determinantes para una implementación productiva. Entre dichos factores están: la explotación de la tecnología disponible en la escuela; la relación entre el aprendizaje incidental, idiosincrásico e intencional a partir de la tecnología; la combinación compleja entre personas, cultura y tecnología en el salón de clases, y la conexión entre las culturas de uso de las TD en el hogar y en la escuela (Sutherland, Robertson y John, 2009). Uno de los desafíos para la investigación futura es poder traer este tipo de temas al campo de la educación matemática y abordarlos con las especificidades didácticas, históricas y epistemológicas propias de la materia de conocimiento (es decir, de las matemáticas).

Ahora y el futuro

De acuerdo al análisis que hace Artigue en su ponencia de la CIAEM de 2007 en México, el trabajo en entornos tecnológicos de aprendizaje que hoy en día podríamos considerar clásicos (como los programas de GD, las hojas de cálculo y los micromundos) tendrá que seguir buscando su camino hacia el aula de matemáticas (Artigue, 2007b). En vista de la desproporción tan grande entre el enorme cúmulo de evidencias sobre las potencialidades didácticas de esos entornos, reveladas durante 30 años de investigación intensiva, y su mínimo impacto en el currículo (oficial e implementado), habrá que reconocer que, en este caso, estamos ante el núcleo duro de la relación entre investigación y práctica. En ese escenario, quisiera hacer el pronóstico de que la realización de proyectos de implementación y de estudios longitudinales a gran escala (como por ejemplo, *Computer-Intensive Algebra*, Fey y Heid, 1991; *Visual Math*, Yerushalmy y Shternberg, 2001) ayudarán a tender puentes entre los mundos de la teoría, el currículo escrito y la práctica. Así lo han pronosticado también los autores del capítulo "Implementing digital technologies at a national scale", del 17th ICMI Study (Sinclair et ál., 2010), quienes afirman que en futuras investigaciones de esta naturaleza podrían encontrarse nuevos ejes que, por ejemplo, relacionen la medida en que las TD están disponibles fuera de la escuela o la medida en la cual la implementación involucra el desarrollo de la actividad, la instrumentación de parte del docente, la instrumentación de parte de los padres de familia y el soporte de la infraestructura.

Por otra parte y siguiendo de nuevo las reflexiones de Artigue (2007b), se puede hacer el pronóstico de que el acceso a materiales y contenidos en la red tenderá a cambiar sustancialmente las prácticas de maestros y alumnos en relación a la matemática escolar, aun cuando ni maestros ni alumnos utilicen los entornos tecnológicos de aprendizaje. A este respecto, esta investigadora señala que, además de lo que revelan los estudios de Gueudet y Trouche (2010) sobre la multiplicidad de los recursos en línea, actualmente en Francia, el uso riguroso y efectivo de estos materiales para la enseñanza de las matemáticas es una de las competencias que les son requeridas oficialmente a los docentes. Lo anterior nos hace reflexionar sobre el impacto tecnológico en una dirección muy diferente a la que se pronosticaba antes de la masificación de la conectividad y de las formas de interacción social que *di facto* emergen por el uso cotidiano de la tecnología, lo cual, a su vez, obliga a concebir nuevas avenidas y nuevas temáticas para investigaciones futuras, que distan mucho de aquellas que por décadas han sido el foco de atención de los investigadores de la educación matemática. Puede decirse que ahora nos encontramos ante una inversión de roles entre la investigación y sus aplicaciones, pues las prácticas sociales del uso de las TD empiezan a marcar el rumbo de la investigación y no como hasta hace muy poco tiempo, cuando a partir de la investigación se inició un movimiento para introducir la tecnología en la escuela.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (2002), "Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work", *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol. 7, pp. 245-274.

——— (2007a), "Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental", *Historia y perspectiva de la educación matemática. Memoria de la XII CIAEM*, Querétaro, pp. 9-21.

——— (2007b), "L'impact curriculaire des technologies sur l'éducation mathématique", ponencia presentada en XII CIAEM, Querétaro, México.

Assude, T., C. Buteau y H. Forgasz (2010), "Factors influencing implementation of technology-rich mathematics curriculum and practices", en C. Hoyles y J.-B. Lagrange (eds.), *Mathematics Education and Technology–Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*, Nueva York, Springer, pp. 405-419.

Bartolini Bussi, M. y A. Mariotti (2008), "Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective", en L. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 2a. ed., Nueva York, Routledge, pp. 746-783.

Chevallard, Y. (1999), "L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique" [The analysis of teaching practices in the anthropological theory of the didactic], *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, pp. 221-266.

Drijvers, P., C. Kieran y M. Mariotti (2010), "Integrating technology into mathematics education", en C. Hoyles y J.-B. Lagrange (eds.), *Mathematics Education and Technology–Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*, Nueva York, Springer, pp. 81-87.

Drijvers, P. y L. Trouche (2008), "From artifacts to instruments, a theoretical framework behind the orchestra metaphor", en M. K. Heid y G. W. Blume (eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, Cases, and Perspectives*, vol. 2, Greenwich, Information Age Publishing, pp. 363-391.

Fey, J. T. y M. K. Heid (con R. A. Good, C. Sheets, G. Blume y R. M. Zbiek) (1991/1999), *Concepts in Algebra: A Technological Approach*, Dedham, Janson (reimpreso en 1999, Chicago, Everyday Learning Corporation).

Gueudet, G. y L. Trouche (eds.) (2010), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques*, Rennes, Presses Universitaires de Rennes.

Harel, I. y S. Papert (eds.) (1991), *Constructionism*, Norwood, Ablex Publishing Corporation.

Hoyles, C. y J.-B. Lagrange (eds.) (2010), *Mathematics Education and Technology–Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*, Nueva York, Springer.

Hoyles, C. y R. Noss (1992), *Learning Mathematics and Logo*, Cambridge, MIT Press.

Hoyles, C. y R. Sutherland (1992), *Logo Mathematics in the Classroom*, edición revisada, Londres, Routledge.

Jones, K., K. Mackrell y I. Stevenson (2010), "Designing digital technologies and learning activities for different geometries", en C. Hoyles y J.-B. Lagrange (eds.), *Mathematics Education and Technology–Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*, Nueva York, Springer, pp. 47-60.

Julie, C., A. Leung, N. Chi Thanh, L. S. Posadas, A. I. Sacristán y A. Semenov (2010), "Some regional developments in access and implementation of digital technologies and ict", en C. Hoyles y J.-B. Lagrange (eds.), *Mathematics Education and Technology–Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*, Nueva York, Springer, pp. 361-383.

Kennewell, S. (2009), "Reflections on the interactive whiteboard phenomenon: a synthesis of research from the UK", KEN06138: www.ore.org.pt/filesobservatorio/pdf/KENNEWELL.pdf

Kaput, J. (1994), "Democratizing access to calculus: New routes using old roots", en A. Schoenfeld (ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving*, Hillsdale, Erlbaum.

Kieran, C. (2007), "Research on the learning and teaching of school algebra at the middle, secondary, and college level: Building meaning for symbols and their manipulation", en F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte, Information Age Publishing, pp. 707-762.

Lagrange, J.-B. (2003), "Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection", en J. T. Fey (ed.), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*, Reston, NCTM, pp. 269-283.

Lerman, S. (ed.) (2012), *Encyclopedia of Mathematics Education*, Nueva York, Springer, [www.springerreference.com]

Molyneux, S., T. Rojano, R. Sutherland y S. Ursini (1999), "Mathematical modelling: the interaction of culture and practice", *Educational Studies in Mathematics*, Special Issue Teaching and Learning Mathematics in Context, P. Boero (ed.), vol. 39, pp. 61-78.

Noss, R. y C. Hoyles (1996), *Windows on Mathematical Meanings*, Dordrecht, Kluwer.

Noss, R., C. Hoyles, M. Mavrikis, E. Geraniou, S. Gutierrez-Santos y D. Pearce (2009), "Broadening the sense of 'dynamic': a microworld to support students' mathematical generalization", en *Special Issue of ZDM – The International Journal on Mathematics Education: Transforming Mathematics Education through the Use of Dynamic Mathematics Technologies*, vol. 41, núm. 4, pp. 493-503.

Papert, S. (1980), *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*, Nueva York, Basic Books.

Rojano, T. y J.-L. Abreu (2012), "Dialogues with Prometheus: Intelligent support for teaching mathematics", en C. Kynigos, J.-E. Clayson y N. Yiannoutsou (eds.), *Proceedings of the Constructionism 2012 Conference*, Atenas, pp. 544-548.

Sinclair, N., F. Arzarello, M. Trigueros y M. Lozano (2010), "Implementing digital technologies at a national scale", en C. Hoyles y J.-B. Lagrange (eds.), *Mathematics Education and Technology–Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*, Nueva York, Springer, pp. 61-78.

Sutherland, R. (2007), *Teaching for Learning Mathematics*, Maidenhead, Open University Press.

Sutherland, R., S. Robertson y P. John (2009), *Improving Classroom Learning with* ICT, Londres y Nueva York, Routledge.
Sutherland, R. y T. Rojano (1993), "A spreadsheet approach to solving algebra problems", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 12, pp. 353-383.
——— (2012), "Technology and curricula in mathematics education", en S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, Nueva York, Springer. [www.springerreference.com]
Trigueros, M., M. Lozano, I. Sandoval, A. Lage, E. Jinich, H. García y E. Tovilla (2006), "Developing resources for teaching and learning mathematics with digital technologies in Enciclomedia, a national project", en C. Hoyles, J.-B. Lagrange, L. H. Son y N. Sinclair (eds.), *Proceedings of the Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction*, Hanoi Institute of Technology y DIDIREM - Université Paris 7, pp. 556-563.
Trouche, L. (2004), "Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations", *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol. 9, pp. 281-307.
Yerushalmy, M. y B. Shternberg (2001), "Charting a visual course to the concept of function", en A. A. Cuoco y F. R. Curcio (eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics. 2001 Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics*, Reston, NCTM, pp. 251-268.

REFERENCIAS ELECTRÓNICAS

Autograph: www.autograph-math.com
SimCalc: www.kaputcenter.umassd.edu/products/software
Diálogos Inteligentes: http://arquimedes.matem.unam.mx/Dialogos/

DATOS DE LA AUTORA

Teresa Rojano
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional, México
trojano@cinvestav.mx
www.teresarojano.net

Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas

Salvador Llinares

Resumen: Este artículo se centra en el papel que pueden desempeñar los experimentos de enseñanza y la investigación sobre el aprendizaje del profesor de matemáticas en la práctica de formar profesores. En primer lugar, se describen los fundamentos que justifican la integración de determinadas tareas profesionales en los entornos de aprendizaje que configuran los experimentos de enseñanza. En segundo lugar, se constata cómo las investigaciones han permitido identificar algunas características sobre qué y cómo aprenden los estudiantes para profesor en estos entornos de aprendizaje. Finalmente, las actividades descritas muestran la dependencia mutua entre los diferentes roles del formador de profesores de matemáticas como docente, diseñador e investigador.

Palabras clave: aprendizaje del profesor, experimentos de enseñanza, construcción del conocimiento, interacción.

Abstract: This article focuses on the role of teaching experiment in the mathematics teacher education practice and the research on teacher's learning. First, the theoretical ideas supporting the integration of the professional tasks' resolution and the specific activity system in the design of learning environments in mathematics teacher education programs are presented. Secondly, findings of the research allow identifying some features on what and how pre-service mathematics teacher learn in these learning environments. Finally, we try to show the dependence between different roles of mathematics teacher educator (practitioner, designer and researcher).

Keywords: teacher learning, teaching experiment, building of knowledge, interaction.

INVESTIGACIÓN Y PRÁCTICA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Desde hace tiempo se reconoce que el conocimiento del profesor influye en la enseñanza de las matemáticas. Considerar la complejidad del conocimiento del profesor, cómo se manifiesta en la práctica y cómo se desarrolla, ha hecho que en las últimas décadas se generaran agendas de investigación que proporcionan información sobre su naturaleza (Ponte y Chapman, 2006). La singularidad del conocimiento del profesor se manifiesta cuando se intenta explicitar las diferencias en la manera de conocer el contenido matemático por un profesor y por alguien que no es profesor. Ball, Thames y Phelps

Fecha de recepción: 16 de agosto de 2013; fecha de aceptación: 4 de noviembre de 2013.

(2008) hicieron esta distinción al diferenciar el conocimiento matemático especializado del conocimiento matemático común. Para estos autores, el conocimiento matemático especializado es el que permite desenvolverse en los contextos de enseñanza y resolver las tareas específicas de enseñar matemáticas; mientras que el conocimiento matemático común es el que permite a un ciudadano competente resolver un problema de matemáticas. Esta distinción, aunque difícil de establecer en algunos momentos, pone el énfasis en la enseñanza de las matemáticas como una práctica para caracterizar el conocimiento necesario para realizarla de manera competente. Es decir, en la caracterización del conocimiento especializado se subrayan la relación del conocimiento con los contextos y las tareas en las que es pertinente usarlo. Así, de esta manera, Ball y sus colegas se refieren al conocimiento matemático especializado como un conocimiento de matemáticas que es único en la realización de las tareas que articulan la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, formas de presentar las ideas matemáticas a diferentes tipos de alumnos, identificar la potencialidad de las ideas matemáticas en una tarea, reconocer y dotar de sentido a métodos alternativos de resolución de los problemas, ser capaz de anticipar diferentes maneras de pensar sobre las matemáticas reconociendo errores comunes y planteamientos alternativos.

Esta manera de caracterizar el conocimiento de matemáticas para la enseñanza pone de relieve la importancia de los contextos de uso del conocimiento y las tareas profesionales que lo definen y, en particular, la manera en la que el conocimiento permite al profesor realizar con competencia una determinada práctica. Vincular los dominios de conocimiento del profesor (Ball, Thames y Phelps, 2008) a los contextos de uso (las tareas profesionales) en las reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento matemático necesario para la enseñanza ha favorecido la emergencia de cuestiones sobre el aprendizaje del profesor y sobre las características de las tareas y los ambientes de aprendizaje en los programas de formación (Tirosh y Wood, 2008; Penalva, Escudero y Barba, 2006; Sánchez y García, 2008, 2009). El contexto en el que se han realizado estas reflexiones durante los últimos años ha permitido evidenciar el papel relevante que desempeña la reflexión del formador de profesores cuando intenta responder a cuestiones tales como: ¿cuál es el conocimiento del profesor?/¿qué es lo que debe aprender alguien que quiera ser profesor de matemáticas?, ¿cómo se aprende este conocimiento? y ¿qué contextos y qué tipo de tareas favorecen su aprendizaje? La manera en la que el formador de profesores da respuesta a estas cuestiones en su propia práctica ha puesto de manifiesto, de manera explícita, los vínculos entre la investigación y la práctica (García, Sánchez y Escudero, 2006).

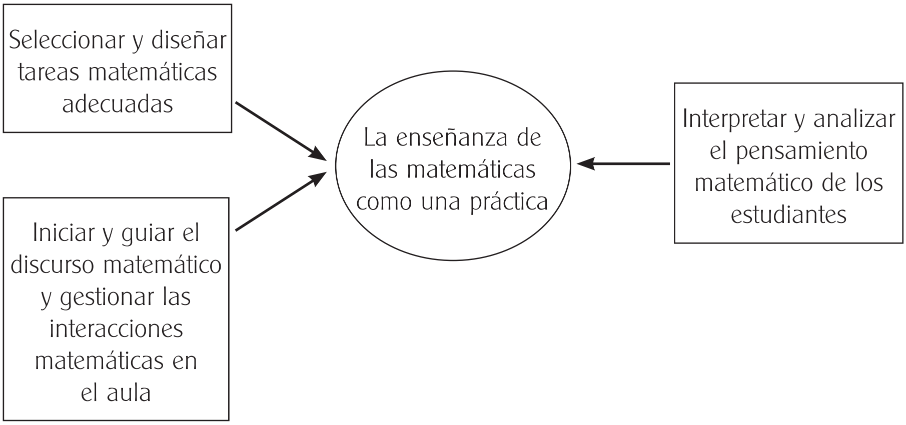
La reflexión de los formadores de profesores sobre la relación entre la práctica y la investigación es un mecanismo que les permite realizar una inmersión consciente en el mundo de su experiencia, con sus valores, interacciones e intereses políticos y sociales que permite justificar y orientar la acción (García et ál., 2006). En estos casos, la reflexión del formador sobre su propia práctica le permite evidenciar el conocimiento acumulado en la investigación y la práctica, estableciendo una relación clara entre estos dos dominios de su actividad profesional. Lo que se enfatiza en este aspecto de la labor del formador de profesores es el hecho de que trabajar juntos sobre un problema identificado en la práctica genera nuevo conocimiento y posibilita ampliar las bases teóricas iniciales que permiten redefinir los problemas de la propia práctica.

A partir de aquí, el diseño de entornos de aprendizaje en los programas de formación, la elección de tareas y actividades y la manera en que deberían ser justificados se convierten en una tarea ineludible para el formador (Carrillo y Climent, 2009; Penalva, Escudero y Barba, 2006; Sánchez y García, 2009; Tirosh y Wood, 2008). Algunas de las labores profesionales del profesor de matemáticas son elegir, diseñar y secuenciar tareas matemáticamente relevantes para el aprendizaje de sus alumnos; interpretar y dotar de sentido a las respuestas que producen los aprendices al resolver problemas, reconociendo diferentes niveles de desarrollo en su aprendizaje, y gestionar las situaciones de aula con énfasis particular en el papel del discurso matemático que se puede generar como punto de apoyo del aprendizaje pretendido (figura 1). La hipótesis sobre la que se apoya esta manera de actuar es que configurar los entornos de aprendizaje a través de tareas profesionales permite a los estudiantes para profesor dotar de significado a los conceptos e ideas y desarrollar formas de razonar vinculadas al proceso de resolución de las tareas relacionadas con la práctica de enseñar matemáticas.

La manera en la que los formadores plantean su práctica, en particular al analizar lo que sucede en los entornos de aprendizaje diseñados, permite generar cuestiones sobre cómo los estudiantes para profesor aprenden y qué aspectos de los entornos de aprendizaje parecen limitar o potenciar el aprendizaje pretendido. Intentar responder estas cuestiones nos introduce en el ámbito de la investigación centrada en el aprendizaje del profesor en los contextos institucionales, como son los programas de formación (Cáceres, Chamoso y Azcárate, 2010; Chamoso, Cáceres y Azcárate, 2012; Llinares y Krainer, 2006). De este modo se evidencia cómo la práctica de formar profesores define problemas de investigación. Así, el vínculo entre práctica e investigación se completa cuando los formadores retroalimentan las decisiones en su práctica a partir del nuevo conocimiento generado por la investigación. Esta relación dialéctica entre la investigación sobre cómo los profesores aprenden y la formación de profesores en contextos institucionales viene mediada por la perspectiva teórica sobre el aprendizaje que los formadores adoptan. En particular, la adopción de perspectivas sobre el aprendizaje conlleva plantearse la manera en que las tareas profesionales que articulan la práctica del profesor pueden convertirse en contextos para el aprendizaje de los que quieren ser profesores (García, Sánchez, Escudero y Llinares, 2006) y de qué forma estas mismas referencias teóricas nos ayudan a comprender el desarrollo de los propios formadores de profesores.

El proceso de reflexión del formador de profesores de matemáticas sobre su práctica permite identificar aspectos que configuran una agenda de investigación sobre cómo los profesores aprenden. Además, permite mostrar cómo un proceso de reflexión sobre la relación entre la teoría y la práctica conduce a los formadores de profesores a aprender (García et ál., 2006) y subrayar el papel que debe desempeñar la teoría en su toma de

Figura 1 Sistemas de actividad que articulan la enseñanza de las matemáticas como una práctica (Llinares, Valls y Roig, 2008, p. 62)



decisiones (Lerman, 2001). Este planteamiento permite definir dos aspectos relevantes que han permeabilizado la investigación y la práctica de formar profesores en los últimos años. Estos aspectos serán descritos en la próxima sección y constituyen una manera de entender cómo la reflexión sobre la práctica permite definir diferentes ámbitos de investigación sobre cómo los profesores aprenden, y cómo el conocimiento generado influye en conceptualizar la propia práctica del formador de profesores (García, Sánchez, Escudero y Llinares, 2006).

DE LA REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA DEL FORMADOR A LA GENERACIÓN DE AGENDAS DE INVESTIGACIÓN SOBRE CÓMO LOS PROFESORES APRENDEN

Los experimentos de enseñanza constituyen el contexto en el que la práctica de formar profesores y la investigación sobre el aprendizaje del profesor se interrelacionan (Callejo, Valls y Llinares, 2007; Cobb et ál., 2003). Durante los últimos años, diferentes grupos de formadores de profesores e investigadores han estado aportando nuevo conocimiento sobre la manera en la que los estudiantes para profesor aprenden el conocimiento que se considera relevante para enseñar matemáticas (Contreras y Blanco, 2002; Penalva, Escudero y Barba, 2006). Con el fin de proporcionar un contexto para la identificación de los principios que fundamentan las decisiones tomadas en el ámbito del diseño de los experimentos de enseñanza en la formación de profesores, me apoyaré en algunas de las investigaciones que hemos realizado en nuestro grupo de investigación en los últimos años. Estas investigaciones se han desarrollado mediante la realización de experimentos de enseñanza en diferentes ámbitos de la formación de profesores de matemáticas y asesores en educación matemática. Uno de los objetivos en la realización de estos experimentos era identificar principios que nos permitieran relacionar el diseño de entornos de aprendizaje con la comprensión del proceso de aprendizaje de los estudiantes para profesor.

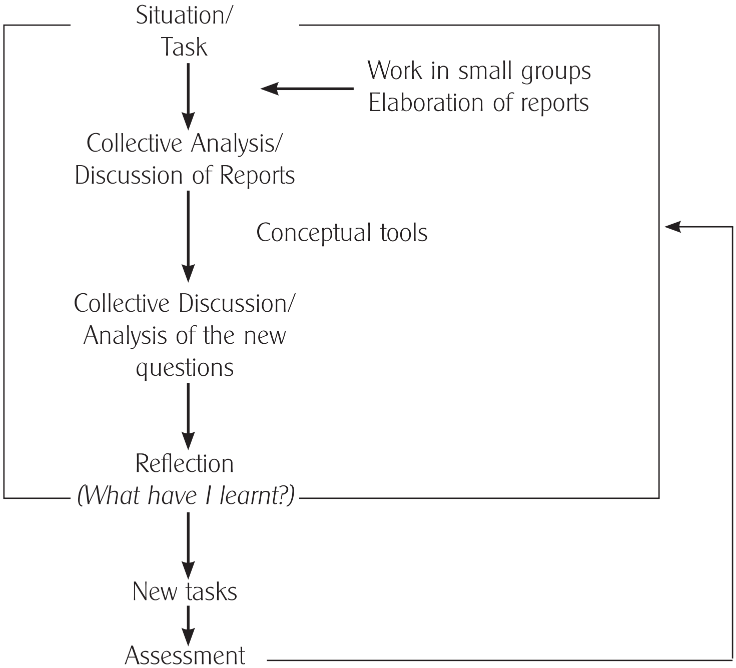
Diseños de experimentos de enseñanza: principios teóricos y desarrollo

Las referencias derivadas de considerar una teoría sobre el aprendizaje en la toma de decisiones para diseñar entornos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas introdujeron cuestiones relativas a la manera en la que se deben considerar los artefactos de la práctica de enseñar matemáticas: casos, ejemplos de producciones de los estudiantes, videos de secuencia de enseñanza, ejemplos de actividades matemáticamente relevantes, contexto de uso de los recursos didácticos, etc. Uno de los puntos a los que se intenta dar respuesta es cómo los programas de formación pueden ayudar a que los estudiantes para profesor empiecen a razonar como expertos en los diferentes aspectos de la enseñanza de las matemáticas. La hipótesis que subyace a este planteamiento es que esta competencia se desarrolla paulatinamente a lo largo de la vida profesional del profesor, pero puede empezar en los contextos de formación inicial.

Los intentos para proporcionar respuestas a esta cuestión definen las acciones realizadas: en primer lugar, en relación a la manera en la que se podrían diseñar oportunidades en los programas de formación para que los estudiantes pudieran empezar a desarrollar una mirada estructurada sobre la enseñanza (Mason, 2002; Sherin, Jacobs y Philipp, 2010), como un aspecto de su competencia docente. En segundo lugar, cómo considerar la interacción entre los participantes como un mecanismo que facilitara la construcción del conocimiento y cómo llegar a dar cuenta de diferentes niveles de desarrollo de las competencias docentes (consideradas como el uso pertinente del conocimiento para resolver tareas profesionales) (Llinares y Valls, 2009, 2010; Sánchez, García y Escudero, 2013). De esta manera, el diseño de entornos de aprendizaje intenta tener en cuenta cómo apoyar el aprendizaje de los estudiantes para profesor considerando la organización de las actividades del aula (resolución de tareas profesionales para el profesor) y la naturaleza del discurso (interacción entre los participantes) (García et ál., 2006).

Por ejemplo, la figura 2 describe la estructura de un entorno de aprendizaje (trayectoria de enseñanza-aprendizaje) diseñada y evaluada en una intervención en un programa de formación de maestros. Esta estructura permite a los estudiantes para maestro discutir, compartir e intentar resolver problemas profesionales, como el análisis de libros de texto, para decidir sobre una opción de planificación de una secuencia de enseñanza de la resolución de problemas a alumnos de educación primaria. Esta estructura da la posibilidad de que los estudiantes para maestro empiecen a conocer y tomar parte en tareas profesionales (aquí, el análisis de libros de texto considerados como materiales y recursos didácticos) (García et ál., 2006). La idea del profesor formando parte de una comunidad de práctica viene reflejada en este planteamiento mediante la creación de ambientes que favorecen la interacción entre los estudiantes para maestro cuando están resolviendo las

Figura 2 Trayectoria de enseñanza-aprendizaje que estructura un entorno de aprendizaje en la formación de profesores (García et ál., 2006, p. 113)



tareas profesionales y refleja el concepto de "persona-en-práctica" (Lave y Wenger, 1991).

Estos dos últimos aspectos, el conocimiento vinculado a la resolución de tareas profesionales y el papel de la interacción entre iguales para resolver la tarea, son los que dieron forma a los diferentes temas de investigación que han articulado nuestro trabajo durante los últimos años (Llinares, 2012).

Resolución de tareas profesionales

Los principios que rigen estas actuaciones reconocen que el conocimiento necesario para enseñar matemáticas se genera vinculado a la resolución de tareas profesionales (Llinares, Valls y Roig, 2008). En esta concepción de los ambientes de aprendizaje en la formación de profesores, el conocimiento teórico, cuyo uso es pertinente para la resolución de las tareas profesionales, tiene el significado de "instrumento". Es decir, los instrumentos conceptuales son las ideas teóricas generadas por la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas que permiten comprender y actuar en las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Nuestro objetivo como formadores de profesores actuando como diseñadores de entornos de aprendizaje es apoyar la introducción de los estudiantes en la resolución de tareas profesionales mediante la generación paulatina de maneras de razonar como un profesor experto. En cada caso se considera un rango amplio de tareas profesionales: análisis de actividades que configuran una lección de matemáticas (Llinares, 2013), análisis de las producciones escritas de los alumnos cuando resuelven problemas (Fernández, Llinares y Valls, 2013; Llinares, 2013) y análisis del discurso matemático en secuencias de enseñanza (Roig, Llinares y Penalva, 2011). La resolución de estas tareas profesionales permite a los estudiantes para profesor iniciar el desarrollo de la competencia docente –entendida como uso pertinente del conocimiento para resolver las tareas profesionales– con diferentes niveles de sofisticación. Los resultados de estas investigaciones indican que aprender a usar el conocimiento en la resolución de diferentes tareas profesionales es progresivo, lo que permite identificar niveles de desarrollo.

Organización y actividades: entornos de aprendizaje como sistemas de actividad

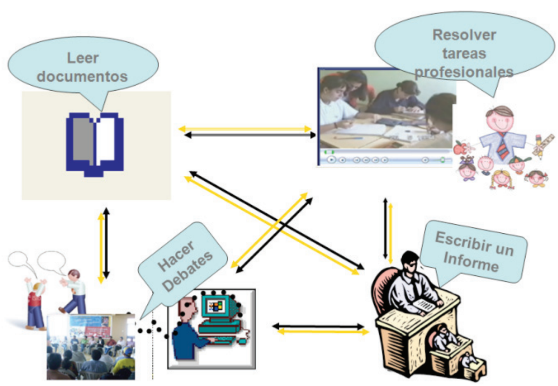
El otro principio teórico en los entornos de aprendizaje diseñados es la relación entre el discurso (la interacción) y los procesos de construcción del conocimiento del profesor. Esta idea se apoya en la consideración del aprendizaje desde tres puntos de vista: como identidad (proceso de llegar a ser), como práctica (hacer) y como significado (experiencia) (Llinares y Olivero, 2008). El principio teórico que rige nuestras acciones cuando diseñamos entornos de aprendizaje desde esta perspectiva es que la construcción del conocimiento en contextos colaborativos se basa en que los estudiantes para profesor se implican en actividades con un discurso específico (Sánchez, García y Escudero, 2013). Una hipótesis vinculada a este principio es que la naturaleza de la participación y el contenido del discurso ayudan a la construcción del conocimiento (Llinares, 2012). Para ello, nosotros vemos las interacciones sociales en las clases como mecanismos que podrían apoyar el desarrollo progresivo del uso del conocimiento en la resolución de la tarea. Aquí, conjeturamos que las interacciones generadas a partir de un conflicto entre las interpretaciones podrían convertirse en oportunidades para el aprendizaje, ya que posibilitarían reconducir la manera de resolver las situaciones al intentar manejar las interpretaciones alternativas (Roig, Llinares y Penalva, 2011; Penalva, Rey y Llinares, 2011, 2013). Como consecuencia, la estructura de los entornos de aprendizaje (figura 2) implica en algún momento trabajar en pequeños grupos, compartir las alternativas de resolución generadas y elaborar un discurso compartido sobre sus interpretaciones y soluciones. Esta idea determina que en los entornos de aprendizaje los estudiantes para profesor –considerados como aprendices– deben tener la oportunidad, durante la resolución de las tareas profesionales, de establecer puntos de atención alrededor de los cuales se pueda organizar la negociación de los significados, y deben poder generar una comprensión recíproca de las situaciones de enseñanza de las matemáticas mediante procesos como observar, describir, representar e interpretar (Llinares, 2002).

En este contexto, la experiencia previa de los estudiantes desempeña el papel de referencia cognitiva para dotar de sentido a la tarea profesional (como por ejemplo, analizar el discurso matemático que se genera en una clase de matemáticas, o analizar secuencias de tareas en lecciones centradas en la resolución de problemas) (Cos y Valls, 2006), mientras que el conocimiento teórico puede llegar a desempeñar el papel de instrumento conceptual, ya que la información teórica proporciona a los estudiantes un esquema de referencia y un "lenguaje" para compartir con los demás en los intentos de dotar de sentido a los registros de la práctica que dan soporte a la tarea profesional planteada (Llinares y Olivero, 2008).

Recientemente, el desarrollo de las tecnologías de la comunicación ha permitido incorporar en la formación de profesores espacios que apoyan el desarrollo de diferentes formas de discurso que se vinculan a la construcción del conocimiento. La figura 3 describe la estructura metodológica de un tipo de entornos de aprendizaje en programas de formación de profesores de matemáticas que usan los recursos tecnológicos –por ejemplo, debates *online* y plataformas multimedia que incorporan videos como registros de la práctica– como instrumentos para favorecer la interacción. Este sistema de actividades ha sido validado en diferentes investigaciones, aportando información sobre el proceso de construcción del conocimiento en diferentes ámbitos (Fernández, Llinares y Valls, 2012, 2013; Llinares y Valls, 2009, 2010; Penalva, Rey y Llinares, 2011, 2013; Prieto y Valls, 2010).

Las nuevas tecnologías y determinadas características institucionales en las que se desarrolla cada iniciativa de formación de profesores han permitido que en ocasiones puedan desarrollarse experimentos de enseñanza apoyados en la complementariedad entre las actividades presenciales y las actividades *online*. Éste fue el caso particular de los entornos diseñados en un contexto de formación de asesores de educación

Figura 3 Organización de las actividades en un entorno de aprendizaje articulado a través de la idea de sistema de actividad



matemática con un foco específico en las actividades de diagnosticar e intervenir ante dificultades de aprendizaje de las matemáticas en alumnos de primaria (Penalva, Rey y Llinares, 2011, 2013). La figura 4 describe la estructura de este tipo de entornos en los que las sesiones en línea se intercalaban con las sesiones presenciales como una manera de ampliar los contextos para favorecer la interacción de los participantes mientras interpretaban los registros de la práctica que tenían la forma de casos.

De manera particular, el uso de registros de la práctica como material de apoyo en el diseño de los entornos de aprendizaje promueve que los estudiantes para profesor puedan llegar a considerar relevante el problema profesional planteado favoreciendo su implicación cognitiva. Por ejemplo, en un entorno de aprendizaje diseñado para propiciar el desarrollo de la competencia docente "mirar de manera profesional" el aprendizaje matemático de los alumnos y centrarlo en el razonamiento proporcional (Fernández, Llinares y Valls, 2012, 2013), la integración de actividades presenciales y actividades en línea en forma de debates, así como el uso de registros de la práctica (muestras de respuestas de alumnos a problemas de proporcionalidad) favorecieron la implicación de los estudiantes para profesor al intentar interpretar dichas respuestas consideradas como maneras de entender el razonamiento proporcional. La estructura que adoptó el entorno de aprendizaje intentaba fomentar el que los estudiantes para profesor se implicaran en los procesos de interpretar el pensamiento matemático de los niños. Las actividades instruccionales planteadas consistían en comparar conjuntos de respuestas de alumnos a determinados tipos de problemas proporcionales y no proporcionales. A través de diferentes sesiones (figura 5), se creaban oportunidades para el análisis, interpretación y comparación de las variables en los problemas de proporcionalidad y cómo influían en la manera en la que los alumnos respondían. La idea que justifica

Figura 4 Estructura *b-learning* de la secuencia de actividades diseñada (Ei (*i* = 1, 2, 3, 4, 5, 6) en contextos de interacción presenciales y en línea (Penalva, Rey y Llinares, 2013)

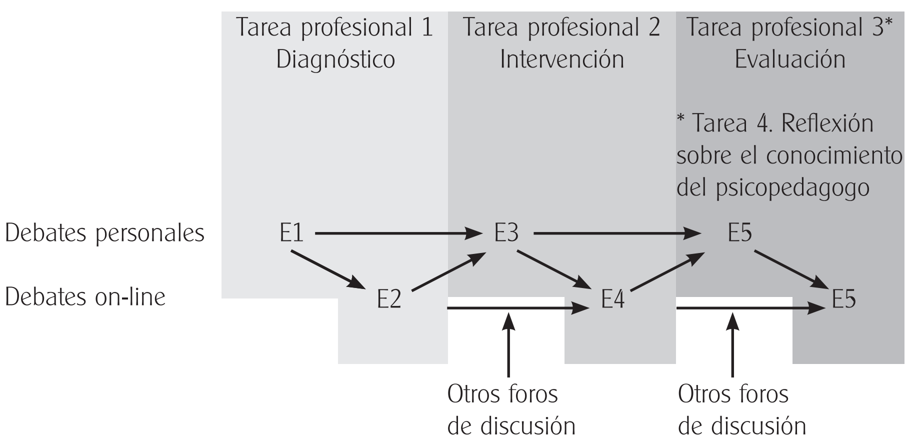
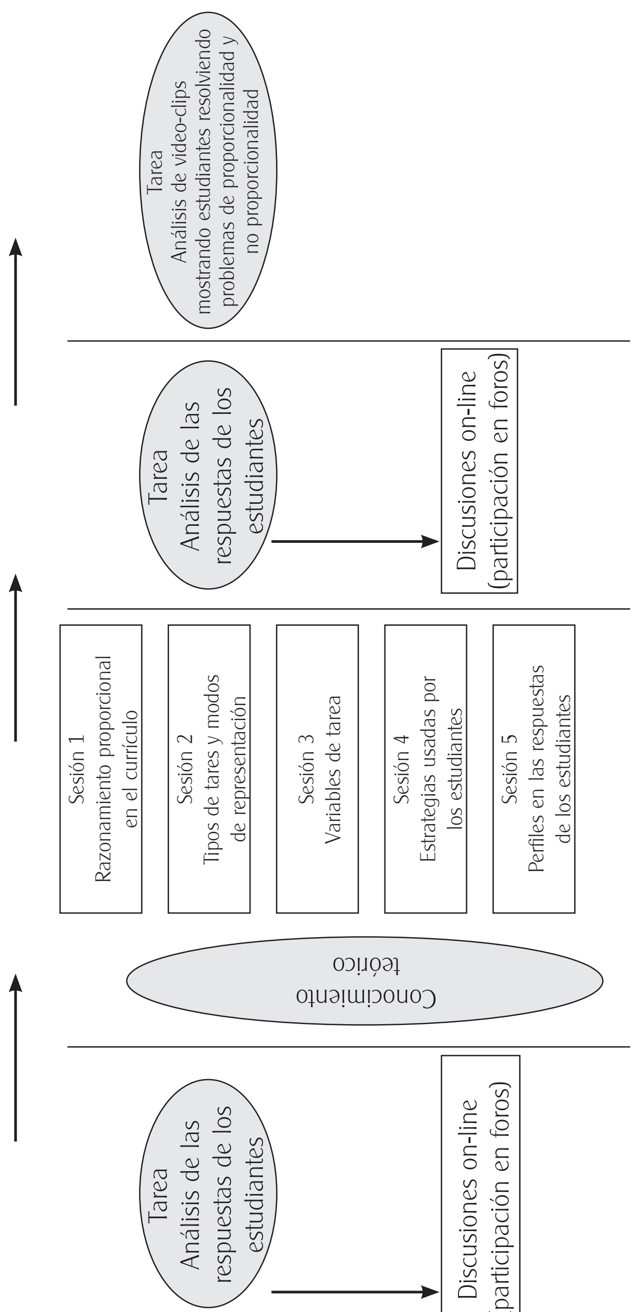


Figura 5 Estructura de un entorno de aprendizaje considerado sistema de actividades (Fernández, Llinares y Valls, 2012)



esta manera de organizar las tareas en el entorno de aprendizaje es que asumimos que la participación en los debates y discusiones colectivas permite que las actividades cognitivas de identificar lo que puede ser relevante en las respuestas de los alumnos e interpretarlo desde la perspectiva del aprendizaje matemático puedan llegar a formar parte de la manera de razonar del profesor.

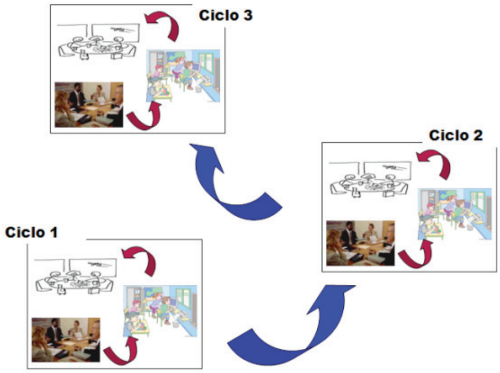
Intentar que los estudiantes para profesor generen formas de pensar como profesores expertos (aunque en un contexto de formación inicial asumimos que lo que se genera es el inicio en llegar a pensar como un experto) ha sido una idea transversal en la actividad de diseñar los entornos de aprendizaje. Las evidencias de que los estudiantes para profesor empiecen a razonar como expertos son las diferentes maneras de resolver las tareas profesionales que se ponen de manifiesto. Sin embargo, los resultados que hemos obtenido en diferentes experimentos indican que conseguir este objetivo no es una tarea fácil. El proceso de aprendizaje del estudiante para profesor y, en particular, la generación de formas de pensar como un experto mediante el uso de las ideas procedentes de la didáctica de la matemática como instrumentos conceptuales, se muestran como un asunto complejo y en el que intervienen diferentes variables (institucionales, personales e incluso sociales, según como se estructura el grupo). Por ejemplo, en función de la carga de trabajo de los estudiantes para profesor vinculada a las otras materias que deben cursar en el programa de formación.

Identificando variables explicativas del aprendizaje

El análisis retrospectivo de estos experimentos de enseñanza tiene como objetivo identificar principios explicativos del aprendizaje producido que nos permitan desarrollar modelos para comprender mejor el aprendizaje de los estudiantes para maestro. Por esta razón, el énfasis se centra en el análisis del proceso de construcción del conocimiento de los estudiantes en ciclos sucesivos de experimentos de enseñanza en diferentes momentos (figura 6), más que en proponer diseños instruccionales específicos. Así, en los informes de investigación damos prioridad a la identificación de variables que asumimos tienen poder explicativo respecto al aprendizaje del estudiante para profesor en relación a la interacción entre lo social y la construcción personal del conocimiento. En la identificación de estas variables, que pueden permitirnos desarrollar un esquema interpretativo, se intenta considerar los principios teóricos sobre el aprendizaje que han organizado y determinado las decisiones en el diseño de los entornos de aprendizaje. Los experimentos de enseñanza se pueden considerar, en este contexto, una manifestación de la relación entre los roles de diseñador, investigador y docente del formador de profesores.

Esta manera de entender el diseño de experimentos de enseñanza (los entornos de aprendizaje en el programa de formación) nos ha permitido que paulatinamente fuéramos más conscientes de la necesidad de apoyar las decisiones del diseño en aspectos cada vez más concretos de la manera en la que los estudiantes para profesor

Figura 6 Ciclos de diseño-experimentación-análisis de los experimentos de enseñanza



están aprendiendo. Es por lo que hemos empezado a introducir la idea de "trayectoria de aprendizaje" del estudiante para profesor como punto central en el proceso de diseño (Sánchez-Matamoros et ál., 2013). La idea que emerge es que los entornos de aprendizaje deben ser vistos como contextos en los que es posible apoyar el desarrollo progresivo de la competencia docente, favoreciendo el que paulatinamente los estudiantes para profesor empiecen a razonar como profesores expertos.

Algunas ideas sobre cómo los estudiantes para profesor aprenden

Dirigir la atención a la identificación de evidencias de cómo los estudiantes para profesor integraban los hechos relevantes de didáctica de la matemática en la manera en que interpretaban los diferentes registros de la práctica, hizo que miráramos con detalle las características del discurso generado. El supuesto teórico sobre el que se apoya esta decisión es que asumíamos que la construcción del conocimiento en contextos colaborativos se basa en que los aprendices se implican en actividades discursivas específicas y que la naturaleza de la participación y el contenido de este discurso están vinculados a la construcción del conocimiento. Esta situación genera la pregunta de cómo los modos de participación en estos contextos diseñados de manera específica median los procesos de significación (Llinares y Valls, 2009, 2010). La perspectiva adoptada subraya el hecho de que los procesos de implicación cognitiva se dan en el contexto de interacción mientras se está resolviendo algún tipo de tarea con significación para los participantes. Esta implicación cognitiva se evidencia a través de las diferentes formas que adopta el diálogo en el que las interpretaciones son refinadas, contrastadas o rechazadas. En particular, consideramos dos aspectos, el contenido del discurso y la forma que adoptaba el discurso –la interacción–, y que podía tener alguna influencia en el aprendizaje (Llinares, 2012).

Interacción

El papel dado a la interacción en el diseño de los entornos de aprendizaje se apoya en la propuesta de Wells (2002) en el sentido de que compartir, cuestionar y revisar opiniones puede conducir a una mejor comprensión de los participantes sobre lo que se está analizando. Un aspecto clave en esta idea es que los textos del discurso permiten a los estudiantes para profesor trabajar colaborativamente en los intentos de generar algún tipo de comprensión compartida. Esta hipótesis plantea cuestiones relativas a la forma que debe adoptar la interacción y el discurso para que realmente produzca el desarrollo del uso del conocimiento por parte de los estudiantes para profesor (Llinares, 2012; Sánchez, García y Escudero, 2013). Aunque los entornos de aprendizaje se diseñan considerando estas hipótesis teóricas, el análisis de lo sucedido nos ha permitido identificar algunas características de la interacción que favorecen el proceso de construcción del conocimiento y del desarrollo de la capacidad de mirar de manera profesional las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

En el caso particular de los entornos de aprendizaje que integraban actividades presenciales y en línea, los contextos de interacción se definían en los espacios dedicados a los debates en línea. En este contexto particular, tres características de la interacción pueden considerarse relevantes para el aprendizaje generado (Roig, Llinares y Penalva, 2011; Penalva, Rey y Llinares, 2011, 2013). En primer lugar, cuando los estudiantes para profesor deben identificar claramente las evidencias sobre las que se apoyan sus interpretaciones (refinar las garantías propuestas para apoyar los argumentos). En este caso, la interacción proporciona el contexto para que los estudiantes para profesor puedan aportar los apoyos a sus interpretaciones con el fin de intentar generar una compresión compartida. En segundo lugar, cuestionar las conclusiones aportadas (por ejemplo, la interpretación dada a algunas partes de un segmento de enseñanza). Aquí, la discusión sobre cómo se debe establecer una interpretación de algún aspecto de la enseñanza-aprendizaje permite a los estudiantes para profesor identificar los elementos relevantes y establecer relaciones para dotar de sentido a algunos aspectos de las producciones de los alumnos. Ésta podría ser la situación en la que los estudiantes para profesor, que están intentando identificar el grado de comprensión que tiene un alumno de la idea de proporcionalidad, pueden poner en relación las respuestas de dos alumnos al mismo problema para apoyar su interpretación en las diferencias identificadas en las respuestas (Fernández, Llinares y Valls, 2012). Finalmente, cuando se pone en duda la conclusión presentada por algún compañero mediante refutaciones, éstas generan interacciones con un mayor nivel de reflexión entre los estudiantes para profesor, ya que permiten clarificar y argumentar distintos puntos de vista (Penalva, Rey y Llinares, 2011).

Los entornos de aprendizaje diseñados y analizados como experimentos de enseñanza nos han indicado que cuando los estudiantes para profesor se implican con la tarea propuesta, los intercambios en los debates proporcionan la oportunidad de identificar y refinar las interpretaciones que constituyen la resolución de la tarea profesional.

Sin embargo, la identificación de lo que puede ser relevante y su interpretación desde la perspectiva del aprendizaje matemático pretendido no son acciones fáciles para los estudiantes para profesor, aunque la interacción ayudó a algunos a generar argumentos con un nivel cognitivo cada vez mayor (Llinares y Valls, 2009, 2010; Llinares, 2012).

Niveles de desarrollo en las competencias docentes

La investigación sobre el aprendizaje de los estudiantes para profesor y, en particular, sobre la manera en que se generan formas de pensar como un experto está proporcionando información en ámbitos particulares que empieza a constituir un corpus de conocimiento que nos ayuda a comprender mejor estos procesos. Las evidencias del inicio en los estudiantes para profesor de formas de pensar como un experto proceden de la manera en la que resuelven tareas profesionales (análisis del aprendizaje, análisis del discurso matemático en el aula, análisis de actividades matemáticas, etc.). Estas características permiten definir niveles de desarrollo sobre cómo los estudiantes para profesor usan el conocimiento de didáctica de las matemáticas en las situaciones que deben resolver (figura 7). En cierto sentido, las características de estos niveles de desarrollo son una manera de dar cuenta del proceso de instrumentalización de la información procedente de la didáctica de la matemática en la resolución de problemas profesionales; en particular, la manera en la que las ideas teóricas se integran en el discurso generado por los estudiantes para profesor cuando están participando en los entornos de aprendizaje.

Las características genéricas iniciales que definen estos niveles se particularizan en cada dominio matemático. Como consecuencia, podemos empezar a describir cómo los estudiantes para profesor progresan y, por tanto, cómo se comportan para llegar a niveles más altos de desarrollo (Sánchez-Matamoros et ál., 2013; Zapatera y Callejo, 2013a; 2013b). Los resultados de estas investigaciones nos permiten tener información sobre qué es lo que están aprendiendo y cómo sucede este aprendizaje.

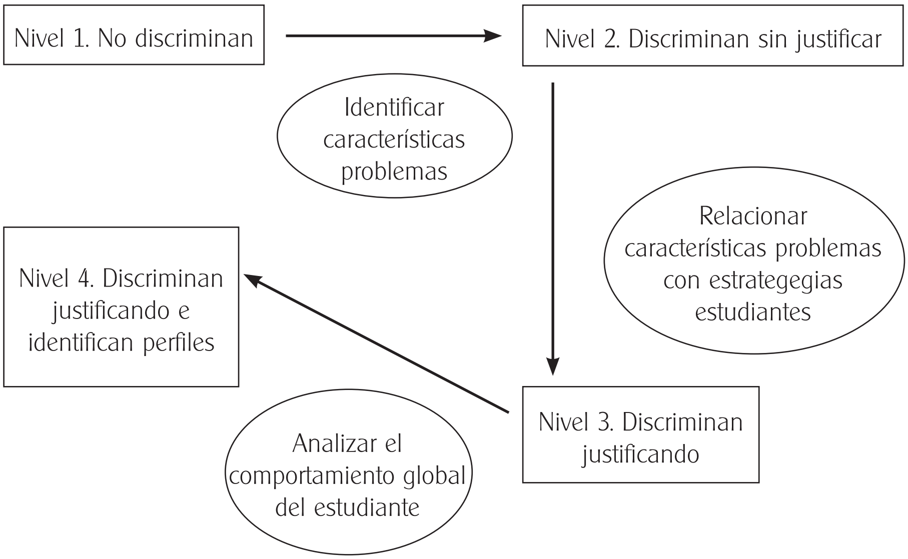
Por ejemplo, identificamos diferentes niveles de desarrollo en un entorno de aprendizaje diseñado para que los estudiantes para profesor empezaran a aprender a identificar las características del desarrollo del razonamiento proporcional a partir del análisis de las respuestas dadas por los alumnos a problemas proporcionales y no proporcionales (Fernández, Llinares y Valls, 2012, 2013). Estos niveles venían definidos a partir de la manera en la que los estudiantes para profesor identificaban las diferentes variables de tareas en los problemas proporcionales y no proporcionales, cómo interpretaban las respuestas de cada alumno considerando estas variables de tarea y cómo eran capaces de reconocer y justificar diferentes niveles de desarrollo del razonamiento proporcional en los alumnos. Los análisis permitieron generar cuatro niveles que aportaron información sobre el proceso de desarrollo de esta competencia docente (figura 8).

Figura 7 Características de los niveles de desarrollo de las competencias docentes (Llinares y Valls, 2009)

Niveles	**Caracterización**
N1. Descriptivo	El estudiante responde describiendo de manera "natural" lo que ve, sin utilizar aquellas ideas de la teoría que son necesarias y relevantes para analizar la situación.
N2. Retórico	Uso de ideas teóricas de los documentos para construir un discurso, sin establecer relaciones entre estas ideas o de ellas con la situación. Se podría decir que falta cohesión en el discurso.
N3. Identificación e inicio de un uso instrumental de la información	Identifica uno o varios aspectos relevantes de la situación y los interpreta utilizando ideas teóricas y los relaciona o no entre ellos.
N4. Teorizar-conceptualizar. Intergración relacional	La información teórica se transforma en herramienta conceptual. Las herramientas conceptuales se identifican y se usan integrándolas para dar una respuesta a la tarea.

Lo que estos análisis están mostrando de manera general es que los niveles de desarrollo de la competencia docente de los estudiantes para profesor están vinculados a la capacidad para reconocer en las situaciones de enseñanza-aprendizaje los elementos que son matemáticamente relevantes para el aprendizaje. Esto subraya el papel que desempeña el conocimiento matemático de los estudiantes para profesor en la realización de estas tareas, pero también la manera en que el conocimiento sobre cómo los alumnos comprenden los tópicos matemáticos se integra en los procesos de razonamiento de los estudiantes para profesor. En particular, en el entorno de aprendizaje que estamos usando como ejemplo, se mostró que inicialmente los estudiantes para profesor describían las respuestas de los alumnos sin incluir lo que matemáticamente podía ser relevante. Ellos simplemente describían las operaciones que los alumnos habían realizado para resolver el problema, lo que significa que no eran capaces de reconocer la comprensión matemática de los alumnos. Sin embargo, la realización de las tareas planificadas en el entorno de aprendizaje, junto con la participación en las discusiones presenciales y en línea, favoreció el que algunos estudiantes para profesor empezaran a tener una mirada más estructurada sobre estas situaciones (Mason, 2002), lo que les permitía poder identificar diferentes perfiles en los alumnos a partir de las respuestas dadas a los problemas. Algunos de los mecanismos –formas de participar en los debates– que propiciaban este desarrollo han sido descritos en la sección anterior. La exigencia de la participación en las discusiones para aportar argumentos de apoyo a las decisiones tomadas fue un factor que ayudaba a los estudiantes para

Figura 8 Progresión en los niveles de desarrollo de la competencia docente "mirar de manera profesional" el pensamiento matemático de los estudiantes en el ámbito del razonamiento proporcional (Fernández, Llinares y Valls, 2013)



profesor a progresar en el desarrollo de "mirar de manera profesional" el pensamiento matemático de los estudiantes. En particular cuando la interacción se generaba entre estudiantes para profesor con diferentes niveles de desarrollo.

La información reunida sobre lo que los estudiantes para profesor aprenden toma la forma de características de diferentes niveles de desarrollo en diferentes ámbitos. Esta información procede de diferentes dominios matemáticos como el análisis del discurso matemático en el aula (Roig, Llinares y Penalva, 2011), el desarrollo del razonamiento proporcional (Fernández, Llinares y Valls, 2012, 2013), el reconocimiento de la comprensión de los procesos de generalización en los estudiantes de primaria (Zapatera y Callejo, 2013), la manera de reconocer evidencias de la comprensión de la derivada (Sánchez-Matamoros et ál., 2013) y el significado que se adscribe a las actividades de probar (Torregrosa-Gironés et ál., 2010). Las características del desarrollo de la competencia docente "mirar de manera profesional" las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas están inicialmente vinculadas a los dominios matemáticos particulares considerados. Sin embargo, una característica común de los resultados que dan forma a los niveles de desarrollo de la capacidad de reconocer lo relevante –en las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas– por parte de los estudiantes para profesor es la necesaria integración de la comprensión matemática y del conocimiento sobre cómo los estudiantes comprenden los tópicos matemáticos. Estos resultados indican que el conocimiento matemático del estudiante para profesor es necesario pero no suficiente para el desarrollo de esta competencia.

ALGUNAS OBSERVACIONES FINALES: DIFERENTES ROLES DEL FORMADOR DE PROFESORES

Después de casi una década de implicarnos en el desarrollo de experimentos de enseñanza y realizar investigación sobre cómo los estudiantes para profesor aprenden, hemos podido observar que las tareas que deben ser resueltas (tareas profesionales) y el contexto que apoya la interacción están fuertemente interrelacionados.

Por otra parte, las actividades descritas muestran la dependencia mutua entre tres diferentes roles del formador de profesores: *a)* el formador de profesores desde una perspectiva práctica en la que desarrolla su actividad ayudando a los estudiantes para profesor a que inicien el desarrollo de las competencias docentes, como aprender a "mirar de manera profesional" la enseñanza de las matemáticas; *b)* el formador de profesores como diseñador de experimentos de enseñanza en los que se asume una determinada manera de entender cómo se produce el aprendizaje de los estudiantes para profesor, y *c)* el formador de profesores como investigador de las maneras en que aprenden sus alumnos (los estudiantes para profesor). Estos tres roles se evidencian cuando consideramos la reflexión del formador de profesores sobre su propia práctica.

Una consecuencia de nuestra experiencia en diseñar y refinar secuencias de actividades y contextos en diferentes entornos de aprendizaje es que debemos intentar llegar a comprender mejor la interrelación entre el aprendizaje individual y la dimensión social. Esta relación entre lo personal y lo social ha resultado compleja. En estos momentos podemos decir que conocemos algunos matices de esta relación en el aprendizaje del estudiante para profesor, pero estamos bastante lejos de poder proporcionar una explicación de este fenómeno didáctico. Sin embargo, la actividad realizada durante estos años aporta información que nos muestra la diversidad con la que los estudiantes para profesor de matemáticas empiezan a desarrollar su competencia docente. En particular, la información relativa a cómo caracterizar los niveles de desarrollo de aspectos particulares de la competencia docente debe ser entendida como puntos de referencia para generar conjeturas sobre el desarrollo de trayectorias de aprendizaje de los estudiantes para profesor. Estas conjeturas proporcionan referencias para determinar grados de desarrollo de la competencia en ámbitos específicos y, por tanto, poder determinar la eficacia de la intervención. Como indicábamos con anterioridad, es posible empezar a considerar trayectorias de aprendizaje de los estudiantes para profesor en ámbitos específicos cuando se vuelva a diseñar nuevos entornos de aprendizaje.

Por otra parte, desde un punto de vista pragmático, los experimentos de enseñanza realizados y los diseños de los entornos de aprendizaje proporcionan recursos que pueden ser adaptados por los formadores de profesores para apoyar el aprendizaje de los estudiantes para profesor; en particular, considerando la necesidad de desarrollar aspectos relativos al "uso del conocimiento" en la resolución de tareas profesionales. Desde este punto de vista, esta aproximación intentaría superar la dicotomía existente entre teoría y práctica. Considerar la idea del "uso del conocimiento" en la resolución de problemas profesionales para el profesor de matemáticas, según ha sido ejemplificado en los entornos de aprendizaje diseñados, permite pensar que los estudiantes para profesor pueden estar desarrollando destrezas que les permitan seguir aprendiendo a partir de la reflexión sobre su enseñanza.

La línea de investigación desarrollada durante los últimos años, siguiendo los principios descritos en este trabajo, está aportando información relevante sobre el aprendizaje de los estudiantes para profesor de matemáticas. Sin embargo, son necesarias nuevas investigaciones que nos ayuden a comprender mejor dichos procesos de aprendizaje, al mismo tiempo que permitan generar nuevos entornos de aprendizaje y materiales científicamente testados para mejorar la formación de los profesores de matemáticas.

RECONOCIMIENTOS

Esta investigación ha recibido el apoyo de los proyectos I+D+i, EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D. L., M. H. Thames y G. Phelps (2008), "Content knowledge for teaching: What makes it special?", *Journal of Teacher Education*, vol. 59, núm. 5, pp. 389-407.

Cáceres, M. J., J. M. Chamoso y P. Azcárate (2010), "Analysis of the revisions that pre-service teachers of mathematics make of their own project included in their learning portfolio", *Teaching and Teacher Education*, vol. 26, núm. 5, pp. 1186-1195.

Callejo, M. L, J. Valls y S. Llinares (2007), "Interacción y análisis de la enseñanza. Aspectos claves en la construcción del conocimiento profesional", *Investigación en la escuela*, núm. 61, pp. 5-21.

Carrillo, J. y N. Climent (2009), "From professional tasks in collaborative environments to educational tasks in mathematics teacher education", en B. Clarke, B. Grevholm, y R. Millman (eds.), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education: Purpose, Use and Exemplars*, Nueva York/Dordrecht, Springer, pp. 215-234.

Chamoso, J. M., M. J. Cáceres y P. Azcárate (2012), "Reflection on the teaching-learning process in the initial training of teachers. Characterization of the issues on which pre-service mathematics teachers reflect", *Teaching and Teacher Education*, vol. 28, núm. 2, pp. 154-164.

Cobb, P., J. Confrey, A. diSessa, R. Lehrer y L. Schauble (2003), "Design experiments in educational research", *Educational Researcher*, vol. 32, núm. 1, pp. 9-13.

Contreras, L. C. y L. Blanco (2002), *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas. Una mirada a la práctica docente*, Cáceres, UNEX.

Cos, A. y J. Valls (2006), "Debates virtuales y concepciones de estudiantes para maestro sobre resolución de problemas", *Zetetiké*, vol. 14, núm. 25, pp. 7-28.

Fernández, C., S. Llinares y J. Valls (2012), "Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions", *ZDM. Mathematics Education*, vol. 44, pp. 747-759.

——— (2013), "Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving", *The Mathematics Enthusiast*, vol. 10, núms. 1 y 2, pp. 441-468.

García, M., V. Sánchez e I. Escudero (2006), "Learning through reflection in mathematics teacher education", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 64, pp. 1-17.

García, M., V. Sánchez, I. Escudero y S. Llinares (2006), "The dialectic relationship between research and practice in mathematics teacher education", *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 9, pp. 109-128.

Lave, J. y E. Wenger (1991), *Situated Learning. Legitimate Peripheral Participation*, Nueva York, Cambridge University Press.

Lerman, S. (2001), "A review of research perspectives on mathematics teacher education", en F. Lin y T. Cooney (eds.), *Making Sense of Mathematics Teacher Education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 33-52.

——— (2002), "Participation and reification in learning to teach: the role of knowledge and beliefs", en G. Leder, E. Pehkonen, G. Törner (eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers/Springer, pp. 195-209.

Llinares, S. (2009), "Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación", *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*, núm. 51, pp. 92-101.

——— (2012), "Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos *b-learning*", *Avances de Investigación en Educación Matemática*, vol. 1, núm. 2, pp. 53-70.

——— (2013), "El desarrollo de la competencia docente 'mirar profesionalmente' la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas", en C. Mindal y E. Guérios (eds.), *Educar em Revista. Temas em Debate na Formação de Professores*, Curitiba, Universidade Federal do Paraná, núm 50, pp. 117-133.

——— (2013), "Professional noticing: A component of the mathematics teachers' profesional practice", *Sisyphus – Journal of Education*, vol. 1, núm. 3, pp. 76-93.

Llinares, S. y C. Fernández (2012), "Formación de profesores de matemáticas. Relación entre teorías sobre el aprendizaje del profesor y diseño de entornos de aprendizaje", en A. C. da Silva, M. Carvalho y R. G. do Rêgo (eds.), *Ensinar matemática: Formação, investigação e práticas docentes*, Cuiabá, Editora da Universidade Federal de Mato Grosso, pp. 15-47.

Llinares, S. y K. Krainer (2006), "Mathematics (student) teachers and teachers educators as learners", en A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, Rotterdam/Taipei, Sense Publishers, pp. 429-460.

Llinares, S. y F. Olivero (2008), "Virtual communities and networks of prospective mathematics teachers. Technologies, interactions and new forms of discourse", en K. Krainer y T. Wood (eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education, Volume 3. Participants in Mathematics Teacher Education: Individuals, Teams, Communities and Networks*, Rotterdam, Sense Publishers, pp. 155-180.

Llinares, S. y J. Valls (2009), "The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: Interaction and online video cases studies", *Instructional Science*, vol. 37, pp. 247-271.

——— (2010), "Prospective primary mathematics teachers' learning from online discussions in a virtual video-based environment", *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 13, pp. 177-196.

Llinares, S., J. Valls y A. I. Roig (2008), "Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas", *Educación Matemática*, vol. 20, núm. 3, pp. 59-82.

Mason, J. (2002), *Researching your own practice: The discipline of noticing*, Londres, Routledge-Falmer.

Penalva, M. C., I. Escudero y D. Barba (2006), *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de matemáticas. Construyendo comunidades de práctica*, Granada, Grupo Proyecto Sur.

Penalva, M. C., C. Rey y S. Llinares (2011), "Identidad y aprendizaje de estudiantes de psicopedagogía. Análisis en un contexto *b-learning* en didáctica de la matemática", *Revista Española de Pedagogía*, núm. 248, pp. 101-118.

——— (2013), "Aprendiendo a interpretar el aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. Características en un contexto *b-learning*", *Educación Matemática*, vol. 25, núm. 1, pp. 7-34.

Ponte, J. P. y O. Chapman (2006), "Mathematics teachers' knowledge and practice", en A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, Rotterdam/Taipei, Sense Publishers, pp. 461-494.

Prieto, J. L. y J. Valls (2010), "Aprendizaje de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva en estudiantes para maestro", *Educación Matemática*, vol. 22, núm. 1, pp. 57-85.

Roig, A. I., S. Llinares y M. C. Penalva (2011), "Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno en línea", *Educación Matemática*, vol. 23, núm. 3, pp. 39-65.

Sánchez, V., y M. García (2008), "What to teach and how to teach it: Dilemmas in primary mathematics teacher education", en B. Jaworski y T. Wood (eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education, Volume 4: The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*, Rotterdam, Sense Publishers, pp. 281-297.

Sánchez, V., y M. García (2009), "Tasks for primary student teachers: A task of mathematics teacher educators", en B. Clarke, B. Grevholm y R. Millman (eds.), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education: Purpose, Use and Exemplars*, Nueva York/Dordrecht, Springer, pp. 37-49.

Sánchez, V., M. García e I. Escudero (2013), "An analytical framework for analyzing student teachers' verbal interaction in learning situations", *Instructional Science*, vol. 41, núm. 2, pp. 247-269.

Sánchez-Matamoros, G., C. Fernández, S. Llinares y J. Valls (2013), "El desarrollo de la competencia de estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria en identificar la comprensión de la derivada en estudiantes de bachillerato", en A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII*, Bilbao, SEIEM, pp. 501-509.

Sherin, M. G., V. R. Jacobs y R. A. Philipp (eds.) (2010), *Mathematics Teacher Noticing: Seeing Through Teachers' Eyes*, Nueva York, Routledge.

Tirosh, D. y T. Wood (eds.) (2008), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education, Volume 2: Tools and Processes in Mathematics Teacher Education*, Taiwan/Rotterdam, Sense Publishers.

Torregrosa-Gironés, G., M. J. Haro, M. C. Penalva y S. Llinares (2010), "Concepciones del profesor sobre la prueba y software dinámico. Desarrollo en un entorno virtual de aprendizaje", *Revista de Educación*, núm. 352, pp. 379-404.

Wells, G. (2002), *Dialogic Inquiry. Towards a Sociocultural Practice and Theory of Education*, 2a. ed., Cambridge, Cambridge University Press.

Zapatera, A. y M. L. Callejo (2013a), "Pre-service primary teachers' noticing of students' generalization problems", en A. M. Lindmeier y A. Heinze (eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 4, Kiel, PME, pp. 425-432.

Zapatera, A. y M. L. Callejo (2013b), "Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización", en A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII*, Bilbao, SEIEM, pp. 535-544.

DATOS DEL AUTOR

Salvador Llinares
Departamento de Innovación y Formación Didáctica,
Universidad de Alicante, España
sllinares@ua.es

Del saber *de* la experiencia al saber *en* la experiencia: 25 años de investigación sobre saberes matemáticos y escolarización tardía en México

Alicia Ávila

Resumen: En este artículo se presenta un panorama de las investigaciones realizadas en México acerca del saber matemático producto de la experiencia y sus vinculaciones con el saber matemático escolar. Las fuentes de información son los trabajos publicados en revistas de investigación o de educación de adultos, así como algunas tesis de doctorado sobre el tema. El análisis de los trabajos permitió definir diversas vertientes de investigación y mostrar la evolución del objeto de estudio, la cual se traduce en un ensanchamiento y complejización, necesariamente acompañados de la incorporación o abandono de herramientas de recolección de información y de análisis de los datos.

Palabras clave: saberes matemáticos *de* la experiencia, saberes matemáticos *en* la experiencia, saber matemático escolar, sistemas de educación básica tardía, metodologías de investigación.

Abstract: This article presents a review of research conducted and published in Mexico about the mathematical knowledge of the experience and its links with the school mathematical knowledge. Information sources are the papers published in research or adult education journals and doctoral theses on the topic identified. Various aspects of research defined the object of study is shown, which results in its enlargement and complexity. This enlargement and complexity are necessarily accompanied by the inclusion or neglect of data collection tools and analysis data.

Keywords: mathematical knowledge *from* experience, mathematical knowledge *in* the experience, school mathematical knowledge, basic education for adult persons, research methodology.

1. INTRODUCCIÓN

En la región latinoamericana, el interés por los saberes matemáticos construidos en la vida se hizo evidente en la década de 1980. En esa década, y en el marco constituido por: *a)* las declaraciones de la UNESCO (Persépolis, 1975), que destacaban el hecho de que "los adultos no escolarizados no son unos ignorantes", y *b)* los estudios socio-culturales que cuestionaban la identidad entre reprobar en la escuela y no saber (Carraher

Fecha de recepción: 15 de septiembre de 2013; fecha de aceptación: 20 de diciembre de 2013.

y Schliemman, 1982, cit. por Carraher, 2001), se iniciaron las investigaciones acerca del *saber matemático* de los no escolarizados. Estas personas –supimos desde entonces– resuelven los problemas matemáticos que su contexto cercano les presenta y, al hacerlo, construyen conocimientos que les son útiles en la vida cotidiana.

A continuación se expone un panorama de la investigación realizada en México, los últimos 25 años, en torno a los saberes matemáticos no escolares –los *saberes* producidos *en la experiencia*– y su vinculación con los saberes escolares que las personas intentan aprender con el incentivo de "saber lo que los otros saben", los que han ido a la escuela y participan en mejores condiciones en la sociedad. Se identifican las vertientes de investigación constituidas en este periodo, las cuales se vinculan a diversos marcos conceptuales: desde la clara influencia piagetiana en los orígenes, hasta las praxeologías chevallardianas o la cognición situada que sustentan los trabajos de los últimos años.

El escrito constituye una revisión de un campo que hoy, renovado, parece interesarse más por las condiciones de producción de los saberes no escolares que por la educación matemática escolar de los jóvenes y adultos que no asistieron a la escuela en la infancia (en adelante, escolarización tardía). La revisión se basa en las publicaciones identificadas en revistas de investigación y de educación de adultos, así como en tesis de doctorado y algunos libros que abordaron el tema durante el periodo mencionado. También los recuentos denominados "estados del conocimiento", que ya por tres décadas hemos elaborado en el Consejo Mexicano de Investigación Educativa, fueron útiles para la realización del trabajo, pues éstos contenían en sí revisiones exploratorias de las investigaciones motivo del escrito. Sólo a manera de contraste o complementación, referiré trabajos realizados fuera de México.

Las vertientes de investigación que identifiqué en esta revisión son cinco y las expondré a lo largo del escrito. Por ahora sólo adelanto que, en mi interpretación, el campo se inició sobre la base de *estudios en torno a los saberes* ***de*** *la experiencia,* donde ***de*** indica origen o procedencia, así como naturaleza y cualidad, y su evolución ha desembocado en el interés por los *saberes matemáticos* ***en*** *la experiencia*, así, a secas, donde ***en*** enfatiza el lugar, tiempo y modo en que los saberes se realizan.

Las vertientes identificadas, *grosso modo,* corresponden a periodos de tiempo; en ciertas épocas se advierte predominancia de alguna, mientras que en otras, ciertos acercamientos se ven caer en desuso. Expondré cada vertiente en el orden cronológico en que su predominancia tuvo lugar.

2. LOS SABERES DE LA EXPERIENCIA

En la década de 1990, época en que comenzaron a publicarse en México trabajos sobre el tema, éste fue un ámbito de escaso interés para el conjunto de los investigadores. No obstante, los hallazgos de ese entonces fueron de gran relevancia. Por ejemplo, en un trabajo de mi autoría (Ávila, 1990), se mostró la capacidad de los analfabetos para resolver problemas aritméticos, así como las estrategias de cálculo que utilizan para solucionarlos. El estudio se realizó con base en entrevistas clínicas a un grupo de personas habitantes de zonas urbanas, quienes mostraron tener habilidades importantes para resolver los problemas, aunque desarrolladas en distintos grados, dependiendo esto de las exigencias de su entorno cotidiano. Los datos hicieron evidente que quienes necesitan resolver con exactitud cálculos diversos y variados (como es el caso de algunos comerciantes) tienen una capacidad de cálculo mayor que la mostrada por quienes no enfrentan tales exigencias.

Aquélla era una época en que ni el Internet ni el correo electrónico formaban parte de nuestro entorno, por lo que la comunicación de los hallazgos debía esperar a que el papel hiciera largas, lentas y hasta azarosas travesías. Los resultados recién mencionados –sabría yo después– coincidían con los reportados por G. Mariño (s/f), en Colombia, en esa misma época. También de manera coincidente con este investigador, identifiqué el manejo del dinero y el intercambio comercial como las fuentes principales en el desarrollo de las habilidades de cálculo, así como regularidades importantes en las formas de resolución de los problemas. Para los de suma, por ejemplo, identificamos como estrategia recurrente la constituida por la secuencia siguiente:

a. descomposición decimal de los números involucrados;
b. suma de las cifras que representan los agrupamientos de mayor valor relativo (... centenas);
c. suma, en orden decreciente, de las cifras restantes (...decenas y unidades);
d. suma de las sumas parciales para obtener la suma global;
e. interpretación del resultado (Ávila, 1990; Mariño, s/f).

Respecto de la multiplicación, se identificó la operatividad mediante duplicaciones sucesivas como estrategia dominante para calcular, a la manera de los antiguos egipcios.

El estudio que comento (Ávila, 1990) también dejó ver que las estrategias de cálculo evolucionan e incluso se sustituyen por otras más sintéticas o eficientes, dependiendo esto de la diversidad de las experiencias y las exigencias de exactitud que las personas enfrentan en su entorno. Al igual que con la suma, quien tiene experiencias más diversas realiza cálculos multiplicativos más complejos recurriendo a las aproximaciones, el redondeo y las compensaciones. Así lo hacía, por ejemplo, quien llevaba cuentas importantes como miembro de una cooperativa de artesanos, valiéndose de la memoria o de registros personales en el papel.

Las investigaciones centradas en la resolución de problemas aritméticos fueron útiles para destacar, además de las habilidades de cálculo de los no escolarizados, otras cuestiones: *a)* que dichas habilidades son diferenciadas, conforme al entorno social y económico de las personas, y *b)* que el significado y la flexibilidad inherentes al cálculo no escolar contrastan con la rigidez y pobreza de sentido que acompaña al cálculo que comúnmente se enseña en las escuelas de adultos, cuestión enfatizada por G. Mariño en algunos de sus trabajos (por ejemplo, en Mariño, 1997).

Posteriormente, abordamos el saber vinculado a las fracciones que se construye y utiliza en las prácticas cotidianas; mostramos los contextos en que dicho saber se desarrolla e identificamos sus alcances y sus límites, de nuevo sobre la base de entrevistas a personas con escasa o ninguna escolaridad (Ávila, 2006).[1] Destaca en tal estudio que el conocimiento sobre estos números –en tanto que sistema relacional que implica orden y equivalencia– se limita al manejo de los medios, los cuartos y los *medios cuartos*, expresión elaborada en la cotidianeidad para referirse a lo que en la matemática convencional se denomina *octavos*. Identificamos aquí que la fuente principal de estos conocimientos son las prácticas de medición del peso y, en menor medida, de la capacidad. Es en los mercados, en las tiendas de abarrotes y, en general, al comprar o vender productos que se miden, donde se desarrollan estos conocimientos.

Nuestro estudio reportó también algo que en aquel entonces no dejó de sorprendernos: los saberes producidos al medir el peso y la capacidad no se trasladan automáticamente a la medición de longitudes con el metro. Un número importante de personas respondía correctamente nuestras preguntas vinculadas a la medición con el kilo y con el litro, y al solicitarles respuestas a cuestiones similares con el metro, bastantes de entre ellas hacían comentarios del tipo: "No, yo no he pensado en cuartos de metro", o incluso preguntaban: "¿Se puede decir cuartos de metro?" (Ávila, 2006, p. 26).

Por otro lado, constatamos que las situaciones de partición y reparto cuyo resultado pudiera expresarse en términos de una fracción (esto es, mediante una relación cuantitativa entre la parte y el todo) tienen poca relevancia como fuente de saberes sobre las fracciones y como espacio de su aplicación. Observamos escasa práctica de repartir equitativa y exhaustivamente productos alimenticios naturalmente divisibles (como gelatinas y pasteles) y un desinterés importante en saber qué parte de lo repartido, en términos de relación parte-todo, corresponde a los participantes en un reparto. En cambio, en las respuestas dadas se reflejaba un interés importante por saber el peso del alimento que se obtendría como resultado del reparto. Las preocupaciones expresadas en tal sentido durante la realización de las tareas que propusimos derivaban de un interés práctico: saber "cuánto (en kilos o gramos) le va a tocar a cada quien", sin importar la relación de esta cantidad con el todo repartido.

Por último, en este estudio comenzamos a vislumbrar otra cuestión reportada recurrentemente en estudios posteriores: la asistencia al servicio educativo no es factor relevante en la generación de conocimientos sobre este tipo de números (cf. Ávila, 2006).

En los estudios hasta aquí comentados, los saberes no escolares no fueron identificados ni estudiados mediante observación de la actividad cotidiana. Estos estudios –con clara influencia piagetiana– trataban de identificar aquello que las personas sabían y de

[1] Esta publicación se apoyó en el estudio inédito de A. Ávila (coord.), J. L. Cortina, L. Nakamura y V. Salgado (1994), *Concepciones sobre las fracciones, los decimales y la proporcionalidad de adultos no alfabetizados o de escasa escolaridad,* México, INEA.

reconocer las estrategias con las cuales resolvían los problemas que se les planteaban. Estos problemas –supuestamente análogos a los que se enfrentan en la vida– eran hasta cierto punto artificiales y se presentaban en situación de entrevista (aunque con frecuencia en el lugar de trabajo o en los puestos callejeros donde los entrevistados ponían a la venta algunos alimentos u otros artículos).

Para realizar los interrogatorios, se introducían incluso objetos –como *monedas* y *billetes* o semillas– no sólo como ayuda para obtener las soluciones, sino como recurso para identificar la lógica subyacente cuando las estrategias no eran verbalizadas o las personas no sabían explicarlas. Se usó esta forma de indagación porque la fuente principal de información sobre los saberes no escolares eran las personas en su interacción con las situaciones que se les planteaban y las respuestas y explicaciones que ofrecían al entrevistador.

Los resultados de estos trabajos constituyeron nuestra primera noticia acerca de la existencia de la matemática no escolar, y los encontramos sorprendentes. Sin embargo, posteriormente este acercamiento se mostró insuficiente y se generó desinterés hacia él por parte de los investigadores. En un claro viraje, éstos empezaron a considerar a las personas en tanto que asistentes al servicio de escolarización tardía y en su relación con los saberes matemáticos escolares que ahí buscaban aprender. Yo misma fui parte de este cambio.

Así, después de un periodo de no difundirse trabajos sobre el tema, comenzó a estudiarse la relación *saberes escolares-saberes no escolares*. Las preguntas que ahora se planteaban eran del tipo: ¿qué aporta la escolaridad al saber matemático de las personas?, ¿qué tanto se refleja en él lo que ofrecen los sistemas de escolarización tardía?, ¿ese saber se utiliza al resolver problemas no escolares? En este tipo de trabajos, si bien el interrogatorio al estilo de Piaget mantuvo su vigencia como instrumento de indagación, la interacción con el "sujeto aislado" frente a una tarea ya no bastó y los interrogatorios se ajustaron para hacer reflejar con más determinación la influencia de la historia escolar en los saberes matemáticos de las personas. Un aporte derivado de todos estos trabajos, probablemente no planeado, lo constituyó el reconocimiento de que el contexto (la actividad que se realiza cotidianamente) es un generador importante de saberes matemáticos.

3. RELACIONES ENTRE EL SABER *DE* LA EXPERIENCIA Y EL SABER ESCOLAR

Diversas investigaciones se desarrollaron con el fin de analizar las relaciones entre estos dos tipos de saberes. La mayoría tomó como tema los saberes matemáticos desarrollados en la vida, y qué tanto y de qué manera la educación formal aporta elementos y estrategias para enfrentar más eficientemente las situaciones que los implican. Las relaciones identificadas entre los dos tipos de saberes se revelaron complejas y, además, específicas, en función de la rama de las matemáticas de que se tratase. Hay saberes que parecen desarrollarse muy escasamente entre las personas con poca escolaridad, como los necesarios para leer e interpretar tablas y gráficas con información estadística, o los que permiten calcular áreas de lados rectos. Otros, en cambio, como los implicados en problemas con las cuatro operaciones aritméticas o de proporcionalidad directa, tienen un despliegue importante, resultado de la acción cotidiana.

3.1. Aportes de la escolaridad al saber matemático de las personas

En esta línea de indagación, Eudave (2009) exploró la habilidad de jóvenes y adultos que asisten al servicio de educación básica (primaria y secundaria) para leer e interpretar información estadística presentada de manera gráfica y numérica. Eudave utilizó en su indagación una tabla y una gráfica que referían al número de nacimientos en dos entidades de México durante un cierto periodo (véase el Anexo). Las habilidades para interpretar este tipo de información se desarrollan en el módulo *Información y Gráficas* que forma parte del currículum de la Educación Básica para Jóvenes y Adultos y que varios de los entrevistados en el estudio habían cursado. Pero el supuesto era que las habilidades necesarias para interpretar las informaciones también podrían desarrollarse de manera informal, en virtud del encuentro frecuente con este tipo de información en el registro civil, las clínicas de salud, los hospitales o los transportes públicos, espacios donde el gobierno difunde, mediante carteles, información estadística de diversa índole.

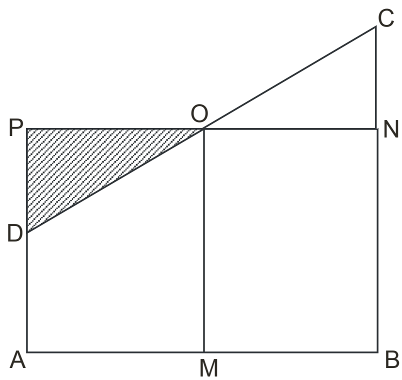
El análisis de las respuestas realizado por Eudave, con base en los niveles de Curcio, muestra que muy pocas personas hacen una lectura completa y adecuada de la tabla de frecuencias y de la gráfica de líneas identificando además las tendencias marcadas en las mismas. Junto con personas que no pueden leer ninguna de las dos representaciones, la mayoría se ubica en una posición intermedia entre no entender nada y lograr una lectura completa: "Son personas que pueden leer literalmente la información, incluso establecer algunas relaciones entre las informaciones, pero que no pueden identificar las tendencias, es decir, leer más allá de los datos" (Eudave, 2009, p. 29). De este modo, aunque la tendencia en la tasa de nacimientos era claramente decreciente en el caso de una de las entidades implicadas en el problema, hubo quienes señalaron una tendencia ascendente con base en razones externas a la tabla, por ejemplo, porque "se casa mucha gente", o "las parejas 'no se cuidan'"[2] (cf. Eudave, 2009, p. 21).

Probablemente, señala Eudave, la carencia de los conocimientos numéricos previos necesarios para interpretar las gráficas y la falta de comprensión de los convencionalismos implicados, vuelve inaccesible la información que se proporciona en las modalidades trabajadas.

En otro estudio desarrollado paralelamente al de Eudave (Estrada y Ávila, 2009), encontramos también que la escolaridad tardía aporta poco a la capacidad de resolver ciertos problemas que implican cálculo de áreas. Específicamente, planteamos un pro-

[2] Con la expresión "no se cuidan", las personas de la región se refieren a que no llevan algún método de control de la natalidad.

blema donde debía calcularse el área de un trapecio rectángulo situado en contexto de construcción.[3] Se puso de manifiesto que los procedimientos escolares incluidos en los libros de escolarización tardía no se integran de manera funcional al saber de las personas, es el caso de la segmentación del trapecio en un cuadrado y un triángulo rectángulo, estrategia que sería útil para resolver el problema que planteamos. En cambio, ciertas actividades laborales, principalmente las vinculadas a la construcción, proporcionan experiencias que permiten construir soluciones para este tipo de problemas. Así, por ejemplo, una estrategia reportada originalmente por De Agüero (2006) para resolver este tipo de problemas, la identificamos también en nuestro estudio, puesto que fue utilizada por un albañil y un "marmolero". Esta estrategia, conocida por quienes se dedican a actividades vinculadas a la construcción, es utilizada cuando se calcula el área de un muro limitado por una losa inclinada y la hemos llamado "estrategia de los pintores".[4] De Agüero explica gráficamente el problema y la estrategia de solución de la manera siguiente:



Sea la figura original el trapecio ABCD. Al trazar una línea PN paralela a la base AB, sobre el punto medio O de la línea oblicua DC y de la propia base, es posible observar dos triángulos rectángulos (DPO y ONC), opuestos por el vértice y, por consecuencia, congruentes. Al descartar visualmente el triángulo superior derecho (ONC) y trasladarlo para construir el triángulo DPO, podemos apreciar el rectángulo ABNP con base AB y altura MO, el cual es equivalente en área al trapecio original. Es decir, el triángulo ONC es compensado por el triángulo DPO. Por lo que en todo trapecio rectángulo: al multi-

[3] El problema planteado a las personas fue calcular –con base en una fotografía y la representación geométrica correspondiente– los metros cuadrados que deberían cobrarse por pintar una pared con forma de trapecio rectángulo, puesto que el techo era inclinado; las medidas de los lados, necesarias para calcular el área, eran 3, 4 y 5 metros.

[4] Método empleado por una cuadrilla de pintores de la Ciudad de México para calcular áreas (detallado en De Agüero, 2006, p. 231).

plicar el lado opuesto a la línea oblicua por la altura media, se obtiene el valor de su área (De Agüero, 2006, p. 319).

Este teorema en acto[5] se sustenta en la certeza de que hay una equivalencia de áreas compensadas: "Al tomar la medida en el punto medio del muro, se da por sentado que los triángulos rectángulos que se definen son congruentes y, por tanto, tienen la misma área" (De Agüero, 2006, p. 319).

Una relación entre saberes escolares y no escolares similar a las recién comentadas se identificó en torno a la proporcionalidad (Ávila, 2009). En su mayoría, las personas que cursan tardíamente la primaria o la secundaria no utilizan las herramientas escolares –como por ejemplo, la regla de tres o la búsqueda del valor unitario– para resolver problemas de proporcionalidad, ni aun cuando los procedimientos espontáneos se vuelven engorrosos y dejan de ser eficaces. Nuevamente es el ámbito laboral el que se muestra como promotor eficaz de la capacidad de resolución de cierto tipo de problemas. En efecto, cuando el ámbito comercial –específicamente el de venta de productos que se pesan para fijar los precios proporcionalmente al peso– es también ámbito laboral, se trasmiten y se aprenden estrategias para actuar adecuada y eficientemente, es decir, de modo que se puedan hacer rápidamente las cuentas sin equivocarse. Este es el papel que parece cumplir la "regla de tres situada", que se enseña a quienes ahí trabajan y que consiste en:

> Multiplicar el peso del producto solicitado por el precio del kilo del mismo, para luego colocar el punto decimal en el lugar que los indicadores del contexto señalan como pertinente. (Ávila, 2009, p. 234)

Los estudios que examinaron los aportes de la escolaridad al saber matemático de las personas, parecen poner en duda los beneficios de la escolarización en el desempeño matemático frente a problemas específicos. Todos concluyen señalando que, en general, el avance en el nivel de escolaridad no mejora el desempeño frente a los problemas planteados.[6] Son el trabajo y el intercambio comercial (actividad importante en la vida cotidiana) los que mejor ayudan a desarrollar ciertas habilidades y saberes matemáticos, aunque de carácter local.[7] En cambio, según los datos con los que contamos, la educa-

[5] "Proposición que se sostiene como posiblemente verdadera o falsa por quien la sustenta, cuando él o ella actúan" (Vergnaud, 1998, en De Agüero, 2006, p. 233).

[6] Por razones de espacio no expongo detalladamente el tema, pero los estudios de Eudave (2009), Estrada y Ávila (2009) y Ávila (2009), basados en un estudio que abordó otros temas matemáticos –(Ávila, Eudave, Estrada y Alcalá, 2008)–, muestran claramente que el avance en la escolarización básica tardía no se ve acompañado, en la gran mayoría de los casos, de un progreso en las habilidades matemáticas específicas. Queda por indagar con mayor profundidad si el origen de la escasa incorporación de este saber se debe a su mala enseñanza o si, en el extremo, se debe a que el estudio de los temas no es, en los hechos, requisito para obtener un certificado de educación primaria o secundaria.

[7] Con el término *local* me refiero al hecho de que el conocimiento y su uso tienen una gran dependencia del contexto; de hecho, su surgimiento, aprendizaje y uso derivan de las exigencias del ámbito en que se aplica (cf. Ávila, 2007, p. 234).

ción básica tardía no cumple de manera cabal el objetivo de proporcionar herramientas simbólicas y procedimientos generales que potencien las formas de hacer y los saberes matemáticos que las personas han construido en la vida (cf. Ávila, 2009, p. 237).[8]

3.2. Procesos de encuentro del saber no escolar con el saber escolar

En general, la investigación sobre el saber matemático no escolar se ha acompañado de un cuestionamiento a lo escolar (por ejemplo, Carraher et ál., 1991; o Lave, 1991), pero se han desarrollado muy pocos trabajos que analicen con más detenimiento los procesos de vinculación entre ambos saberes. Al análisis de tal vínculo dediqué un trabajo tendiente a arrojar luz sobre el encuentro entre los dos tipos de saber (Ávila, 2007). Específicamente, busqué documentar la interacción entre el cálculo oral y el escrito, registrando durante varios meses el trayecto de un grupo de jóvenes y adultos que intentaba aprender la lengua escrita y las matemáticas.

Un supuesto del trabajo era que quienes asisten al servicio de alfabetización cuentan con saberes que han construido en la vida, y que la simbolización y los procedimientos propios de la aritmética escrita (aprendidos significativamente) potenciarán su capacidad de cálculo. Asimismo, consideré que las personas tienen como motivación aprender "lo que saben los otros, los que han ido a la escuela" (cf. Ávila, 2007, p. 341), porque como señalaran Knijnik y Delprato (Knijnik, 1997; Delprato, 2002), la escritura matemática es una simbolización con valor social.

Las conclusiones de este estudio arrojan luz sobre el encuentro difícil entre la aritmética oral y la aritmética escrita, y se constatan en él varios fenómenos: *a)* la pérdida de sentido al enfrentarse a las escrituras numéricas; *b)* la persistencia del dinero como referente de la acción de calcular; *c)* la presencia constante de los procedimientos propios del cálculo oral, y *d)* la necesidad de reelaboración de estos procedimientos como condición de apropiación significativa de la aritmética escrita (cf. Ávila, 2007).

Finalmente, se observa que la comprensión y el manejo de ciertas formas de cálculo escrito no implican que éstas se constituyan en formas estables de operar. Al final de la experiencia comentada, las personas habían aplicado a la resolución de problemas los procedimientos escolares para sumar y restar, y parecían haber comprendido los principios que los sustentan. Sin embargo, preferían actuar con base en procedimientos híbridos, mezclando en ellos sus dos tipos de saber: *a)* anotar los datos en la forma y

[8] Sé que esta afirmación puede ser polémica, puesto que, como bien comentó uno de los árbitros en su lectura a la versión preliminar de este artículo, todas las investigaciones masivas sobre analfabetismo funcional concluyen que el desempeño de las personas –es decir, sus posibilidades de éxito en las prácticas cotidianas– aumenta con la escolaridad, aunque los procedimientos utilizados no coincidan con los escolares. Sin embargo, como sustento de mi postura, está el hecho de que en ninguna de las tres investigaciones que abordaron esta cuestión se encontró correlación positiva entre el nivel de escolaridad y el éxito en la solución de los problemas planteados. Por supuesto, el tema merece ser estudiado con nuevos y más profundos acercamientos.

disposición común en la matemática escolar; *b)* realizar los cálculos mentalmente (como ellos acostumbraban hacer antes de ir al servicio educativo) o con registros escritos personales, y *c)* al final, registrar el resultado en la forma convencional. Lo anterior puede considerarse un avance en la adquisición y uso funcional de la aritmética escrita, en cuanto a que se podían hacer lecturas correctas de las escrituras matemáticas escolares y se utilizaba la escritura para registrar los cálculos, potenciando así la memoria y, con ello, la capacidad de calcular. Empero, lejos estaban las personas de usar la aritmética escrita conforme a nuestras expectativas iniciales.

4. PROPUESTAS DIDÁCTICAS PARA LA EDUCACIÓN TARDÍA

En esta vertiente, Delprato y Fuenlabrada (2003 y 2005) reportaron los resultados de trabajar el sistema decimal de numeración y los algoritmos de suma y resta con tres mujeres adultas, a partir del juego conocido como "El cajero". El estudio de estas investigadoras destacó el valor didáctico de este juego como recurso que permite la interacción de los adultos analfabetos con las leyes del sistema de numeración decimal, así como el manejo simbólico de las operaciones de suma y resta. Hasta el momento de la aplicación de la ingeniería didáctica,[9] según informan las autoras, las tres mujeres podían resolver problemas aditivos, referidos al contexto comercial, pero con estrategias de cálculo ineficientes o limitadas. Podían también escribir algunos números, pero desconocían las razones que sustentan la escritura y sus relaciones con los mecanismos usuales de manipulación simbólica de la suma y la resta.

El juego del cajero y el registro de las acciones en una tabla (tirar los dados, cambiar y registrar) permitieron que las mujeres interactuaran de manera sistemática y ordenada con los procedimientos informales de suma y resta. Además, estos recursos propiciaron "el descubrimiento" de las leyes del sistema de numeración decimal que se expresan en la escritura posicional y el control de los procedimientos algorítmicos de las operaciones mencionadas.

Los trabajos de Delprato y Fuenlabrada, así como el de mi autoría recién comentado, tuvieron el interés de experimentar formas alternativas de vincular la matemática de la experiencia con la matemática escolar. Para ello echaron mano de las herramientas que proporciona la didáctica de las matemáticas y fueron realizados en condiciones controladas. No se trató de estudios llevados a cabo en las condiciones normales en que se desarrolla la escolarización básica de jóvenes y adultos. Quedan entonces preguntas como: ¿qué ocurre con los saberes matemáticos de las personas en las instituciones que ofrecen este servicio?, ¿lo que ahí ocurre explica el por qué no se utilizan los procedimientos escolares al resolver problemas, cuestión puesta en evidencia en varias investigaciones? A continuación se exponen estudios que se orientan a responder estas cuestiones.

[9] Metodología usual en los trabajos que se apoyan en la Teoría de Situaciones Didácticas y que pasa por realizar experiencias didácticas en el aula.

5. LAS CONDICIONES DE VINCULACIÓN CON EL SABER MATEMÁTICO ESCOLAR

En México, el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (INEA) ha centralizado, desde hace algunas décadas, las tareas de escolarización básica para las personas que no la cursaron en su infancia. Lo hace a través de un sistema que no ocupa profesores sino "asesores" (que pueden tener sólo estudios de secundaria) y que "asesoran" el aprendizaje autodidacta de quienes solicitan el servicio. En la Ciudad de México también se proporciona este servicio educativo a través de las Escuelas Primarias Nocturnas, sistema que tiene larga vida y en la actualidad muy escasa demanda. Aquí, la ayuda al estudio la realizan profesores de educación primaria. Ambas instituciones son contexto de lo que se expone en seguida.

5.1. Cuando la ayuda al estudio proviene de un "asesor"

El interés por este tema se vio concretado en los últimos 10 años, mediante estudios que refieren a las prácticas de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar o a las perspectivas de quienes las protagonizan. El orden cronológico conduce en primer término a los trabajos de García (2003) y Sánchez (2003). En su estudio, García analiza las concepciones y expectativas de quienes fungen como educadores de adultos en el sistema INEA. Su conclusión es que las opiniones de los asesores reflejan diferentes concepciones, consideraciones y preferencias específicas acerca de la naturaleza de las matemáticas, predominando aquellas que definen a dicha disciplina como una ciencia exacta relacionada con los números y sus operaciones, como un sistema de signos que exige rigurosidad, abstracción y aplicabilidad. García menciona también que, en su mayoría, los asesores están interesados en aprender para apoyar mejor el proceso de estudio de las matemáticas. Al parecer, muchos de ellos aspiran a trabajar de manera diferente "a la tradicional", pero no saben cómo hacerlo; la capacitación que reciben y los materiales impresos que se les proporcionan para guiar su labor de asesoría no han bastado para lograrlo.

Con base en un acercamiento etnográfico, Sánchez (2003) expone un fenómeno muy frecuente en el servicio que ofrece el INEA: las dificultades de los asesores para gestionar el aprendizaje de todos los estudiantes que forman el círculo de estudios que asesoran,[10] pues lo más común es que el grupo sea heterogéneo en edad, saberes previos e intereses.[11] Esta situación tiene consecuencias en el aprendizaje y la experiencia, no siempre satisfactorios, de quienes constituyen esos grupos.

[10] "Se llama círculo de estudios a un grupo de personas que se reúnen para cursar su educación básica, ayudándose unos a otros y con la colaboración de un asesor que orienta y apoya al grupo en sus actividades de aprendizaje" (INEA, 1998).

[11] "Hay que hacer circo, maroma y teatro" para proporcionar atención a tal diversidad de usuarios, decía una asesora de una plaza comunitaria rural (Ávila et ál., 2008).

La guía que se da a los asesores para orientar su labor de asesoría señala que “la asesoría no es una clase [...] es más activa que una clase, en ella todos aprenden de todos”, por lo que el asesor, según la idea que se mantiene vigente desde los orígenes del INEA, tiene como papel ser un facilitador del aprendizaje y su participación se centra fundamentalmente en coordinar, orientar y organizar el trabajo, para que ese aprendizaje realmente se dé y sea significativo para las personas (cf. Amador et ál., 2006, p. 34).

De este modo, aunque los adultos se reúnan en un aula a la misma hora, lo más común es que el aprendizaje se dé en forma individual. Adicionalmente, los jóvenes son quienes captan la atención del asesor, y las personas mayores (en su gran mayoría mujeres) quedan por completo marginadas de cualquier interacción educativa, lo que impide darles ayuda oportuna, incluso acerca de la interpretación de los libros y materiales de apoyo al estudio. Lo anterior queda muy claro en el trabajo de Sánchez (2003), quien refiere a una mujer Emilia, de aproximadamente 60 años, asistente a un círculo de estudios formado en su mayoría por jóvenes y algunas mujeres mayores, y quien desea ser atendida por el asesor para recibir aprobación de su respuesta a los ejercicios que ha resuelto en el libro de texto, pero concluye la sesión y el asesor nunca la escucha. Emilia hace una interpretación incorrecta del ejercicio planteado en el texto. Pero es muy probable que continuará sus intentos por aprender sobre la base de estos problemas de interpretación, pues el último fragmento del registro de la sesión reportada por Sánchez así parece anunciarlo: “[Emilia] Estuvo esperando al asesor para preguntarle, pero cuando éste regresó ya era hora de salida y Emilia se concretó a decir ‘Ya ni modo’, y a cerrar el libro” [...] “Y ahora ya me dejó como novia de pueblo... pero está con esos chamacos” (Sánchez, 2003, p. 14).

Estudios más recientes aportan información sobre lo que ocurre actualmente en el INEA. Ahí, a pesar de la incorporación de nuevos planes de estudio y programas de enseñanza, las cosas parecen no haber cambiado. En efecto, a través de un estudio sobre el terreno (Ávila et ál., 2008) nos fue posible conocer las formas que toman los procesos de estudio de las matemáticas en algunas *plazas comunitarias* coordinadas por el INEA (Ávila, 2013). El modelo Educación para la Vida y el Trabajo es el marco orientador de las acciones. Entre los contenidos obligatorios de este modelo están los de matemáticas, cuyo objetivo formal es que las personas aprendan a partir de resolver problemas vinculados con su vida familiar, social y laboral. Al realizar las actividades propuestas en los materiales, se espera que *el usuario* contraste la experiencia que ha acumulado en su vida con la información presentada en los materiales y la comparta con otros usuarios (Amador et ál., 2006).[12] A partir de tal idea, y en concordancia con los nuevos enfoques de enseñanza, el proceso de aprendizaje de las matemáticas se plantea en tres momentos:

1. Recuperación de saberes, conocimientos y experiencias que poseen las personas.

[12] El término *usuario* designa oficialmente a las personas que estudian en el INEA.

2. Búsqueda y análisis de nueva información, reflexión y confrontación con lo que ya se sabe.
3. Aplicación de lo aprendido en diferentes contextos, así como elaboración de síntesis y realización de un "cierre". (cf. Amador et ál., 2006, pp. 29-30)

No obstante tales sugerencias, la actividad matemática se guía, en los hechos, por un *contrato didáctico institucional de orientación certificadora* que encamina la actividad hacia la resolución de exámenes con fines de acreditación. La certificación y sus metas[13] reorientan y desplazan los objetivos institucionales formales y afectan los procesos de estudio de las matemáticas, de por sí empobrecidos en virtud de los dos pilares que constituyen su sustento –el autodidactismo y la solidaridad social– y que han permanecido intactos a lo largo de las tres décadas de vida del INEA.

Teniendo desde el origen estos dos pilares como ideas rectoras, la forma de relación educativa constituida al paso de los años en matemáticas, según la voz de los asistentes al servicio, podría definirse como "ayudar a contestar" y, en el límite, simplemente "revisar que se hayan contestado" los libros de texto que se proporcionan a los usuarios (Ávila, 2013). Esto como prerrequisito para presentar los exámenes de certificación.

La irrelevancia del papel del asesor en los procesos de estudio de las matemáticas prevalecientes en el INEA, lleva en ocasiones a las personas a buscar ayudas externas en este proceso, como por ejemplo, los hijos que saben más. Pero en otros espacios donde grupos de personas tratan de aprender matemáticas escolares –las Escuelas Primarias Nocturnas–, los procesos de estudio de las matemáticas también tienen problemas.

5.2. Cuando la ayuda al estudio la ofrecen profesores

En las escuelas nocturnas, los procesos de escolarización son dirigidos por docentes que estudiaron para ejercer esta profesión. En este espacio educativo se reconoce, discursivamente, el *saber no escolar* de las personas. Son recurrentes las afirmaciones acerca de que las personas ya saben calcular, acerca de que "ya saben matemáticas, pues [por ejemplo, en las operaciones aritméticas] lo único que les falta es pasarlo al cuaderno, porque ya lo saben hacer" (tomado de Ávila, 2012, p. 47).

No obstante el discurso que reconoce el saber de la experiencia y la intención de colaborar en la producción de una escritura para dicho saber, en las Nocturnas predomina una *praxis* que constituye una ruptura con el *logos* institucional (Ávila, 2012). Efectivamente, en ese espacio prevalece una enseñanza que transmite sólo técnicas de cálculo escolares desligadas de problemas o situaciones que les den significado, que solicita hacer *planas* y memorizar procedimientos como ayuda al proceso de estudiar.

[13] Con base en el sistema "de metas", implementado hace ya bastantes años en el INEA, los asesores reciben pago en función del número de adultos que acreditan materias o módulos; con ello se favorece la desviación de auténticos objetivos de aprendizaje, a otros no vinculados con éste.

De este modo, los saberes matemáticos se reducen al aprendizaje de símbolos y procedimientos únicos que no se necesita justificar.

Hay un factor adicional que socava la calidad de los procesos didácticos en este tipo de escuelas: la escasez de interesados en el servicio educativo y el fantasma de que, por tal razón, las Nocturnas se cierren. Como consecuencia, los procesos didácticos se trivializan, se deterioran, incluso se diluyen porque –con el afán de retenerlos– los alumnos quedan liberados de toda responsabilidad didáctica y, con ello, también sus profesores.

En síntesis, los procesos de estudio de las matemáticas que tienen lugar en las dos modalidades educativas analizadas, sólo eventualmente resultan estimulantes en términos de producción de saberes matemáticos y de experiencia personal. La labor de los asesores y docentes que parecen entender que el aprendizaje debe ser significativo y se esfuerzan por conseguirlo, se diluye en las prácticas dominantes, donde prevalece la repetición, la ejercitación y la urgencia por resolver exámenes para lograr acreditación. Se necesitan cambios sustanciales para que quienes asisten a las Nocturnas y al INEA reciban un apoyo institucional adecuado en su proceso de estudio de la matemática escolar.

Desde el punto de vista metodológico, las investigaciones comentadas en este inciso centraron el interés en la actividad matemática que tiene lugar en la escolarización tardía y en las condiciones en que se dan los procesos de estudio al interior de este servicio educativo. Los acercamientos han ampliado sus fuentes y las formas de recolección de la información; se recurre a la observación, las entrevistas a diversos actores, la aplicación de cuestionarios, el análisis de libros de texto y de guías para los asesores; son enfoques de indagación donde se observa lo cotidiano y se escucha la interpretación de los participantes en los hechos. Es decir, que el objeto de estudio, originalmente centrado en la cognición, se expandió en el sentido de considerar las matemáticas como una práctica social, donde los contextos y otros actores distintos del sujeto cognoscente individual repercuten en lo que las personas saben o dejan de saber y, por ende, se incorporan como parte de las indagaciones y se examinan cuidadosamente.

6. EL SABER MATEMÁTICO *EN* LA EXPERIENCIA

En los últimos años, Jean Lave, con su teoría del aprendizaje situado (Lave, 1991), inspiró y orientó nuevas formas de indagación sobre los saberes no escolares y la forma en que estos saberes funcionan. En esta vertiente, interesada en conocer "cómo vive" el *saber* en *la experiencia,* el saber matemático escolar y las condiciones de su producción parecieron pasar a un segundo plano, esto a pesar de que los autores se preocupen en señalar que el interés último es arrojar luz para repensar los *saberes de la escuela* y su relación con *los saberes de la experiencia*.

La teoría de Lave se ha visto reflejada en el trabajo de De Agüero (2006) ya comentado, el de Fuenlabrada y Delprato (2009) y el de Solares (2012a y 2012b), que también se alimentó con la noción de praxeología de Chevallard. El primero de estos trabajos lo realizó De Agüero (2006), quien acompañó por un tiempo largo a una cuadrilla de pintores con la intención de identificar las tareas *matematizables* que enfrentan y las estrategias que utilizan para hacerlo. Esta investigadora muestra que al interior de la comunidad de práctica constituida por los pintores, hay una serie de situaciones matematizables que se enfrentan de manera individual o colectiva, y que "el pensamiento práctico [de la cuadrilla] está constituido por un conjunto de estrategias personales y convencionales determinadas por el contexto de la actividad u ocupación, que se desarrollan con base en la experiencia individual y colectiva" (De Agüero, 2006, p. 352).

Un rasgo fundamental del conocimiento que desarrollan los pintores, según De Agüero, es que es funcional a la actividad, a las prácticas y tareas implicadas, tales como: medir, comprar, estimar, presupuestar y cobrar, y en menor grado, preparar mezclas, pinturas, colores y *tirol*.[14] En las estrategias utilizadas por los pintores para la solución de situaciones matematizables se identifican: esquemas, sistemas de cálculo y sistemas de representación formales y personales; también procedimientos de control. El principal esquema personal altamente funcional, dice De Agüero, es la visualización de áreas continuas con forma rectangular; las compensaciones con magnitudes diferentes y las compensaciones por tanteo tienen una función regular en las tareas de medir y estimar (De Agüero, 2006, p. 348).

De Agüero sostiene, además, que la acción cotidiana situada logra generar capacidades más allá de lo específico, que luego son útiles como conocimiento de base para enfrentar nuevas situaciones (por ejemplo, la rectificación de áreas). En mi opinión, y aunque la autora hace poco énfasis en ello, el análisis de la actividad matemática de los pintores muestra también la necesidad imperiosa de contar con un buen sistema de escritura para la "comunicación matemática" con "los otros", principalmente los contratantes y los proveedores de materiales. Para esta comunicación –y puesto que la cuadrilla está contratada por una empresa que hace trabajos complicados y costosos–, el saber matemático situado, aun con los visos de generalización señalados por la autora, no es suficiente para lograr una buena interlocución, por lo que el saber que aporta quien tiene estudios y maneja el código escrito de la matemática convencional, resulta esencial en la viabilidad de la cuadrilla como empresa que produce el sustento económico a sus integrantes.

Esta última cuestión se haría más visible en estudios posteriores, como el de Fuenlabrada y Delprato (2009), desarrollado con una intención similar a la de De Agüero, pero donde el referente empírico lo constituye una organización productiva y de autogestión constituida por mujeres dedicadas a la producción artesanal y su

[14] El *tirol* es un acabado que se da a las paredes con el fin de darles una presentación más fina; puede prepararse con agua, yeso, cal blanca y polvo de mármol. Los tiempos de mezcla y las proporciones son esenciales para que el *tirol* alcance la consistencia indispensable para trabajarlo.

venta.[15] Delprato y Fuenlabrada buscaron captar, a través de "la mirada" de las líderes de las cooperativas, las prácticas vinculadas con la numeración y el cálculo, así como el significado social que éstas tienen para las participantes en la organización; lo hicieron mediante entrevistas y observación de "situaciones críticas" de venta (preventa y posventa) de los productos generados por las mujeres miembros de la cooperativa y que tienen lugar en algunas ferias. En el hacer de las artesanas se identifican eventos y prácticas matemáticas, todas las cuales implican negociaciones, acuerdos y cálculos aritméticos que buscan fijar precios justos a la vez que competitivos. La mirada social adoptada por las investigadoras las lleva a identificar distintas relaciones con las matemáticas al interior del grupo, resultantes de las distintas posiciones que en él ocupan las mujeres. La líder, por ejemplo, es la intersección entre "las de adentro" y "los de afuera", lo que le da una condición de poder sobre el resto de las mujeres. Tal poder deriva de su capacidad de interactuar con un mundo donde prevalece la escritura.

Por otra parte, la identificación de algunas estrategias utilizadas con frecuencia en la cooperativa, como el manejo de cantidades con terminación cinco para facilitar los cálculos, o un sistema aditivo (no multiplicativo) para definir descuentos, sirven a las autoras para señalar que el análisis de las prácticas en las que intervienen las matemáticas de grupos, como el de las mujeres artesanas, permitiría construir propuestas de enseñanza para quienes no desean continuar una escolarización convencional, pero sí mejorar sus posibilidades de enfrentar los problemas con los que lidian en el ámbito laboral.

La preocupación de estas autoras –una escolarización matemática adaptada a las circunstancias específicas de las personas– encierra un objetivo por largo tiempo anhelado, pero de enorme complejidad. Tal idea no parece viable como política educativa en las condiciones en que se realiza actualmente la educación matemática en la escolaridad tardía.

El trabajo más reciente constitutivo de esta vertiente es el que aborda los conocimientos matemáticos en situaciones extraescolares de niños jornaleros migrantes y sus familias (Solares, 2012 a y b). En palabras de su autora, este trabajo procura identificar y analizar actividades en las que se movilizan conocimientos matemáticos en el contexto del trabajo agrícola de familias jornaleras migrantes. El propósito específico es tener elementos que permitan mirar las posibles relaciones, distancias y/o conflictos entre los conocimientos matemáticos que se utilizan en situaciones extraescolares y los conocimientos que la escuela promueve.

El análisis realizado por Solares da cuenta de las posibles dificultades para identificar (y para intentar establecer) una vinculación directa entre los conocimientos matemáticos movilizados en situaciones de trabajo agrícola y los conocimientos que la escuela promueve. A partir de los datos recogidos, esta investigadora plantea interesantes reflexiones en torno a los posibles vínculos entre conocimientos que se movilizan en

[15] El trabajo de Fuenlabrada y Delprato se basa en el análisis de las prácticas matemáticas de dos cooperativas, pero, puesto que una de ellas se ubica en Argentina y con base en los objetivos del escrito, decidí considerar sólo la ubicada en México.

contextos distintos. También esboza respuestas y formula nuevas preguntas sobre la motivación inicial de su trabajo: eso que los niños y niñas han aprendido más allá de la escuela, ¿les ayuda para seguir aprendiendo en la escuela?; eso que aprenden en la escuela, ¿les ayuda a enfrentar algunas de las situaciones que viven como migrantes y trabajadores? No obstante esta preocupación, el énfasis del trabajo está puesto en el análisis del saber extraescolar, de la inmersión de los conocimientos matemáticos en ciertas prácticas sociales. Solares se pregunta al respecto: ¿qué posibilidades existen de que esos conocimientos se pongan en contacto con lo escolar?, y señala que las relaciones pueden ser incluso conflictivas o irrelevantes, aunque necesarias en ciertos casos.

En los trabajos que conforman esta vertiente de indagación, se utilizaron herramientas analíticas de diversa índole y origen, pero todas con un enfoque sociocultural. Como señala Solares, la finalidad de esta incorporación es "que esas herramientas permitan una mirada más comprensiva de las condiciones en las que operan [viven] conocimientos matemáticos en contextos específicos" (Solares, 2012b, p. 5).

Esta vertiente que he llamado el saber *en* la experiencia, a pesar de las reflexiones expresadas en todos los casos acerca de lo educativo y las derivaciones didácticas esbozadas, constituye a la vez un alejamiento de este ámbito. Los trabajos ahora son más antropológicos y más sociales. Probablemente las razones que subtienden a este alejamiento son similares a aquellas que Artigue señaló respecto de la didáctica:

> Imponerse la ambición de comprender el funcionamiento de estas relaciones [...] y de poner en evidencia las leyes que las gobiernan, haciendo explícita, al mismo tiempo, la necesidad de distanciar la voluntad de acción inmediata sobre el sistema educativo. (Artigue, 1995, p. 7)

Pero las condiciones actuales de la educación básica tardía y los escasos logros académicos que en ella se obtienen generan sentimientos de impaciencia, sentimientos que llaman a construir soluciones a más corto plazo, soluciones que –siendo simples pero no triviales– generen aprendizajes matemáticos significativos y sean factibles de aplicar y asimilar por los educadores comunes, los que cotidianamente enfrentan la tarea de ayudar a las personas a aprender lo que saben los otros, los que tienen una condición más favorecida en la sociedad.

CONCLUSIONES

Como se ha visto, los referentes teóricos y las aproximaciones metodológicas se modificaron de manera importante en los 25 años de acercamiento a los saberes matemáticos *de* la experiencia y su relación con los saberes escolares que se ofrecen en la educación tardía. Los trabajos pioneros se desarrollaron desde una perspectiva piagetiana, centrada en la cognición. Los trabajos recientes recuperan herramientas de análisis provenientes de marcos socioculturales, como la cognición situada o las teorías chevallardianas, para poder mirar la complejidad de las nuevas formas que ha tomado el objeto de estudio. En una relación dialéctica, al ensancharse las preocupaciones y las miradas, se hicieron necesarias nuevas herramientas para poder delimitar el objeto de estudio, analizarlo e interpretarlo. No se trató de una "expansión lineal y aditiva", sino de una complejización del objeto de estudio que implicó su reubicación y su reestructuración, en un sentido similar al que Gascón delinea en su estudio sobre la evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica (Gascón, 1998).

Sin embargo, la investigación realizada en torno a los saberes matemáticos no escolares es una investigación que, habiendo sufrido modulaciones, complejizaciones y cambios de rumbo, ha tenido poco impacto en aspectos en que la práctica se podría haber visto alterada por dichos resultados, donde se podría haber sentido su influencia: las condiciones del aprendizaje matemático escolar de quienes no realizaron sus estudios básicos en la infancia. Y es que la vinculación entre lo no escolar y lo escolar es terreno casi inexplorado. Aunque ahora conocemos bastantes especificidades sobre los saberes construidos en la vida y la forma en que éstos funcionan en su contexto natural, y por otra parte, hemos identificado las condiciones de apropiación del saber matemático escolar, los desarrollos didácticos para la escolaridad tardía —alimentados por los resultados de estas indagaciones— son insuficientes.

Como he señalado en otros escritos: no es responsabilidad de los investigadores definir e implementar políticas educativas, mucho menos lograr que éstas sean exitosas. Pero el reconocimiento del poco impacto de la investigación sobre la práctica de educación matemática institucional de jóvenes y adultos, llama a señalar la necesidad de profundizar la investigación en las vertientes en que hoy se ha desgranado el objeto de estudio y buscar encuentros que potencien los resultados obtenidos en ellas. En esos desarrollos, será indispensable volver la mirada a los sistemas de escolarización tardía, tratando de ejercer influencia en las ayudas que para aprender la matemática escolar reciben las personas que asisten a ellos, porque en América Latina estas personas se cuentan por millones y, sin duda, merecen mejores oportunidades de aprendizaje matemático formal.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995), "El lugar de la didáctica en la formación de profesores", en P. Gómez (ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Bogotá, Una Empresa Docente-Editorial Iberoamérica, pp. 7-24.

Avila, A. (1990). "El saber matemático de los analfabetos. Origen y desarrollo de sus estrategias de cálculo", *Revista Lationamericana de Estudios Educativos*, vol. XX, núm. 3, pp. 55-96.

——— (2009), "¿Del cálculo oral al cálculo escrito? Constataciones a partir de una situación de proporcionalidad", en J. Kalman y B. V. Street (coords.), *Lectura, escritura y matemáticas como prácticas sociales*, México, CREFAL/Siglo XXI Editores, pp. 223-241.

Ávila, A. (2006), "Prácticas cotidianas y conocimiento sobre las fracciones. Estudio con adultos de escasa o nula escolaridad", *Educación Matemática*, México, vol. 18, núm. 1, pp. 5-35.

——— (2007), "Del cálculo oral al cálculo escrito. Una batalla para acceder a una nueva significación", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 27, núm. 3, pp. 313-348.

——— (2012), "Estudiar matemáticas en una primaria nocturna. *Logos* y *praxis* en un proyecto con orientación social", *Educación Matemática*, vol. 24, núm. 2, pp. 37-60.

——— (2013), "Entre el autodidactismo, la solidaridad y la certificación. Procesos de estudio de las matemáticas en cuatro plazas comunitarias del INEA", *Perfiles Educativos*, vol. XXXV, núm. 142, pp. 75-88.

Ávila, A. (coord.), D. Eudave, J. L. Estrada y E. Alcalá (2008), *Matemáticas y educación básica de jóvenes y adultos. Estudio a través de la voz y el saber de los usuarios*, reporte de investigación no publicado, México, Universidad Pedagógica Nacional/Universidad Autónoma de Aguascalientes/Instituto de Educación de Aguascalientes.

Carraher, T. (2001), "La matemática en la vida y en la escuela: dos décadas de investigación", en A. Lizarzaburu y G. Zapata (comps.), *Pluriculturalidad y aprendizaje de la matemática en América Latina*, Madrid, Morata, pp. 234-252.

Carraher, T., D. Carraher y A. Schliemann (1991), *En la vida diez, en la escuela cero*, México, Siglo XXI Editores.

De Agüero, M. (2006), *El pensamiento práctico de una cuadrilla de pintores. Estrategias para la solución de problemas en situaciones matematizables de la vida cotidiana*, México, CREFAL/UIA.

Delprato, M. F. (2002), *Los adultos no alfabetizados y sus procesos de acceso a la simbolización matemática*, tesis de maestría en ciencias con especialidad en investigaciones educativas, México, Departamento de Investigaciones Educativas-Cinvestav.

Delprato, M. F. e I. Fuenlabrada (2003), "El cajero. Un recurso didáctico que favorece el acceso de adultos analfabetos a la simbolización de los números y las operaciones de suma y resta", *Decisio. Saberes para la acción en educación de adultos*, núm. 4, pp. 37-40.

Estrada, J. L y A. Ávila (2009), "Los usuarios de la educación básica para jóvenes y adultos y la solución de un problema de área", *Educación Matemática*, México, vol. 21, núm 3, pp. 33-66.

Eudave, D. (2009), "Niveles de comprensión de información y gráficas estadísticas en estudiantes de centros de educación básica para jóvenes y adultos de México", *Educación Matemática*, México, Santillana, vol. 21, núm. 2, pp. 5-37.

Fuenlabrada, I. y M. F. Delprato (2005), "Tres mujeres adultas y sus diferentes acercamientos a los números y las cuentas", *Educación Matemática*, México, vol. 17, núm. 3, pp. 25-51.

Fuenlabrada, I. y M. F. Delprato (2009), "Prácticas matemáticas en organizaciones productivas de mujeres de baja escolaridad: construir una mirada que cimiente propuestas de enseñanza", en J. Kalman y B. V. Street (coords), *Lectura, escritura y matemáticas como prácticas sociales*, México, CREFAL/Siglo XXI Editores, pp. 242-261.

García Juárez, M. A. (2003), "La formación de asesores en matemáticas. Una experiencia en los talleres de formación y actualización de asesores y técnicos docentes del INEA", *Decisio. Saberes para la acción en educación de adultos*, núm. 4, pp. 59-63.

Gascón, J. (1998), "Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grénoble, La Pensée Sauvage, vol. 18, núm. 1, pp. 7-34.

Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (1998), *Guía del asesor. Segunda y tercera etapas de educación básica. Primaria y secundaria*, México, SEP/INEA.

Knijnik, G. (1997), "Lo popular y lo legítimo en la educación matemática de jóvenes y adultos", *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos. Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en la educación*, Santiago de Chile, UNESCO-Santiago, pp. 43-54.

Lave, J. (1991), *La cognición en la práctica*, Barcelona, Paidós (Colección Cognición y Desarrollo Humano).

Mariño, G. (1997), "Los saberes matemáticos previos de jóvenes y adultos: alcances y desafíos", *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos. Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en la educación*, Santiago de Chile, unesco-Santiago, pp. 77-100.

Sánchez Pérez, C. (2003), "Autoaprendizaje de las matemáticas en los grupos del INEA", *Decisio. Saberes para la acción en educación de adultos*, núm. 4, pp. 12-16.

Solares, D. (2012a), *Tesis de doctorado en ciencias con especialidad en investigaciones educativas*, México, DIE-Cinvestav.

——— (2012b), "Conocimientos matemáticos en situaciones extraescolares. Análisis de un caso en el contexto de los niños y niñas jornaleros migrantes", *Educación Matemática*, vol. 24, núm. 1, pp. 5-34.

ANEXO. PREGUNTA RELACIONADA CON EL MÓDULO "INFORMACIÓN Y GRÁFICAS"

I. Tabla de datos estadísticos

Nacimientos por estado, 1990-2005

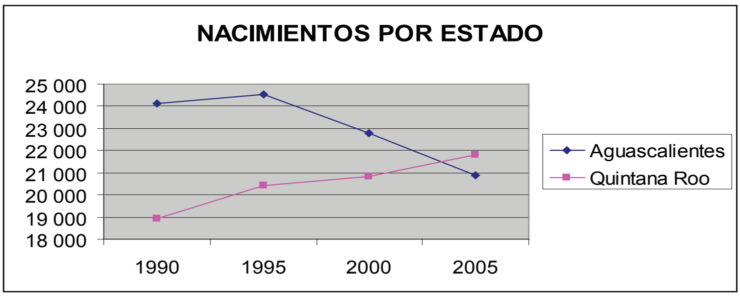
Entidad federativa	1990	1995	2000	2005
Aguascalientes	24 150	24 542	22 790	20 875
Quintana Roo	18 949	20 06	20 832	21 827

Fuente: Estimaciones del Consejo Nacional de Población.

1. ¿De qué tratan los datos de la tabla?
2. ¿En qué año fue mayor el número de nacimientos en Quintana Roo?
3. ¿En qué estado hubo un mayor número de nacimientos en el año 2005?
4. ¿Cuál será aproximadamente el número de nacimientos para el año 2010 en Aguascalientes?
5. ¿Cuál será aproximadamente el número de nacimientos para el año 2010 en Quintana Roo?

II. Gráfica de líneas

Con la información de la tabla anterior, se elaboró la gráfica siguiente. Revísala con cuidado y contesta las preguntas.



1 ¿En qué año hay una mayor diferencia en el número de nacimientos de los dos estados?
2. ¿Cómo son los cambios a través del tiempo del número de nacimientos en el estado de Aguascalientes?
3. ¿Cómo son los cambios a través del tiempo del número de nacimientos en el estado de Quintana Roo?

DATOS DE LA AUTORA

Alicia Ávila
Universidad Pedagógica Nacional, México
aliavi@prodigy.net.mx

Un vistazo al programa *La ciencia en tu escuela*

Carlos Bosch Giral

Resumen: El programa *La ciencia en tu escuela* inicia sus actividades en 2002 como un programa de la Academia Mexicana de Ciencias en las áreas de ciencias y matemáticas, orientado a los maestros de educación básica. Durante estos diez años, el programa ha crecido y se ha enfrentado a nuevos retos, como el de desarrollarse manteniendo su calidad inicial. El crecimiento se ha hecho en dos sentidos. Primero hacia las zonas rurales, y posteriormente con la creación de un programa a distancia para poder alcanzar todos los estados de la república. Las evaluaciones periódicas internas, así como las evaluaciones externas que se han hecho, han permitido afinar adecuadamente el programa en todas sus vertientes. Aquí presentamos una mirada global del programa presencial y a distancia, así como de los trayectos formativos y una probada de lo que se hace en matemáticas.

Palabras clave: La ciencia en tu escuela, educación a distancia, diseño instruccional, *Learning Management System,* constructivismo, método indagatorio.

Abstract: The program *La Ciencia en tu Escuela* began in 2002 as a program of the Mexican Academy of Sciences in the areas of science and mathematics. It is oriented to basic education school teachers. During these ten years the program has faced new challenges such as growing but maintaining the quality. The growth was done in two ways: first to rural areas, second to the creation of a distance program to reach all the states of the country. Periodic internal evaluations and external evaluations have been made to allow a proper tune up of the program in all its aspects. Here we present a global overview of the onsite and distance program. We also give a taste of what is done in mathematics.

Keywords: distance education, instructional design, Learning Management System, constructivism, inquiry method.

Fecha de recepción: 15 de agosto de 2013; fecha de aprobación: 11 de diciembre de 2013.

1. UNA MIRADA GLOBAL

La ciencia en tu escuela es un programa de formación en ciencias y matemáticas para docentes en servicio, creado para acercar a los científicos con los profesores de educación básica de México. Este programa de la Academia Mexicana de Ciencias inició sus actividades con maestros de educación básica en el año 2002. En su diseño se consideraron los siguientes lineamientos:

- No apartarse del programa educativo mexicano.
- Acercar a maestros y científicos para que ambos grupos propongan maneras diferentes y atractivas para la enseñanza de las matemáticas y las ciencias.
- Buscar métodos alternativos a los de una enseñanza tradicional, para despertar el interés de niños y jóvenes a través de una mayor interacción con los profesores y el involucramiento en prácticas experimentadas directas y sencillas para fomentar una mayor curiosidad y un aprendizaje más dinámico. El modelo adoptado es la metodología indagatoria que se explica a vuelo de pájaro en el punto 2.
- Elaborar los escritos necesarios que se adapten lo mejor posible a las necesidades del programa y preparar los experimentos con materiales que sean útiles, de bajo costo y fáciles de conseguir.
- Hacer evaluaciones periódicas que permitan saber si los lineamientos y objetivos se cumplen o no. (Todas las evaluaciones que se mencionan en este documento se pueden consultar en la página del programa.)

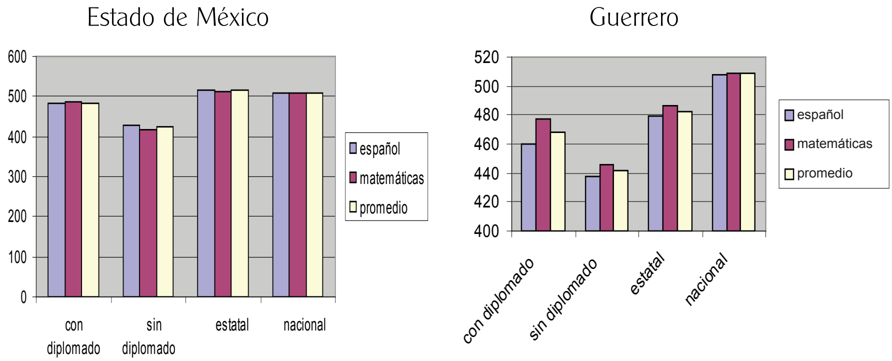
Respecto a este último punto, es importante señalar que en los primeros seis años se hicieron evaluaciones internas, es decir, preparadas por un equipo coordinado por la administración del programa, de todas las actividades y personas que participaban en el proyecto (maestros/alumnos, ponentes, materiales, etc.), lo cual permitió tomar las decisiones adecuadas para afinar el programa.

En 2009, el Grupo Valora se encargó de llevar a cabo una evaluación externa del programa. Se pueden consultar todos los detalles de la evaluación en www.lacienciaentuescuela.edu.mx.

Con *La ciencia en tu escuela* se pretende cambiar la actitud de maestros y alumnos hacia las ciencias y las matemáticas en primaria y secundaria.

El programa inició sus actividades en la modalidad presencial, con aproximadamente 200 maestros de primaria y otros tantos de secundaria, todos ellos profesores del Distrito Federal que a lo largo de todo el año académico (32 sesiones semanales de 4 horas) recibieron un diplomado de ciencias y matemáticas. Posteriormente, el programa se llevó a cabo en varios estados donde grupos de científicos locales se encargaron de adaptar lo hecho en el Distrito Federal. A través de nuestra página de internet, el Consejo Nacional de Fomento Educativo (CONAFE) conoció el programa *La ciencia en tu escuela*. En 2006 se solicitó que ese programa se adoptara en comunidades rurales de nueve

Figura 1



estados del país. El programa se adaptó a las condiciones de los instructores comunitarios del consejo que solamente podían asistir una vez al mes a las sesiones de trabajo y que tenían una preparación diferente a la de los maestros de primaria o secundaria con los que se había trabajado hasta el momento. CONAFE hizo una evaluación del impacto del programa en los resultados del examen ENLACE. En 2008 recogió los resultados de los alumnos de los instructores que participaron con nosotros en el ciclo escolar 2007-2008 y que presentaron el examen ENLACE en marzo de 2008, y los comparó con grupos testigo. Las gráficas de la figura 1 reproducen el resultado obtenido en Guerrero y en el Estado de México, ambos con condiciones económicas muy diferentes. En cada grupo de tres columnas, la primera representa el promedio de los resultados obtenidos por los alumnos de primaria en español, la segunda en matemáticas y en la tercera se presenta el promedio de las dos anteriores. Ahí se compara a los alumnos de instructores que asistieron al diplomado impartido por *La ciencia en tu escuela*, con alumnos de instructores que no asistieron al diplomado. Además, tenemos en esas gráficas media estatal y nacional, según las pruebas ENLACE.

Es importante señalar que el impacto en este caso fue casi inmediato, ya que los instructores de CONAFE empezaron a trabajar en octubre y el examen de ENLACE se llevó a cabo en marzo, con lo que no se había completado el curso al momento de aplicar estos exámenes. *La ciencia en tu escuela* ha seguido trabajando con CONAFE e incluso se han organizado cursos en el verano para ex instructores que cursan una carrera universitaria. Estos jóvenes participan en el programa Verano de la Investigación Científica, también coordinado por la Academia Mexicana de Ciencias, realizando una estancia con un investigador a la par que concluyen el diplomado de *La ciencia en tu escuela* de manera intensiva. Se espera que cuando ellos terminen sus respectivas carreras dediquen parte de su tiempo a formar a los nuevos instructores.

Desde sus inicios, *La ciencia en tu escuela* fue invitada a presentar su programa en foros internacionales debido a que es un programa diferente a los que fueron en cierto sentido su inspiración: los programas de la National Academy of Sciences, de Estados Unidos; el programa de Leon Lederman (premio Nobel de física en 1988), también en Estados Unidos, y el programa de Georges Charpak (premio Nobel de física en 1992), y La Main à la Pâte, de Francia. En particular, *La ciencia en tu escuela* es un programa dirigido a maestros de primaria y secundaria, mientras que los anteriores se dirigen únicamente a estudiantes de primaria. Además, es un programa que actualmente incluye matemáticas, historia de las ciencias y habilidades comunicativas, así como a jóvenes de servicio social que apoyan a los maestros de educación básica en sus actividades científicas y matemáticas en sus escuelas. Sin embargo, era claro que ninguno de los programas como el de la National Academy of Sciences o La Main à la Pâte podía implantarse tal cual en nuestro país.

El 21 noviembre de 2007 se firmaron convenios de colaboración entre la Academia Mexicana de Ciencias y las academias de ciencias de Bolivia, Colombia, Costa Rica, Guatemala, Panamá, Perú y República Dominicana, con el objetivo de apoyar la implementación de un programa hermano a *La ciencia en tu escuela* en dichos países. A la firma del convenio asistieron embajadores y presidentes de las academias de ciencias de cada país. Después de la firma del convenio, las gestiones con los diferentes ministerios de educación retrasaron casi un año el inicio de las acciones. Desde finales de 2008 se realizaron, con los países participantes, seminarios generales, así como talleres, conferencias y envíos de material didáctico, específicamente cajas "Experimenta" que contienen instructivos para guiar a los alumnos en las aulas para que lleven a cabo los experimentos que los propios maestros hicieron durante el diplomado, así como muestras de los materiales necesarios para efectuar los experimentos. Todos esos materiales son de bajo costo y fáciles de conseguir.

2. BREVEMENTE: LA METODOLOGÍA INDAGATORIA

La ciencia en tu escuela ha adoptado **la metodología indagatoria** para el aprendizaje de las ciencias. Esta metodología, como su nombre lo indica, se basa en la indagación y se apoya –entre otras cosas– en la idea de que es necesario que los alumnos interactúen con problemas concretos significativos e interesantes para ellos, que sean capaces de hacer sus propios descubrimientos y de construir de manera activa su aprendizaje.

Este modelo se desarrolló inicialmente para alumnos en el área de ciencias. Por ejemplo, La Main à la Pâte es un programa en el que se trabaja con la metodología indagatoria orientada a los alumnos. En *La ciencia en tu escuela*, este modelo se usa para trabajar con los maestros de educación básica, tanto en ciencias como en matemáticas. Si los maestros no tienen una preparación adecuada y no entienden perfectamente bien el modelo, muy difícilmente lo van a adoptar, por lo que *La ciencia en tu escuela* decidió exponer a los maestros directamente a esta metodología, haciéndolos vivir la experiencia como si ellos fueran los alumnos y así, además de actualizar sus conocimientos, se hacen dos cosas a la vez: se proporciona un método de trabajo por medio del ejemplo, así como conocimientos científicos y matemáticos. Con este modelo se aprenden no sólo los contenidos sino, además, los procesos que permiten aceptarlos como correctos y verdaderos.

El modelo indagatorio para la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias y las matemáticas busca dar a los maestros/alumnos habilidades y destrezas adecuadas para construir en forma participativa y activa los conocimientos planteados en el currículum. Es así como se pretende superar uno de los problemas más frecuentes en la enseñanza tradicional de las ciencias y las matemáticas en el aula: la tendencia a ofrecer respuestas a preguntas que niñas y niños nunca se han planteado.

En nuestro país y muchos otros, el modelo imperante está centrado más en la acumulación y memorización de la información que en la importancia de la ciencia y la matemática como una forma de pensamiento y actitud mental. En 1951, John Dewey dirigió un discurso a la American Association for the Advancement of Sciences, en el cual da gran importancia a la indagación y critica la memorización y acumulación de conocimientos como enseñanza de las ciencias y las matemáticas en las escuelas. Esta situación motivó la decisión de la comunidad científica, representada por las academias de ciencias del mundo, de involucrarse en la generación de estrategias que permitieran conducir el cambio en la educación científica en sus respectivos países y a nivel mundial.

La utilización de la metodología de la indagación propicia la participación activa y creativa de los maestros/alumnos y tiene como objetivo proporcionar una herramienta para su mejor desarrollo, tanto en el ámbito escolar, como en la vida cotidiana. El modelo se centra en lograr aprendizajes realmente significativos y duraderos en los estudiantes. En nuestro caso, los maestros deben interactuar con problemas concretos, entre otras cosas. Esos problemas deben ser significativos e interesantes y en muchos casos suelen ser totalmente novedosos para ellos. Los alumnos/maestros deben ser capaces de hacer sus propios descubrimientos y construir de manera activa su aprendizaje y su conocimiento.

La aplicación de la metodología indagatoria al aprendizaje de las ciencias y las matemáticas puede variar, pero cualquiera que sea la forma precisa que adopte, se tratará de un proceso en el cual se desarrollen en paralelo habilidades, actitudes y comprensión de conceptos científicos. El énfasis en la indagación exige que pensemos sobre lo que sabemos, por qué lo sabemos, cómo lo sabemos y cómo lo hemos llegado a saber, y a través de esas reflexiones se obtendrá la construcción de nuevo conocimiento. Desarrollar la capacidad de indagar es de fundamental importancia para la formación de quienes dedican su vida a explicar los misterios de la naturaleza, tras acceder a ellos mediante los lenguajes y esquemas formales de las ciencias, las matemáticas, las humanidades y las artes. La fuerza de la indagación es la curiosidad que desarrolla la pasión por explorar y comprender, es por eso que la gente común –y no únicamente los expertos– la usa para aprender y para agregar sentido a su vida. Los profesores pueden apoyarse en esta metodología (hay otras, pero aquí hemos decidido usar ésta) para ayudar a todos sus estudiantes a entender la ciencia como el propósito humano de adquirir conocimiento científico, matemático y destrezas mentales importantes en la vida cotidiana y, si sus estudiantes así lo deciden, a forjarse una carrera en las ciencias.

Según Piaget (1950), la construcción de estructuras de pensamiento se obtiene mediante un proceso de asimilación y acomodación y su respectiva adaptación. Una persona asimila un nuevo conocimiento cuando trata de experimentarlo, investigarlo, es decir, lo asimila y lo acomoda cuando modifica sus preconcepciones o esquemas en función de ese nuevo conocimiento. La metodología indagatoria presenta un ciclo de aprendizaje que permite planificar las clases de ciencias y matemáticas en la teoría de Piaget y el modelo de aprendizaje de cuatro fases propuesto por David Kolb (1984) que se caracteriza por describir etapas marcadas de intervención en diferentes niveles del ciclo de aprendizaje. Las fases de la metodología indagatoria son cuatro: la primera, focalización; la segunda, exploración; la tercera, reflexión, comparación o contraste, y finalmente la aplicación.

En la primera etapa se propone explorar y explicitar las ideas respecto a la temática, problema o pregunta a investigar. Estas ideas previas requieren de cierto proceso de investigación, pues no pueden ser simplemente construcciones del momento; son el punto de partida para la experimentación.

En la etapa de exploración se inicia con la discusión y realización de una experiencia cuidadosamente elegida, que ponga a prueba las ideas previas de los estudiantes en torno al tema o fenómeno en cuestión. Lo importante es que ellos puedan comprobar si sus ideas se ajustan a lo que ocurre en la realidad o no.

Luego de realizada la experiencia, en la etapa de reflexión, comparación o contraste se confrontan las predicciones realizadas con los resultados obtenidos. Es la etapa en que se elaboran conclusiones propias respecto al problema analizado. Es aquí donde el docente puede introducir algunos conceptos adicionales, terminología asociada, etc.

El objetivo del último punto es poner al alumno ante nuevas situaciones que ayuden a afirmar el aprendizaje y asociarlo al acontecer cotidiano. Esta etapa permite al docente comprobar si los estudiantes han internalizado de manera efectiva ese aprendizaje. En esta etapa se pueden generar nuevas investigaciones, extensiones de la experiencia realizada, las que se pueden convertir en pequeños trabajos de investigación para los estudiantes, en los que ellos apliquen y transfieran lo aprendido a situaciones nuevas.

3. A DISTANCIA

El punto de partida de la educación a distancia es que estudiantes y profesores se encuentran separados físicamente. Se vuelve fundamental la calidad del diseño y de los recursos empleados para el logro de la excelencia de los aprendizajes. En el diseño instruccional del diplomado a distancia de *La ciencia en tu escuela* se consideraron lecturas, dibujos animados, videos, interactivos, entrevistas, actividades individuales o grupales reportadas ya sea por medio de fotografías, de resolución de problemas, de cuestionarios de opción múltiple o de fichas, entre muchas otras formas. También se trató de usar la mayor cantidad de ayuda multimedia, pero sin prescindir de un docente-asesor experto en la disciplina que promueve el trabajo colaborativo (Wikis, foros de discusión, cafeterías virtuales, revisión del trabajo de los compañeros de grupo...) y la comunicación multidireccional (alumno-alumno, alumno-asesor, asesor-alumno).

La ciencia en tu escuela, en su modalidad a distancia, asigna un asesor-docente para un grupo de un máximo de 25 alumnos, con la intención de que se convierta en un creador de situaciones didácticas innovadoras que posibiliten una instrucción individualizada. El asesor se encarga de aclarar dudas respecto a los contenidos, corregir actividades, integrar los equipos de trabajo, proporcionar información al grupo sobre las fechas de entrega de trabajos, tareas y exámenes. Su función es la de un facilitador del aprendizaje que utiliza formas diferentes en la presentación de la información para lograr en los estudiantes aprendizajes significativos, desarrollar habilidades y competencias.

Los docentes que estudian el diplomado no requieren de un horario fijo (por la naturaleza de la educación a distancia) para realizar las actividades, pero sí el cumplimiento en tiempo y forma de los trabajos asignados, ya que un módulo debe ser estudiado dentro de un periodo previamente establecido.

Para implementar el diplomado a distancia, la Academia Mexicana de Ciencias cuenta con un espacio físico que tiene todas las medidas de seguridad necesarias para brindar un funcionamiento óptimo; para esto fue fundamental la asesoría que brindó la Coordinación de Universidad Abierta y Educación a Distancia de la UNAM. El sitio alberga un *cluster* conformado por ocho servidores de alto desempeño. El *cluster* permite la implementación del sistema a distancia y la posibilidad de dar servicio a 6 000 participantes de manera simultánea, es decir, que todos esos participantes pueden estar conectados simultáneamente.

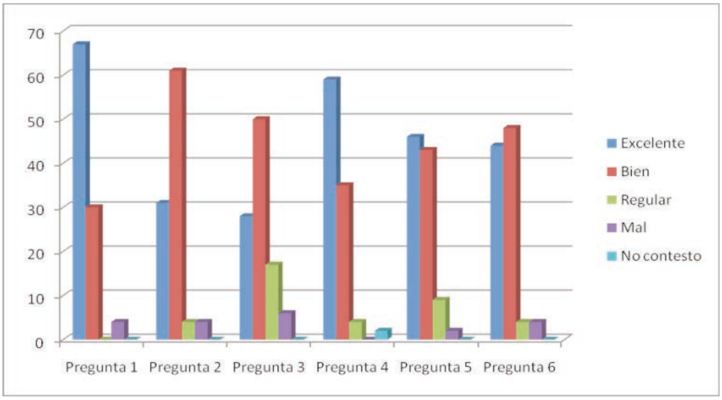
Dentro del programa de formación y después de valorar algunas opciones, se optó en el diseño curricular por el uso y aprovechamiento del *open source Learning Management System* (LMS), concretamente de la plataforma educativa Moodle, por considerarla una herramienta útil y práctica para apoyar la actividad docente a distancia. Sus características de manejo, administración y desarrollo constante la presentan como una excelente opción para trabajar un Entorno Virtual de Enseñanza dentro de la múltiple oferta de LMS existentes, además de que permite crear un ambiente virtual de enseñanza y aprendizaje, así como realizar todo el trabajo a distancia de forma organizada, segura y eficaz.

El diseño de un curso a distancia debe responder también a un enfoque formativo que permita el logro de los propósitos planteados. *La ciencia en tu escuela*, al ser un programa compensatorio de intervención educativa dirigido a mejorar la calidad de la enseñanza de las ciencias y las matemáticas, requiere de asesores que se centren más en el aprendizaje que en la enseñanza; es por ello que el proceso educativo está centrado en los docentes que participan bajo los siguientes supuestos:

- El maestro es un factor de cambio en la percepción que los niños y los jóvenes de las aulas de educación básica tienen sobre estas disciplinas, tradicionalmente consideradas como "difíciles", lo cual parece justificar socialmente el bajo nivel de desempeño de los estudiantes mexicanos en las pruebas internacionales y nacionales estandarizadas. En el programa se pretende influir de manera decisiva en la práctica cotidiana del docente al interior del aula, de forma tal que sea un quehacer sustentado tanto en la comprensión profunda de conceptos matemáticos y de ciencias básicas, como en una concepción didáctica que respete al alumno como constructor de su propio conocimiento.
- Cualquier programa de formación continua para los docentes debe ofrecer experiencias de aprendizaje vivenciales, es decir, actividades indagatorias que les lleven a entrar en conflicto con sus conocimientos previos acerca de los temas curriculares que imparten y lograr que valoren el sentido didáctico de sus propias prácticas, lo que implica el reto de ofrecer nuevas aproximaciones a los contenidos de ciencias y matemáticas y adecuarse a los nuevos enfoques curriculares de reciente implementación por parte de la Secretaría de Educación Pública (SEP). En el programa se desarrollan las competencias indispensables para generar en los maestros la capacidad y la posibilidad de trabajar los contenidos de los programas oficiales de estudio.
- El docente, además de guía, puede constituirse en un modelo a seguir para los estudiantes. El docente es un factor determinante en la percepción del alumno hacia las ciencias y las matemáticas, así como en la calidad de su alfabetización científica. Sin embargo, este mejoramiento no es posible si no se incide, por un lado, en las actitudes y, por otro, en la formación continua a través de experiencias indagatorias que le sean significativas, así como en las condiciones institucionales y estructurales que enmarcan su trabajo. El programa pretende mejorar la actitud hacia las matemáticas y las ciencias y elevar la calidad de enseñanza en las disciplinas científicas.
- Dado el buen resultado que, en la modalidad presencial, ha dado la metodología indagatoria, se decidió usar esta misma metodología en la modalidad a distancia. La elaboración de los guiones instruccionales ha sido laboriosa, pues hay que reflejar la metodología en los materiales y no simplemente poner en línea un libro de texto. El hecho de que el docente tenga un asesor es algo fundamental para que la metodología indagatoria funcione adecuadamente a distancia.

Los maestros pueden influir en muchas generaciones de estudiantes a lo largo de su carrera profesional, en un efecto multiplicador de situaciones de aprendizaje motivadoras, atractivas y plenas de sentido para favorecer una actitud más positiva frente a los contenidos de ciencias naturales y matemáticas que imparten. La labor social del docente es muy importante para la formación de egresados que desarrollen habilidades de pensamiento que les lleven a analizar, comparar, estimar, contar, inferir, registrar datos,

Figura 2 Resultados de la evaluación realizada por las autoridades educativas



formular hipótesis, interpretar evidencias y contar con una serie de herramientas más para conocer el mundo y adoptar una visión crítica de los acontecimientos cotidianos. El programa es un espacio de retroalimentación de saberes entre los docentes encargados de la educación científica a nivel básico y los académicos que diseñan e imparten las unidades y secuencias de aprendizaje, en un círculo virtuoso que crea comunidades de aprendizaje permanente (Bosch, 2011).

La fase piloto del diplomado *La ciencia en tu escuela* a distancia inició en octubre de 2009 con la participación de 650 profesores de educación primaria de todos los estados del país convocados por la SEP. El camino que recorrimos junto con los profesores participantes implicó, para el grupo de técnicos y académicos, un reto que asumimos con gusto y entusiasmo.

Esta experiencia fue evaluada de manera interna y externa en diferentes momentos con el fin de tener elementos concretos para validar la experiencia y permitir llegar a lo que hoy es nuestro espacio de trabajo y así lograr una mayor eficiencia terminal.

Por ejemplo, para conocer las impresiones y experiencias de los estudiantes en torno a contenidos, implementación, asesoría y materiales, al término de la impartición del primer módulo del diplomado, la SEP realizó una evaluación sobre la calidad del diplomado (pregunta 1), el contenido (pregunta 2), la plataforma (pregunta 3), el desempeño de los asesores (pregunta 4), el diseño instruccional (pregunta 5) y las secuencias didácticas (pregunta 6). Los resultados se muestran en la figura 2, y los resultados completos de estas evaluaciones se pueden consultar en la siguiente dirección electrónica: http://www.lacienciaentuescuela.amc.edu.mx/node/48.

Con base en los datos que hemos recolectado, podemos afirmar que los docentes que estudian y aprueban todos los módulos de cualquiera de las propuestas de formación continua que hemos generado, evaluado e impartido han mostrado ser capaces de:

- Familiarizarse con la dinámica y recursos de la educación a distancia.
- Reconocer la estructura de navegación de la plataforma.
- Identificar la distribución de las secciones y elementos de la interfaz.
- Distinguir las características de las herramientas de la plataforma.
- Reconocer la necesidad actual del manejo de herramientas ofimáticas.
- Identificar las diferentes herramientas ofimáticas actuales.
- Distinguir las diferentes herramientas ofimáticas
- Apreciar la necesidad de utilizar correctamente las diferentes herramientas ofimáticas.
- Comprender los contenidos curriculares de ciencias naturales y matemáticas que se estudiaron.
- Optimizar el uso de los materiales didácticos disponibles.
- Desarrollar nuevas experiencias de aprendizaje que motiven el interés personal y el de sus alumnos por los contenidos matemáticos y científicos.
- Transformar las prácticas tradicionales de planeación y evaluación, en procesos basados en la indagación para la construcción de significado.
- Apoyar el uso de la experimentación como recurso didáctico privilegiado para la elaboración de inferencias, identificación de variables, interpretación de evidencias y elaboración de argumentos sobre temas matemáticos y científicos.
- Desarrollar actividades de aprendizaje para replicar, adaptar y mejorar de acuerdo con el contexto de su salón de clases.
- Promover entre los estudiantes un aprendizaje significativo para evitar la memorización sin comprensión.
- Apreciar las matemáticas y las ciencias en función de su utilidad, poder, belleza y relación con otras actividades presentes en lo cotidiano.
- Aplicar los conocimientos adquiridos en contextos y situaciones diversas.
- Construir significados a través de procedimientos deductivos, así como la conciencia de éstos.
- Reconocer la necesidad de propiciar que los alumnos elaboren y validen conjeturas cuando intentan resolver problemas matemáticos, y conocer estrategias didácticas que permitan propiciar que los niños conjeturen.

Como una acción para mejorar la eficiencia terminal del programa, durante el 2011 se realizaron los trámites necesarios para que la Dirección General de Formación Continua para Maestros en Servicio (DGFCMS) de la SEP validara el diplomado *La ciencia en tu escuela* y se logró obtener el registro ante esa dirección general. *La ciencia en tu escuela* cuenta hoy con una oferta de cursos modulares independientes y seriados para ofrecer a los docentes una oferta de estudio diversificada, organizada y sistemática que les permite avanzar en su trayectoria académica a través de un modelo de validación de créditos. Al estudiar los módulos que tenemos diseñados a distancia, los docentes de educación primaria pueden lograr: un diplomado general de ciencias y matemáticas de 185 horas, un diplomado con énfasis en ciencias de 120 horas, un diplomado con énfasis en matemáticas de 120 horas y una especialidad de ciencias y matemáticas de 280 horas; todo esto validado, como ya se indicó, por la DGFCMS de la SEP. Esa misma dirección tiene también validado un diplomado general de ciencias y matemáticas para profesores de educación secundaria de 120 horas. Los trayectos formativos correspondientes pueden consultarse en el anexo.

4. ALGO DE MATEMÁTICAS PARA SECUNDARIA

En el módulo general de matemáticas de *La ciencia en tu escuela* a nivel secundaria, se tienen cuatro sesiones que se relacionan con aplicaciones de las matemáticas a las ciencias: Matemáticas y Geografía, Matemáticas y Física, Matemáticas y Biología, Matemáticas y Química. Este módulo lo cursan todos los maestros que llevan el diplomado, independientemente de su especialidad; participan maestros de matemáticas, biología, geografía, física y química. Aquí encontrará el lector una muestra de los materiales que los maestros trabajan en las sesiones presenciales del diplomado y a los que pronto también podrán acceder a través del trabajo que se está haciendo para que el diplomado se pueda llevar a distancia y así tengan acceso a éste un mayor número de maestros. A continuación presentamos el escrito de la sesión de Matemáticas y Geografía que se les entrega a los maestros al final de la sesión y que es una guía para el expositor de dicha sesión; en ella, con itálicas, encontrará el lector comentarios sobre las actitudes y reacciones de los maestros al enfrentarse a estas actividades.

Sesión general: matemáticas y geografía

Objetivos

- Aclarar que la geometría plana y la geometría en la esfera tienen distintas propiedades.
- Comparar la suma de los ángulos internos de un triángulo en ambos casos.
- Poner coordenadas en la esfera-Tierra.
- Calcular el radio de la Tierra y aplicar ese método para calcular el radio de alguna otra esfera.

I. Introducción

Un problema muy conocido es el siguiente: Un cazador va persiguiendo a un animal que primero corre hacia el sur 1 km, luego 1 km hacia el este y finalmente otro kilómetro hacia el norte. Como resultado, el animal termina su recorrido en el punto que empezó. La pregunta usual es: ¿a qué animal está persiguiendo el cazador?

En general, los maestros se quedan perplejos al pensar que en matemáticas se les plantee un problema así, ya que muchas veces se piensa que las matemáticas se refieren más a cuentas y a procesos más mecánicos.

Incluso se han tenido protestas en el salón de clases de algún participante que cree que se le está tomando el pelo.

Los pocos maestros que empiezan a tratar de resolver no piensan en que la Tierra es una esfera, y se plantean el problema en el plano. Es importante orientarlos para que, en efecto, se planteen el problema en la Tierra.

Ésta es la primera etapa de la metodología indagatoria: hay que resolver una pregunta y se expresan todas las ideas previas; éstas son el punto de partida para la experimentación.

En este momento se les proporciona una pelota grande (aproximadamente de unos 35 cm de radio).

En la etapa de exploración se inicia la discusión. Se plantea la siguiente cuestión: "Haz un dibujo en la pelota y descríbelo de modo que tus compañeros lo puedan reproducir de manera idéntica en su pelota". Se inicia entonces una discusión acerca de la orientación sobre la pelota y los "polos".

Luego de realizada esta "experiencia", algunos maestros empiezan a pensar en un modelo donde la pelota represente a la Tierra y es el momento para darles la oportunidad de que repiensen el problema inicial sobre la pelota como modelo de la Tierra. Es una etapa de reflexión, comparación o contraste; se confrontan las predicciones realizadas (los maestros empiezan por decir que el problema ni siquiera tiene sentido) con los resultados obtenidos (algunos maestros trazan algunos trayectos sobre la pelota hasta que al empezar en el Polo Norte ¡¡¡regresan al Polo Norte!!!). Se elaboran conclusiones propias respecto al problema analizado. Se empieza a hablar de meridianos y paralelos. Finalmente se discuten las soluciones propuestas. Es importante insistir que para explicar el problema es necesario ser muy preciso en la forma de expresarse.

Sorpresa para los maestros, pues se les hace una nueva pregunta: "...y si solamente se quiere ir 1 km hacia el sur, otro hacia el este y otro hacia el norte y regresar al punto de partida, ¿habrá algún otro punto en la Tierra donde se pueda hacer eso?"

Ahora regresan a la pelota para tratar de hacer el trayecto en puntos específicos de la pelota. Con un poco de ayuda resuelven también ese problema.

En general, los maestros –y no únicamente ellos– no están acostumbrados a que un problema tenga soluciones múltiples y, al entender que en el Polo Sur hay muchas soluciones, varios de ellos quieren dar una nueva solución empezando en *algún punto específico, sin darse cuenta de que las soluciones son esencialmente del mismo tipo.*

Con esta actividad se les abre a los maestros un nuevo panorama y, hasta los más molestos que al principio se negaban a aceptar como matemático el problema planteado, quieren participar activamente. Usualmente empiezan a tratar de encontrar nuevas soluciones y posibilidades que se discuten y analizan.

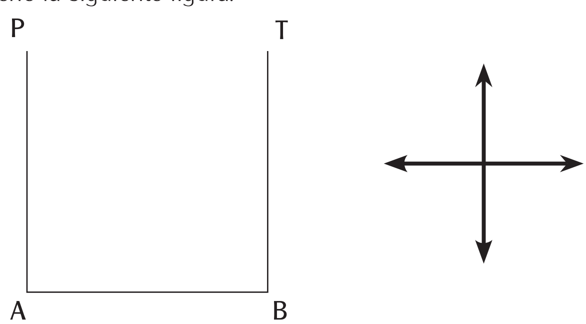
Se hacen preguntas ahora sobre si se puede o no resolver este problema en el plano, ya desde el punto de vista matemático sin involucrar al oso. ¿Será posible encontrar una trayectoria que empieza en un punto, recorre un segmento de una unidad, gira 90º, recorre un segmento de una unidad en esa dirección, vuelve a girar 90º, recorre un segmento de una unidad y regresa al punto de partida? La respuesta casi inmediata de los maestros es que no es posible. Y cuando se les pregunta por qué, lo más común es que se quedan pasmados pues no piensan en triángulos.

Después de estas discusiones, es el momento de recapitular lo que se ha discutido y qué matemáticas han hecho falta. Esta parte es muy importante ya que aunque los maestros las conocen, muchas veces las tienen únicamente para uso escolar y no para resolver problemas. Si el tiempo para trabajar es amplio, conviene que sea alguno de los maestros el que vaya escribiendo en el pizarrón las cosas que fueron descubriendo y que los demás le ayuden a hacer el resumen de lo que se usó. Nuevamente, es muy importante que en el pizarrón haya orden y se expresen con precisión los conceptos y las propiedades que se usaron.

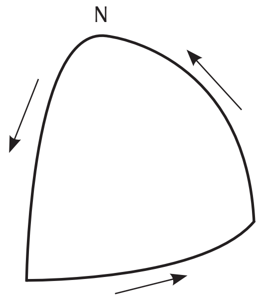
Después de la sesión se les entrega a los maestros un documento, como el que aparece a continuación, para que tengan un resumen de la actividad y de las matemáticas utilizadas.

Un problema muy conocido es el siguiente: Un cazador va persiguiendo a un animal que primero corre hacia el sur 1 km, luego 1 km hacia el este y finalmente otro kilómetro hacia el norte. Como resultado, el animal termina su recorrido en el punto que empezó. La pregunta usual es: ¿a qué animal está persiguiendo el cazador?

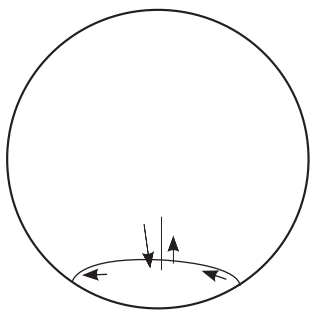
Es claro que este problema no se puede resolver en el plano pues resulta que si se camina hacia el sur 1 km, luego 1 km hacia el este y finalmente otro kilómetro hacia el norte, se obtiene la siguiente figura:



Observemos que esa figura no tiene la propiedad de que empieza y termina en el mismo punto, pues los ángulos denotados con las letras A y B son ángulos de 90º y, como en un triángulo la suma de los ángulos interiores es de 180º, resulta que las rectas AP y BT son rectas paralelas que en la geometría euclidiana no se van a intersectar. Eso quiere decir que el animal no regresa al punto donde salió. La geometría que usamos en la vida diaria es la geometría euclidiana, que se desarrolla en el plano. Esa geometría es la que sirve en general, a nivel humano, para construir casas, calles, anuncios espectaculares, mesas, coches, fuentes... Sin embargo, desde hace muchos años, los humanos –en particular los navegantes– saben que la Tierra es redonda. Regresemos entonces al problema que planteamos al principio, estamos seguros que ya tienen ustedes una respuesta. En efecto, el animal puede ser un oso blanco, pues una forma de hacer el recorrido es empezando en el Polo Norte como se indica en la figura:



Bueno, ésa es la respuesta que pretende este problema, pero no es la única respuesta. En efecto, si buscamos ahora en el Polo Sur un paralelo, un círculo que tenga el centro en el eje de la Tierra y que tenga longitud de 1 km sobre la superficie de ésta, tendremos la situación que se ilustra en la siguiente figura:



Polo Sur

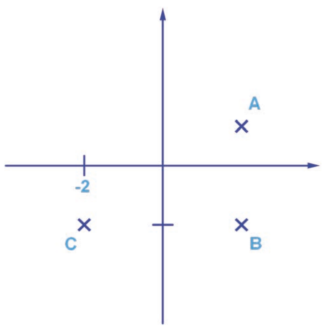
Como se ve, el punto de salida puede colocarse en cualquiera de los puntos que están en el paralelo, que corresponde al punto inicial, teniendo así una infinidad de posibilidades. Más aún, podemos ahora buscar un paralelo cuya longitud sea de 250 m, por ejemplo, y a partir de un punto que se encuentre a 1 km hacia el norte de ese paralelo, empezar el recorrido. Así se camina hacia el sur un kilómetro hasta llegar al paralelo de longitud 250 m y luego se dan cuatro vueltas alrededor de ese paralelo caminando siempre hacia el sur, para después caminar hacia el norte regresando al punto de partida.

Como vemos, cercanos al Polo Sur tenemos muchas posibilidades, pero ¡ahí no hay osos, sino pingüinos! Así que la solución adecuada para el problema es la primera que se discutió.

Como acabamos de ver, la geometría sobre la Tierra –es decir, sobre la superficie de una esfera– es muy diferente a la geometría que se hace en el plano. En particular si vemos la figura 1, entonces podemos tener "triángulos que tienen tres ángulos rectos" y, por lo tanto, la suma de sus ángulos internos es de 270º, mayor que la suma de los ángulos internos de un triángulo en el plano donde es de 180º. Ésa es una de las grandes diferencias geométricas que hay entre la geometría plana y la geometría esférica.

Actividad

Al plano cartesiano (plano euclidiano) se le dota de un sistema de ejes coordenados para localizar los puntos. Éstos se caracterizan por parejas ordenadas, como por ejemplo: el punto A corresponde a (2,1) y el B a (-2, -1.5). En la siguiente figura se han colocado en un plano cartesiano los puntos A, B y un punto C del cual se quiere obtener sus coordenadas.



¿Qué coordenadas corresponden al punto C? (,   )

De manera análoga, también se coloca un sistema de coordenadas en la superficie de la Tierra. Se usan el ecuador y el meridiano que pasa por Greenwich como los ejes coordenados.

Investigue y escriba lo siguiente:

¿Qué son los paralelos? ____

¿Qué son los meridianos? ____

¿Qué es la latitud? ____
¿Qué es la longitud? ____

Es importante que los maestros escriban lo que creen que es cada uno de esos conceptos, pues en general les cuesta mucho trabajo dar definiciones precisas.

La siguiente tarea es algo sencillo y representa solamente un recuento de nombres que los maestros en general conocen, aunque no todos; recordemos que en esta sesión hay maestros de matemáticas, biología, física, geografía y química.

Tarea:

El círculo y la esfera

Un círculo queda determinado en cuanto sepamos su centro y su radio, y algo similar sucede con una esfera. Conteste las siguientes preguntas:

¿Cómo se puede calcular la longitud de la circunferencia de un círculo cuyo radio sea r? ____
¿Qué longitud tiene la mitad de esa circunferencia? ____________________________
¿Qué es un ángulo central en un círculo?____
¿Qué ángulo central corresponde a media circunferencia? _______________________
¿Qué proporción es dicho ángulo respecto a 360º?_______________________________
¿Qué longitud tiene la octava parte de una circunferencia? ______________________
¿Qué ángulo central corresponde a un octavo de circunferencia?_________________
¿Qué proporción es dicho ángulo respecto a 360º?_______________________________
¿Qué longitud le corresponde a un ángulo central de 90º? _______________________
¿Qué longitud le corresponde a un ángulo central de 60º? _______________________
Si el ángulo central correspondiente tiene medida x, ¿qué longitud tendrá el arco de circunferencia de radio *r*?____

El siguiente problema de proporciones es difícil para algunos maestros.

Chicago y Estambul se encuentran en el mismo paralelo, el cual tiene un radio de 4,000 km. Entre ambas ciudades hay un ángulo de 120º. Encuentre la longitud del arco a lo largo de ese paralelo que separa a las dos ciudades. _________________
____
____

El número π *es de gran interés para la mayoría de los maestros y se les puede pedir que hagan algún tipo de trabajo sobre éste. Basta con darles algunos datos, como los siguientes, para que ellos investiguen y presenten trabajos interesantes.*

Nota: El símbolo π se originó en Inglaterra en el siglo XVIII.

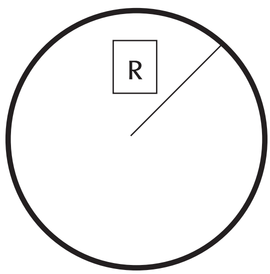
La historia de π es algo que a los maestros les llama mucho la atención, por lo que se les recomienda que muestren a sus alumnos el objeto de aprendizaje (ODA) que está en la página del Sistema Nacional de Educación a Distancia (SINED), en donde además podrán encontrar otras ayudas a través de la red.

Todos estos conceptos y definiciones los manejan bien, en general, para un círculo pero no en la esfera. Así, cuando se les pide la longitud del arco de círculo entre Chicago y Estambul les cuesta mucho trabajo usar proporciones.

Se propone a los maestros la siguiente actividad y se les ayuda con la parte histórica del cálculo del radio de la Tierra hecho por Eratóstenes. Aunque ésta es una actividad más guiada, a los maestros les agrada mucho poder repetir los cálculos hechos por Eratóstenes y usar su método para calcular el radio de una pelota grande.

II. La Tierra y su radio

Para calcular distancias sobre la Tierra es necesario usar el radio de ésta. Así que la pregunta que ahora vamos a tratar de resolver es, ¿cuánto vale el radio de la Tierra y cómo podemos nosotros calcularlo?



Como la Tierra es una esfera y queremos saber cuál es su radio, debemos de encontrar un método para calcularlo.

Eratóstenes (276 a.n.e.-194 a.n.e.) fue un matemático, astrónomo y geógrafo griego. Fue gran amigo de Arquímedes. Desde 236 a.n.e. hasta su muerte se hizo cargo de la biblioteca de Alejandría. A la edad de 80 años perdió la vista y a partir de ahí se descuidó hasta morir a los 82 años.

Eratóstenes poseía una gran variedad de conocimientos y aptitudes para el estudio; sin embargo, dicen que siempre ocupó el segundo lugar en todas las ramas de la ciencia que cultivó. En astronomía inventó algunos aparatos que sirvieron durante varios siglos para distinto tipo de mediciones. En matemáticas, tal vez su contribución más conocida sea la criba de Eratóstenes para obtener los números primos. En geografía, con un ingenioso método y muchos cálculos, dio una muy buena aproximación al radio de la Tierra. Hace más de dos mil años, Eratóstenes calculó el radio de la Tierra con un método muy ingenioso. Pensó que dos palos clavados sobre la superficie de la Tierra, alejados de una distancia considerable, darían sombras de distinto tamaño en virtud de la curvatura de la superficie del planeta.

Una misma estaca da sombra de distinto tamaño si ésta se clava en distinto lugar sobre el mismo meridiano a la misma hora.

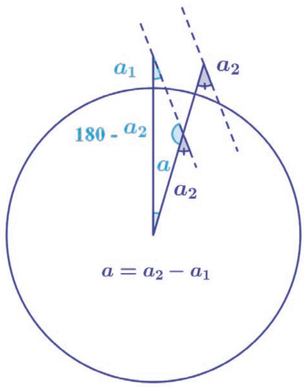
Ahora, si nos fijamos en la siguiente figura, podemos obtener, usando el hecho de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180º, la relación que se indica entre los ángulos a_1 y a_2.

$$a_1 + 180 - a_2 + a = 180, \quad \text{es decir:} \quad a_1 - a_2 + a = 0, \quad \text{o sea:} \quad a = a_2 - a_1$$

Si tenemos ahora una forma de calcular a y conocemos la distancia entre los dos palos, la cual denotaremos por d, podemos entonces calcular la longitud de la circunferencia de la Tierra usando las siguientes proporciones:

Sea L la longitud de la circunferencia de la Tierra:

360 grados corresponden a L kilómetros
a grados corresponden a d kilómetros



Entonces, calcular la longitud de la circunferencia de la Tierra usando las siguientes proporciones:

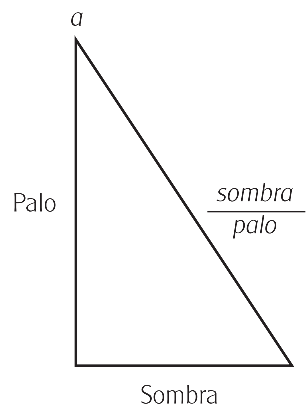
De donde se tiene la proporción $360/a$ y L/d y así se obtiene una fórmula para calcular la circunferencia de la Tierra, de donde es inmediato dividiendo entre 2 el radio de la Tierra.

Eratóstenes usó esencialmente este método con una pequeña variante que, en parte, le facilitó los cálculos. Supuso que Asuán y Alejandría tenían la misma longitud (realmente distan 3º) y que el Sol se encontraba tan alejado de la Tierra que sus rayos podían suponerse paralelos (lo cual también es una de las suposiciones anteriores, aunque no se hace explícita). Así fue como decidió medir la sombra de un palo o una estaca de la misma longitud en Alejandría y en Asuán el día del solsticio de verano, al mediodía (ésta es la diferencia). Se dio cuenta que la sombra de dicho palo era diferente en Asuán y en Alejandría y utilizó esta peculiaridad para calcular primero el ángulo central a que hay entre Alejandría y Asuán y luego el radio de la Tierra de la siguiente manera. De hecho, en Asuán no hay sombra a las 12 de ese día, es decir, la longitud de la sombra en ese día particular es nula debido a que Asuán está sobre el trópico de Cáncer, entonces el ángulo a lo puede determinar directamente del palo que clavó en Alejandría y su sombra, y un poco de trigonometría, o midiéndolo directamente. El hecho es que ese ángulo es de aproximadamente 7º. Para saber la distancia entre Alejandría y Asuán, Eratóstenes les pidió a las caravanas que comerciaban entre ambas ciudades que le dieran una estimación. Cinco mil estadios –unos 800 km– fue la distancia acordada, y usando eso obtuvo que la circunferencia era aproximadamente de 40 000 km. De ese modo, el diámetro en números redondos era de 13 100 y el radio de 6 550 km.

En la actualidad, se dice que el radio de la Tierra es de 6 371 kilómetros, es decir, que el error de Eratóstenes con sus aproximaciones y mediciones fue de menos del 1%.

Durante el año internacional de la astronomía, en 2009, entre las actividades de grupo que realizaron en España estuvo la de calcular el radio de la Tierra. Nosotros también lo podemos hacer siguiendo un método parecido al que indicamos anteriormente. Bastaría con conseguir a alguien que viva a más de 50 km de donde se encuentra y pedirle que un día acordado haga las mediciones necesarias, o bien hacer la medición durante el solsticio de verano y determinar la distancia que existe entre su ciudad y el trópico de Cáncer; por ejemplo, Durango se encuentra a una distancia de 80 km del trópico de Cáncer. Mientras más lejos esté la otra persona o más separados del trópico de Cáncer se hagan las mediciones, se obtendrá mayor precisión. Si hay más participantes será mejor, pues los errores de medición se minimizan.

1. Deberíamos primero de acordar un día y una hora para hacer la medición.
2. Usar el mismo tamaño de palo. En España, para minimizar errores al respecto, usaron un recogedor cuyo palo es de la misma longitud y gracias a eso todos los participantes tenían las mismas medidas y no tenían necesidad de clavar el palo.
3. Medir la sombra con la mayor precisión posible a la misma hora (las dos personas o a la hora del solsticio de verano).
4. Para determinar los ángulos a_1 y a_2 en un caso, y a en el otro, es importante o bien medirlos, lo cual es extremadamente difícil, o bien usar la trigonometría, en particular la función tangente y luego la inversa de la siguiente manera:



$$\frac{sombra}{palo} = \text{Tangente del ángulo } a$$

5. Una vez teniendo la tangente de a, hay que buscar el valor en las tablas trigonométricas o usar una calculadora para obtener el valor del ángulo a. Un método idéntico se hace para los ángulos a_1 y a_2. Y luego se restan para obtener el valor de a.

Aunque los maestros conocen algo de trigonometría no se sienten totalmente a gusto con su uso, por lo que tal vez aquí sea un buen momento para hacer una revisión de dicho tema.

6. Ahora hay que determinar la circunferencia de la Tierra usando los datos obtenidos.
7. Finalmente se puede obtener el radio de la Tierra.

Mientras más mediciones se tengan, se podrá obtener una mejor aproximación, por ejemplo, haciendo promedios de los resultados obtenidos.

En varias ocasiones, los maestros han comentado que si la Tierra fuese plana, el método de Eratóstenes no funcionaría, y en ese instante sé que al menos a esos maestros les he enseñado algo.

En la sesión se pide a los maestros que calculen el radio de una pelota (grande) que se entrega a cada tres maestros. Se les pide que lo hagan de varias maneras diferentes, una de ellas siguiendo el método de Eratóstenes con unos palitos y sombras.

Después de esta explicación del trabajo de Eratóstenes, se proporciona a los alumnos pelotas grandes y se les pide que, usando este método, calculen el radio de esa pelota. Esta actividad les gusta mucho a los maestros, quienes salen con su pelota y regla, palillos o lápices que les servirán de estacas y se ponen en equipos a hacer sus mediciones para calcular el radio de su pelota. A pesar de que hacen con cuidado todo lo necesario para obtener el radio de la pelota, los reportes que presentan no son tan cuidadosos y los cálculos o mediciones a veces ni siquiera aparecen. Tenemos que hacer mucho énfasis en que la presentación de los resultados, así como las mediciones o los cálculos, son fundamentales en los reportes.

5. A MANERA DE CONCLUSIÓN

Lo que acabamos de exponer usa herramientas que se encuentran en los programas de estudio de matemáticas. En los aprendizajes esperados se intenta ir más allá, se trata de desarrollar competencias cuyo desarrollo derive en ser competente en matemáticas. En los programas se hace referencia únicamente a cuatro competencias claras y distintas entre sí: el planteamiento y la resolución de problemas, la argumentación, la comunicación y el manejo de técnicas. La metodología didáctica de los programas de matemáticas está orientada al desarrollo de estas competencias y por eso exige dejar atrás la postura tradicional que consiste en dar clases a los alumnos explicando paso a paso lo que deben hacer y de donde no se deben apartar.

Para la evaluación se propone seguir las siguientes líneas como indicadores de la adquisición de las competencias:

- De resolver con ayuda a resolver de manera autónoma.
- De los procedimientos informales a los procedimientos expertos.
- De la justificación pragmática a la justificación axiomática.

Sin embargo, los maestros de educación básica no han recibido la preparación necesaria para poder guiar a sus alumnos de la forma en que se pretende en los programas. Por eso, *La ciencia en tu escuela* y su metodología indagatoria se ha vuelto una opción para aquellos maestros que desean entender mejor las ciencias y las matemáticas, y así poderlas enseñar mejor. Los maestros en nuestros diplomados hacen ciencias y matemáticas para poder enseñar ciencias y matemáticas.

Es claro que todo esto requiere de esfuerzo e implica un cambio importante de actitud, y eso no se da de un día para el otro, ni entre los profesores ni entre los alumnos. Pero si realmente se quiere obtener mejores resultados en los aprendizajes, es indispensable desarrollar competencias y revalorar el trabajo del docente.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mis colaboradoras Silvia Romero y Carmen Villavicencio el excelente trabajo que llevan a cabo en *La ciencia en tu escuela*. También quiero agradecer las sugerencias y correcciones hechas por los árbitros.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bosch, C. (2011), *Del origen al paralelismo educativo. La ciencia en tu escuela*, México, Academia Mexicana de Ciencias.

Díaz Barriga, F. y G. Hernández (1998), *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*, México, McGraw-Hill.

Kolb, D. A. (1984), *Experiential learning: Experience as the source of learning and development,* New Jersey, Prentice-Hall.

Mortera, F. (2002), *Educación a distancia y diseño instruccional. Conceptos básicos, historia y relación mutua*, México, Ediciones Taller Abierto.

Piaget, J. (1950), *Introduction a L'Epistemologie Genetique. Tome I, La pensé Mathématique* París, Presses Universitaires de France. Disponible en: "http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/textes/index_livres_alpha.php"

Song, L., E. Singleton, J. Hill y M. Hwa Koh (2004), "Improving online learning: Student perceptions of useful and challenging characteristics", *The Internet and Higher Education*, vol. 7, núm. 1, pp. 59-70. [http://esinglet.myweb.uga.edu/portfolio/singleton_ihe.pdf]

La ciencia en tu escuela, www.lacienciaentuescuela.edu.mx

ANEXO. TRAYECTOS FORMATIVOS DE LOS DIPLOMADOS "LA CIENCIA EN TU ESCUELA"

Presencial

Diplomado para Primaria - 32 semanas - 160 horas

El diplomado presencial para primaria se imparte en el Centro de Estudios para Extranjeros (CEPE) de la UNAM en Ciudad Universitaria, en sesiones sabatinas matutinas, a lo largo de 32 semanas, de acuerdo al calendario escolar de la SEP. El diplomado está conformado por los siguientes módulos:

Matemáticas (8 semanas - 40 horas)
Ciencias 1 (8 semanas - 40 horas)
Ciencias 2 (8 semanas - 40 horas)
Desarrollo de habilidades comunicativas (8 semanas - 40 horas)

Diplomado para Secundaria - 32 semanas - 160 horas

El diplomado presencial para secundaria se imparte en el CEPE de la UNAM en Ciudad Universitaria, en sesiones sabatinas matutinas, a lo largo de 32 semanas, de acuerdo al calendario escolar de la SEP. El diplomado está conformado por los siguientes módulos:

Módulo general: matemáticas, química, física, biología y geografía (60 horas)
Módulo de especialidad (50 horas)
Historia de la ciencia (20 horas)
Cómputo (10 horas)
Desarrollo de habilidades comunicativas (20 horas)

A distancia

Solamente pondremos aquí los trayectos del diplomado para primaria y del diplomado con énfasis en matemáticas. Sin embargo, también hay un diplomado con énfasis en ciencias para primaria y otras posibilidades para secundaria de las que no hablaremos por el momento.

Diplomado para Primaria - 33 semanas - 170 horas

Para el diplomado modalidad a distancia para primaria, el entorno de trabajo en el que se llevarán a cabo las actividades académicas del diplomado es la plataforma Moodle. Este diplomado está diseñado en cinco módulos con una duración de 33 semanas, de acuerdo al calendario escolar de la sep. Estos módulos son:

Propedéutico (1 semana - 10 horas)
Matemáticas (8 semanas - 40 horas)
Desarrollo de habilidades comunicativas (8 semanas - 40 horas)
Ciencias 1 (8 semanas - 40 horas)
Ciencias 2 (8 semanas - 40 horas)

Diplomado con Énfasis en Matemáticas - 33 semanas - 120 horas

Para el diplomado modalidad a distancia para primaria, el entorno de trabajo en el que se llevarán a cabo las actividades académicas del diplomado es la plataforma Moodle. Este diplomado está constituido por tres cursos independientes cuya impartición se dosifica en 33 semanas calendarizadas, tomando en cuenta el calendario escolar de la SEP. Si se considera estudiar este diplomado como primera opción del trayecto formativo, el contenido es:

Introductorio (11 semanas - 40 horas)
Matemáticas 1 (11 semanas - 40 horas)
Matemáticas 2 (11 semanas - 40 horas)

DATOS DEL AUTOR

Carlos Bosch Giral
Instituto Tecnológico Autónomo de México, México
bosch@itam.mx

Parte II
Aproximaciones teóricas en la educación matemática

Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas

Josep Gascón

La filosofía de la ciencia sin la historia de la ciencia es vacía;
la historia de la ciencia sin la filosofía de la ciencia es ciega.
Imre Lakatos (1971/1982)

Resumen: La construcción de modelos epistemológicos de referencia ha permitido la emancipación de la didáctica de las matemáticas respecto de los modelos epistemológicos dominantes en las diversas instituciones que forman parte de su objeto de estudio y ha hecho visibles nuevos fenómenos didácticos poniendo así de manifiesto la incidencia de la epistemología sobre la didáctica. Estas mismas herramientas pueden utilizarse para posibilitar la emancipación epistemológica de la historia de las matemáticas y para reinterpretar los hechos históricos. Recíprocamente, las investigaciones históricas (así como las investigaciones didácticas) pueden evaluar y corregir los modelos epistemológicos específicos de un ámbito de la actividad matemática.

Palabras clave: emancipación epistemológica, fenómenos didácticos, historia de las matemáticas, modelos epistemológicos de referencia.

Abstract: The construction of reference epistemological models enables the emancipation of the Didactics of Mathematics from the epistemological models prevailing in the different institutions that are part of Didactics' objects of study. It also makes new didactic phenomena visible, thus highlighting the incidence of Epistemology on Didactics. The same tools can be used to enable the epistemological emancipation of the History of Mathematics and to reinterpret historical facts. Reciprocally, historical research (and didactics research) can evaluate and correct the local epistemological models specific of a given domain of mathematics.

Keywords: epistemological emancipation, didactic phenomena, History of Mathematics, reference epistemological models.

Fecha de recepción: 11 de agosto de 2013; fecha de aceptación: 15 de noviembre de 2013.

1. ORIGEN Y ALCANCE DEL PROBLEMA DE LA EMANCIPACIÓN DE LA DIDÁCTICA

El punto de partida de este trabajo lo constituye el problema de la emancipación epistemológica e institucional de la *didáctica de las matemáticas* con respecto a las instituciones que sirven de hábitat a sus objetos de estudio y que, como tales instituciones, también acaban constituyéndose en objetos de estudio de la didáctica. Este problema aparece por primera vez en los trabajos de Chevallard sobre los fenómenos de transposición didáctica (Chevallard, 1985/1991; Bosch y Gascón, 2007) y está asociado inicialmente al esfuerzo por liberar las investigaciones didácticas de la sujeción a los códigos de la escuela y, en particular, a los que rigen la relación de ésta con las matemáticas como disciplina escolar.

En la conferencia de clausura del Primer Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico, celebrado en Baeza (Jaén) a finales de 2005, Chevallard volvió explícitamente sobre este problema considerándolo, junto al problema de la difusión (y la no difusión) de las praxeologías didácticas, como uno de los grandes problemas que han constituido la razón de ser de la *teoría antropológica de lo didáctico* (en adelante, TAD) (Chevallard, 2007).

En efecto, para tomar los procesos de transposición didáctica como objeto de estudio, el didacta necesita analizar de manera crítica los modelos epistemológicos de las matemáticas dominantes en las instituciones involucradas y liberarse así de la asunción acrítica de dichos modelos. En esto consiste la *emancipación epistemológica*, mientras que la *emancipación institucional* hace referencia a la necesidad del didacta (y de la ciencia didáctica) de liberarse de las dependencias que acarrean la posición de "profesor" (sujeto de cierta institución escolar), la de "noosferiano" (sujeto de la noosfera, esto es, autor de libros de texto, de planes de estudio, de documentos curriculares, de textos de formación del profesorado, etc.) e, incluso, la de "matemático guardián de la ortodoxia" (sujeto de la institución productora y conservadora del saber). Obviamente la emancipación epistemológica constituye un aspecto particular, un primer paso esencial, de la emancipación institucional que podría definirse, en general, como la liberación de la sujeción a la ideología dominante en las instituciones que forman parte de su objeto de estudio, esto es, la emancipación no sólo del provincianismo epistemológico, sino también de todo provincianismo didáctico, pedagógico y cultural.

Las cuestiones derivadas que surgen de la toma en consideración de este problema son múltiples. En primer lugar aparece el problema de la *construcción de las herramientas teóricas y metodológicas* que se requieren para hacer posible la emancipación de la didáctica de las matemáticas como disciplina. Se trata de un problema central para el desarrollo de la didáctica del que nos ocuparemos con cierto detalle en lo que sigue. Pero, más allá de este problema, surge la cuestión del alcance y los límites de la citada emancipación. En efecto, dado que la emancipación epistemológica requiere, en particular, que el didacta analice críticamente la división de la matemática escolar en *áreas* y las sucesivas subdivisiones en *sectores* y *temas*,[1] así como la estructura y el contenido de cada uno de ellos, ¿por qué debería asumir el didacta la *clasificación escolar de las disciplinas* y la correspondiente compartimentación del saber enseñado?

De hecho, en sus últimos trabajos, Chevallard propugna muy claramente la necesidad que tiene la didáctica de emanciparse de la subordinación a las disciplinas enseñadas, hasta el punto de considerar la sujeción a éstas como un *obstáculo al desarrollo científico de la didáctica*. Surge así una forma radical de interpretar la emancipación institucional que, más allá de propugnar una posición de *didacta de las matemáticas* liberado de los condicionantes institucionales citados, defiende la construcción de una *ciencia didáctica* sin adjetivos, que no tenga ningún tipo de sujeción particular a ninguna de las disciplinas escolares (Chevallard, 2006).

Así, mientras que Guy Brousseau siempre ha defendido que la didáctica de las matemáticas debería mantenerse muy cercana a las propias matemáticas sin renunciar a la ambición de llegar a ser ella misma una disciplina matemática (Brousseau, 1996), Chevallard postula que el objeto de estudio de cualquier disciplina científica, su *especificidad* como tal disciplina, no está dado de antemano, debe construirse de manera autónoma por la comunidad científica involucrada. Así, propone definir el objeto de estudio de la *ciencia didáctica* o de las *ciencias didácticas* (utilizando el plural en el mismo sentido que se utiliza para hablar de *ciencias matemática*s, *ciencias físicas* o *ciencias biológicas*) de forma completamente independiente de las cambiantes disciplinas escolares (Chevallard, 2006).

Esta forma radical de considerar la emancipación de la didáctica provoca indirectamente la emergencia de nuevas cuestiones relativas a la emancipación de aquellas disciplinas que, como la *historia de las matemáticas*, comparten con la didáctica de las matemáticas un mismo ámbito empírico: la génesis, el desarrollo y la difusión de la actividad matemática (lo que no significa que estudien los mismos fenómenos ni que formulen los mismos tipos de problemas de investigación). Así, al plantear el problema de la emancipación institucional de la historia, surge la cuestión sobre cuál sería el recorte adecuado de su objeto de estudio: ¿por qué restringirse al ámbito de la historia de las *matemáticas* y no proponer el problema más amplio de la emancipación institucional de la historia de la *ciencia* (o incluso de la *historia* sin más)? Se trata de una cuestión que, inevitablemente, debe plantearse en alguna medida todo historiador de la ciencia:

> Siempre que se estudie la historia del desarrollo científico habrá de encontrarse repetidas veces, y en una u otra forma, la cuestión de si las ciencias son una o son muchas. [El historiador de la ciencia], ¿debe abordar las ciencias una por una comenzando, por ejemplo, con las matemáticas, siguiendo con la astronomía, luego con la física, la química, la anatomía, la fisiología, la botánica, etc.? ¿O debe rechazar la idea

[1] La subdivisión de la disciplina escolar en *áreas*, *sectores*, *temas* y *cuestiones* es relativa a una institución escolar y a un periodo histórico concreto y hace referencia a los niveles en los que se estructura la disciplina "matemáticas" en la escala de codeterminación didáctica (Chevallard, 2002).

> de que su objeto sea una descripción compuesta de los campos individuales para hablar entonces del mero conocimiento de la naturaleza? (Kuhn, 1977/1983, p. 56)

La respuesta de Kuhn a estas cuestiones alude al problema clásico de la unidad o multiplicidad de la ciencia[2] y, por otra parte, empieza a sugerir la necesidad de cierta *emancipación institucional del historiador de la ciencia:*

> Se trata de dos tradiciones historiográficas distintas y poco comunicativas (Ibíd., p. 57) [...] Los historiadores que deseen iluminar el desarrollo científico real tienen que detenerse en un difícil terreno intermedio entre las dos opciones tradicionales. Esto es, no pueden suponer que la ciencia sea una sola, pues claramente no lo es. Pero tampoco pueden dar por sentadas las subdivisiones de la materia de estudio comprendidas en los textos de ciencia contemporáneos y en la organización de los departamentos de las universidades de la actualidad. (Ibíd., pp. 58-59)

En resumen, y situándonos en ese difícil terreno intermedio al que se refería Kuhn, pretendemos:

1. Explicitar el *carácter fenomenotécnico de las ciencias* (en particular de la didáctica y la historia), mostrando que los instrumentos que les proporcionan la capacidad de producir fenómenos son, en gran medida, los que posibilitan su emancipación epistemológica (apartado 2).
2. Describir las funciones de los *modelos epistemológicos de referencia* como herramientas teóricas y metodológicas que hacen posible la emancipación epistemológica de la didáctica y que se han desarrollado principalmente en el ámbito de la didáctica de las matemáticas (apartado 3).
3. Mostrar, a partir de una reinterpretación de la obra de Lakatos, que los modelos epistemológicos de referencia pueden considerarse, también en *historia de la ciencia* y, en particular, en *historia de las matemáticas*, como instrumentos de emancipación epistemológica (apartado 4).
4. Mostrar *cómo* la investigación histórica y la investigación didáctica pueden

[2] En este trabajo no entraremos en la discusión del problema clásico de la *unidad o multiplicidad de la ciencia* respecto del cual las posturas de los epistemólogos e historiadores son muy diversas. Mientras Karl Popper (1956/2011) afirma que las disciplinas científicas no existen, que sólo existen los problemas y que las disciplinas son inventos o construcciones académicas, otros autores defienden posiciones más matizadas y, posiblemente, más fundamentadas. Así, por ejemplo, Rolando García critica la inadecuación de las dos posiciones extremas que han prevalecido en las múltiples propuestas de clasificación de las ciencias: cuestiona tanto la posición *reduccionista* que borra la especificidad de los fenómenos que pertenecen a cada disciplina, como la posición que erige *barreras infranqueables* sobre la base de la especificidad de los fenómenos. García, de acuerdo con Piaget, defiende una posición *unificada no reduccionista*, compatible con la pluralidad de las ciencias y con la posibilidad de integrar los estudios disciplinarios en la práctica concreta de la investigación interdisciplinaria de los sistemas complejos (García, 1994, 2006).

evaluar y corregir los modelos epistemológicos de un ámbito *específico* de las matemáticas, si bien esta contrastación empírica no puede aplicarse directamente a los modelos epistemológicos *generales* de las matemáticas (apartado 5).

2. EMANCIPACIÓN INSTITUCIONAL Y CARÁCTER FENOMENOTÉCNICO DE LAS CIENCIAS SOCIALES

De manera análoga al caso de la didáctica, podemos hablar de la emancipación institucional del resto de las "ciencias sociales" como, por ejemplo, de la historia, de la economía, de la psicología o de la sociología. En cada caso, dicha emancipación puede interpretarse como la liberación de las condiciones que impone la ideología dominante en las instituciones que forman parte de su objeto de estudio. Dicha emancipación es imprescindible para que *la propia comunidad científica pueda construir* (de manera relativamente autónoma) *el objeto de estudio* de la disciplina, sin dejarse condicionar por los códigos imperantes en las citadas instituciones ni, en particular, por la manera como se formulan e interpretan en ellas las cuestiones que forman parte de la problemática científica. Esta construcción del objeto de estudio puede identificarse con la *producción de los fenómenos* (y de los *problemas de investigación* asociados al estudio de dichos fenómenos) que constituyen la razón de ser de la disciplina.

Hay que subrayar en este punto que la emancipación a la que nos referimos, así como la correspondiente autonomía en la construcción del objeto de estudio por parte de las ciencias sociales (o de cualquier ciencia) es siempre, en la práctica científica real, una *autonomía relativa*. Podemos concebir la *autonomía de la ciencia*, en un sentido más amplio, como la liberación no sólo de las condiciones que impone la ideología dominante en las instituciones que forman parte de su objeto de estudio, sino también de las *restricciones exteriores* que emanan de los poderes de todo tipo (religiosos, políticos, económicos, mediáticos, etc.) y que amenazan la libertad de la actividad científica.[3]

[3] En el último libro publicado en vida, Pierre Bourdieu (2001) denuncia la debilitación progresiva de la citada autonomía que la ciencia había conquistado poco a poco y con enormes dificultades a lo largo de su historia. Considera que las ciencias sociales están especialmente expuestas a la *heteronomía* y propugna un *racionalismo historicista* para escapar a la alternativa entre *logicismo* y *relativismo* que, en realidad, son dos tendencias contrapuestas que se retroalimentan. Considera que la particularidad de las ciencias sociales sólo puede entenderse planteando la cuestión de las relaciones entre *cientificidad* y *autonomía* (respecto a las diferentes formas de presión exterior o interior) y propone la *reflexividad*, entendida como el trabajo mediante el cual las ciencias sociales, tomándose a sí mismas como objeto, se sirven de sus propias armas para comprenderse y controlarse, como el instrumento que permitirá dominar las determinaciones sociales a las que están expuestas dichas ciencias y posibilitar así la emancipación del investigador (y de las propias ciencias sociales) de las contingencias sociohistóricas. En este trabajo, lejos de pretender abordar el enorme problema de la *autonomía de las ciencias sociales*, nos centraremos en la emancipación epistemológica de la didáctica y la historia (de las matemáticas) y, sólo tangencialmente, en aquellos aspectos de la emancipación institucional directamente relacionados con la emancipación epistemológica.

Consideramos que todas las ciencias (y en particular las ciencias sociales) tienen, en mayor o menor medida, según su grado de desarrollo, la capacidad potencial de producir los fenómenos que describen y explican, esto es, postulamos que las ciencias tienen un carácter potencialmente *fenomenotécnico* en el sentido de Gaston Bachelard:

> [...] un fenómeno es un suceso o proceso tipificable y reproducible [...], desglosable del devenir. En el uso bachelardiano, *fenomenotecnia* significa *arte sabio de producir nuevos fenómenos*, realizando material y manualmente lo concebido en abstracto –típicamente mediante modelos matemáticos– por la inteligencia. (Torretti, 2012, p. 98)

A fin de precisar este carácter potencialmente fenomenotécnico de las ciencias sociales (y, en particular, de la ciencia didáctica) es necesario analizar con más detalle el proceso de construcción de los fenómenos sociales (o fenómenos de la vida social).

Partimos del principio según el cual las ciencias sociales tienen por objeto de estudio los *fenómenos de la vida social*, por lo que parece lógico suponer que los *conceptos* que construyen se utilicen como herramientas para formular con cierta precisión los citados fenómenos y los problemas de investigación asociados.

Max Weber[4] postula que toda ciencia social tiene necesidad de construir "tipos ideales" de conceptos que funcionan como "conceptos límites" o conceptos "ideales". Estos tipos ideales[5] están caracterizados teóricamente pero no son copias fotográficas de los hechos empíricos, esto es, no existen en estado puro en la realidad histórica. Podemos interpretarlos como *modelos* y, como tales, tienen una función metodológica, heurística, puesto que sirven para compararlos (o contrastarlos) con la realidad empírica, históricamente existente y para generar nuevas cuestiones.

Se trata de nociones o constructos teóricos que aporta la ciencia social para ordenar conceptualmente la realidad empírica. Por ello, no debe confundirse el sistema empírico modelizado, que siempre es infinitamente complejo, con el modelo cuya función no es copiar el sistema sino producir conocimientos sobre el mismo.[6] En este sentido, la construcción de los tipos ideales y su contrastación empírica constituyen una parte fundamental de las técnicas de investigación científica y pueden interpretarse como un

[4] Utilizamos la edición española, publicada en 2009 (Weber, 1904/2009).

[5] El adjetivo "ideal" no indica ningún tipo de perfección, esencialidad ni valoración, tiene que ver exclusivamente con la función puramente heurística, de modelo a contrastar empíricamente, que el "tipo ideal" cumple.

[6] Es importante subrayar que los problemas de investigación se formulan en el ámbito y con los elementos que proporciona el *modelo* (esto es, el tipo ideal de fenómeno), aunque en algunas ocasiones y debido a la confusión entre los dos niveles (el sistema empírico modelizado y el modelo teórico de dicho sistema) pueda parecer que se plantean directamente en el ámbito del fenómeno empírico, históricamente existente. Esto no significa que la construcción de los fenómenos deba preceder a la formulación de los problemas de investigación científica; de hecho, como veremos en el caso de la ciencia didáctica, ambos procesos se desarrollan en paralelo, dialécticamente.

primer movimiento hacia la emancipación institucional puesto que, parafraseando a Norbert Elias, el grado de emancipación (o *distanciamiento*) que una comunidad científica puede lograr depende de la forma estándar del saber alcanzado en la época en la que vive y de su capacidad para *formular conceptos* (Elias, 1983/1990).

De hecho, siempre que una disciplina científica introduce un *tipo ideal*, lo hace para utilizarlo en la construcción de fenómenos (ideales) y para poder compararlos con fenómenos emergentes en la realidad histórica a fin de aumentar el conocimiento de éstos. Weber cita como ejemplos de fenómenos la "ética calvinista", la "economía capitalista", el "feudalismo occidental", el "artesanado" y el "imperialismo", entre otros.[7] Considera que caracterizar los tipos ideales permite construir fenómenos (ideales) cuya contrastación o comparación con la realidad histórica posibilita la formulación de cuestiones o problemas dirigidos a aumentar el conocimiento de dichos fenómenos. En general, cuando hablamos de "fenómeno social" nos referimos por una parte al sistema empírico históricamente existente (conjunto de hechos empíricos no muy bien delimitados y que nunca pueden conocerse perfectamente) y, por otra, al modelo construido por la ciencia social en cuestión utilizando uno o varios "tipos ideales" y postulando cierta relación entre ellos.

Según Weber, la *construcción o caracterización de un tipo ideal* se lleva a cabo mediante un proceso creativo que no puede describirse mediante reglas fijas pero que puede esquematizarse como sigue: a partir de un conjunto de hechos aparentemente desligados entre sí, el investigador, utilizando las herramientas (teóricas y metodológicas) que le proporciona una disciplina científica, elige algunos aspectos que presentan en común, en mayor o menor medida, los hechos citados, acentúa algunos de dichos aspectos y hasta incorpora aspectos que sólo están presentes de manera excepcional (e incluso pueden estar ausentes) en el conjunto de hechos de partida. De esta manera, después de postular algunas relaciones entre los aspectos (o variables) seleccionados, el investigador construye teóricamente un tipo ideal.[8]

En la misma línea, Bachelard identifica la *conceptualización*, esto es, la construcción de conceptos, con una operación que denomina "inducción"[9] en el sentido de objetivación de lo particular. Se trata de la operación creativa que consiste en inventar un *concepto general* –que puede asimilarse en cierto sentido a lo que Weber denomina *tipo ideal*– idóneo *para captar lo particular* –lo que Weber denomina "realidad empírica"–, porque se refiere a un fenómeno "desglosable del devenir" de la vida social (Torretti, 2012).

[7] Los tipos ideales no tienen que ser necesariamente conceptos abstractos de fenómenos "estáticos". Los tipos ideales pueden referirse a un proceso evolutivo, esto es, es posible construir un *tipo ideal de evolución* siempre que se distinga claramente entre esta construcción y la historia. Esta construcción puede tener un valor heurístico considerable y, por tanto, ser muy útil para el historiador.

[8] En Gascón (2011b, pp. 13-14) se ejemplifica este proceso en el caso de la caracterización del "enfoque por competencias" como un tipo ideal. En trabajos anteriores hemos caracterizado algunos tipos ideales de *modelos docentes: teoricistas, tecnicistas y procedimentalistas*, entre otros (Gascón, 1994, 2001a).

[9] Esta operación que Bachelard denomina *inducción* no tiene nada que ver con una forma de inferencia lógica que conduce de premisas particulares a conclusiones universales, lo que, de por sí, es imposible.

En el caso de la didáctica de las matemáticas, hay que subrayar que la noción de *fenómeno didáctico* no desempeña en la actualidad un papel central en la mayoría de enfoques. En los escasos trabajos en los que aparece, lo hace normalmente como una noción *paracientífica*, esto es, como una noción no tematizada que no se toma como objeto de estudio en sí misma. Sin embargo, la noción de fenómeno didáctico desempeñó un papel crucial en el nacimiento de la *teoría de las situaciones didácticas* (en adelante, TSD):

> Bien qu'à partir de formulations sensiblement différentes selon les textes, Guy Brousseau (1997) a, dès le début, défini la didactique des mathématiques comme la science qui se donne comme *but essentiel la connaissance des phénomènes didactiques* qui deviennent alors à la fois construction et objet d'étude, de la même manière que la physique étudie cette construction propre que sont les phénomènes physiques, la sociologie les phénomènes sociaux, etc. (avec toutes les controverses historiques autour de la distinction, évolution et délimitation des phénomènes qu'étudie chaque science). (Artigue, Bosch y Gascón, 2011, p. 37)

Fue precisamente Guy Brousseau el primero en propugnar la necesidad, para la didáctica, de crear *conceptos nuevos*, advirtiendo que en algunos casos dicha construcción, imprescindible para responder a las necesidades de la didáctica, podría requerir la modificación de los conceptos importados de otros campos científicos. En ese sentido, se preguntaba de forma retórica:

> Existe-t-il une «variété didactique» des concepts de *sens*, de *mémoire*, *de structure*, de *décimal*, etc., inconnue en linguistique, en psychologie ou en mathématique? (Brousseau, 1986, p. 39)

En particular, muchos de los conceptos que ha construido la didáctica de las matemáticas como, por ejemplo, "efecto Topaze" y "deslizamiento metacognitivo" (Brousseau, 1986), pueden considerarse como tipos ideales que designan fenómenos didácticos que, al igual que la "economía capitalista" o el "artesanado", constituyen por sí mismos (una vez descritos y caracterizados) fenómenos (ideales) cuya comparación con la contingencia permite plantear problemas para seguir progresando en el estudio de dichos fenómenos.

En el siguiente apartado mostraremos que los *modelos epistemológicos de referencia* (en adelante, MER) construidos en el ámbito de la TAD pueden considerarse como tipos ideales que han permitido la emancipación de la didáctica de las matemáticas respecto de los modelos epistemológicos dominantes en las diversas instituciones que forman parte de su objeto de estudio y, gracias a su función fenomenotécnica, los MER han hecho visibles nuevos fenómenos didácticos.

3. FUNCIÓN FENOMENOTÉCNICA DE LOS MODELOS EPISTEMOLÓGICOS DE REFERENCIA[10] Y EMANCIPACIÓN EPISTEMOLÓGICA DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

En el caso particular de la didáctica de las matemáticas, la relatividad institucional del saber matemático –puesta en evidencia por la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1985/1991)– y la consiguiente entrada del saber matemático en la problemática didáctica, provocaron que esta disciplina tuviera que asumir explícitamente la responsabilidad de analizar los modelos epistemológicos del saber matemático vigentes en las instituciones que intervienen en los procesos de transposición.

Para llevar a cabo dicho análisis, esto es, para tomar la matemática escolar (y, en general, la matemática institucionalizada) como objeto de estudio de la didáctica, fue preciso construir modelos epistemológicos *específicos* o locales (compatibles con un modelo epistemológico *general* o global)[11] de los diferentes ámbitos de la actividad matemática, a fin de tomarlos, en primera instancia, como sistemas de referencia útiles para analizar los modelos dominantes en las diferentes instituciones:

> Toute recherche en didactique qui se propose d'étudier les phénomènes relatifs à un domaine des mathématiques (par exemple l'algèbre élémentaire), et dans une institution didactique donnée, ne devrait pas assumer tel quel le modèle implicite prévalant dans l'institution, mais devrait le prendre en compte en tant qu'objet d'étude, c'est-à-dire comme faisant partie des faits didactiques qui constituent la base «empirique» de la recherche. Pour cela, le chercheur a besoin d'un «point de vue» particulier, c'est-à-dire d'un modèle alternatif du domaine d'activité mathématique enseigné qui lui serve de *cadre de référence* pour interpréter le modèle dominant dans l'institution qu'il étudie. Or, tout modèle local utilisé pour étudier un domaine particulier des mathématiques enseignées va prendre sa place dans un modèle global de l'activité mathématique qui restera, selon les cas, plus ou moins explicité par le chercheur. (Gascón, 1994-1995, p. 44)

A los citados "modelos alternativos", cuya construcción es responsabilidad de la didáctica, se les asignó desde el principio una función fenomenotécnica y un carácter relativo y provisional:

---

[10] La función fenomenotécnica de los modelos epistemológicos de referencia ha sido analizada en Schneider (2013). Agradezco a la autora el acceso a una versión provisional del texto completo de dicha conferencia.

[11] El *modelo epistemológico general* de las matemáticas que propone la TAD ha ido evolucionando. En estos momentos se formula en términos de la estructura y la dinámica de las *praxeologías matemáticas* (Chevallard, 1999, 2002).

> [...] en la interpretación –e incluso en la mera formulación– de los fenómenos didácticos, [...] *es imprescindible la utilización de un modelo específico de la forma como se generan y se desarrollan los conocimientos matemáticos involucrados en dichos fenómenos*. [...] la tesis anterior, lejos de quitar responsabilidades a los didácticos, las acrecienta puesto que son éstos los responsables en gran medida de elaborar los modelos específicos que precisan para estudiar los fenómenos didácticos [...] estos modelos deben interaccionar (esto es, deben poder ser evaluados, corregidos y contrastados) no sólo con los datos históricos sino también con los hechos didácticos (una vez interpretados como fenómenos). (Gascón, 1993, p. 302)

Y, como es lógico, se subrayó la relación entre esta función fenomenotécnica y el papel de dichos modelos como instrumentos de *emancipación epistemológica* de la ciencia didáctica puesto que, al posibilitar un distanciamiento respecto de los modelos epistemológicos dominantes en las diversas instituciones y la correspondiente emancipación de los condicionantes que éstos conllevan, permiten construir ("hacer visibles") fenómenos que habían permanecido invisibles:

> De esta manera podremos tomar en consideración algunos fenómenos didácticos que no son visibles en los actuales sistemas de enseñanza de las matemáticas debido, en parte, al prejuicio que identifica el "álgebra elemental" con la "aritmética generalizada". Dichos fenómenos, para ser estudiados, deberían ser producidos artificialmente mediante una ingeniería didáctica adecuada. (Ibíd., pp. 326-327)

Además, el *modelo epistemológico dominante* de cierto ámbito del saber matemático enseñado (en una institución determinada) condiciona fuertemente no sólo el tipo de actividades matemáticas que será posible llevar a cabo en dicha institución en torno al ámbito matemático en cuestión, sino también las correspondientes actividades *didácticas* que se materializan en un *modelo docente* (Gascón, 1994, 2001a). En consecuencia, la emancipación epistemológica comporta, en cierta medida, la emancipación respecto del modelo docente dominante en la institución concernida, lo que proporciona autonomía para cuestionarlo y para proponer otros modelos docentes alternativos.

A partir de este momento, pasaron a formar parte integral del objeto de estudio de la didáctica no sólo la incidencia del modelo epistemológico dominante en la institución (habitualmente implícito) sobre la percepción institucional de los "hechos didácticos", sino también la influencia de los posibles modelos alternativos que construye la didáctica sobre la interpretación de los mismos hechos por parte del didacta.

> La recherche en didactique devrait pouvoir expliquer pourquoi un certain modèle implicite existe dans une institution didactique au détriment d'autres modèles possibles; comment ce modèle implicite agit sur la structure et les fonctions des différents dispositifs didactiques; et comment les phénomènes qui s'y produisent dépendent

> des caractéristiques de ce modèle. Elle devrait pouvoir expliquer, par ailleurs, comment la perception de ces phénomènes peut varier suivant les différents modèles du savoir mathématique qu'adopte le chercheur. [...] Par conséquent, il serait souhaitable que le modèle épistémologique utilisé soit explicite –ou, en tout cas, potentiellement explicitable–, étant donné qu'il conditionne de façon décisive ce que l'on entendra par «enseigner et apprendre l'algèbre élémentaire» (par exemple) et, par extension, «enseigner et apprendre des mathématiques». (Gascón, 1994-1995, p. 44)

Se pone así claramente de manifiesto la relevancia metodológica de explicitar los modelos epistemológicos alternativos (construidos por la didáctica), cuyo principal referente previo lo constituye la noción de "situación fundamental" específica de un conocimiento matemático (Brousseau, 1986). Esta noción, construida en el ámbito de la TSD, constituye el primer ejemplo de la productividad, para la investigación didáctica, de estos modelos epistemológicos específicos alternativos a los modelos vigentes en la institución escolar. Podemos así caracterizar los enfoques o las teorías didácticas que forman parte del *programa epistemológico* de investigación en didáctica de las matemáticas, inaugurado por la TSD (Gascón, 1998, 2003, 2013), como aquellos que cuestionan los modelos epistemológicos de las matemáticas dominantes en las diversas instituciones y, lo que es más importante, como aquellos que *elaboran explícitamente modelos epistemológicos alternativos* de los diferentes ámbitos de las matemáticas y los *utilizan como sistema de referencia* para construir fenómenos didácticos y para formular y abordar los problemas didácticos asociados.

Fue a partir del año 2000 que los citados modelos epistemológicos alternativos se denominaron explícitamente modelos epistemológicos de referencia (MER[12]):

> Hemos presentado hasta aquí la algebrización hipotética de la organización matemática clásica en torno a la proporcionalidad, proceso que tomamos como *modelo epistemológico de referencia*. Utilizaremos ahora este modelo para describir el tipo de ingredientes praxeológicos que componen la actual organización matemática escolar en torno a la proporcionalidad de magnitudes [...] (Bolea, Bosch y Gascón, 2001, p. 282)

Y, a partir del momento en que se dispuso de la noción de *praxeología* pudo formularse el MER como una arborescencia de praxeologías de complejidad y completitud crecientes (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004):

[12] En los últimos desarrollos de la TAD, la noción de MER se ha generalizado a la de *modelo praxeológico de referencia* (MPR). Esta generalización es coherente con la estructura praxeológica de los MER y ha estado motivada por la ampliación del objeto de estudio de las ciencias didácticas (en consonancia con la emancipación radical antes descrita), esto es, para abarcar las condiciones y restricciones de la vida de las sociedades humanas bajo las cuales las *praxeologías de todo tipo* (tanto científicas como no científicas) viven, migran, cambian, operan, desaparecen, renacen, etc., en las instituciones humanas (Chevallard, 2006).

> Étant donné un processus didactique sur un thème mathématique déterminé, la première étape de notre technique d'analyse suppose l'adoption de ce que nous appelons un *modèle épistémologique de référence* sur le contenu mathématique en jeu. Dans le cadre de la TAD, ce modèle se formule en termes d'*organisations* ou *praxéologies mathématiques* (Chevallard, 1999). Le modèle épistémologique que nous proposons ici est formé par une suite de trois *types de praxéologies mathématiques* de nature distincte dont chacun peut être considéré comme un développement du précédent. (Bolea et ál., 2005, p. 154)

Retrospectivamente podemos comprobar que todos y cada uno de los MER que se han construido en el ámbito de la TAD han cumplido una función fenomenotécnica: en cada caso, la construcción del MER ha permitido dar visibilidad a ciertos fenómenos didácticos y ha proporcionado herramientas para formular problemas didácticos cuya respuesta ha aumentado el conocimiento de dichos fenómenos.

A título de ejemplo tomaremos uno de los primeros MER descritos en términos de una sucesión de praxeologías matemáticas progresivamente más algebrizadas. Se trata del MER en torno al *proceso de algebrización de la proporcionalidad*, descrito en Bolea, Bosch y Gascón (2001) y citado anteriormente. Partiendo de la organización matemática *clásica* en torno a la *proporcionalidad de magnitudes*, se construyen tres praxeologías situadas respectivamente en niveles progresivos de algebrización y tales que cada una de ellas contiene (y, en cierta forma, modeliza) a la anterior. En el primer nivel se construye una ampliación de la organización matemática clásica mediante la modernización del lenguaje técnico de la proporcionalidad expresada mediante el uso de las ecuaciones como modelos y la consiguiente transformación de las relaciones de proporcionalidad entre magnitudes en relaciones entre *variables numéricas*; en el segundo nivel se lleva a cabo una *reducción* de todos los tipos de proporcionalidad clásica (directa, inversa, simple y compuesta) a la *función lineal*; y, finalmente, en el tercer nivel se construye una praxeología matemática en torno a la *modelización funcional general*.

La construcción de dicho MER ha permitido hacer visibles (construir y empezar a estudiar) dos importantes fenómenos didácticos emergentes en los actuales sistemas de enseñanza y que hemos designado respectivamente como "evitación del álgebra" y "aislamiento escolar de la relación de proporcionalidad". Para estudiar dichos fenómenos hemos formulado problemas didácticos tales como: ¿Por qué los problemas de proporcionalidad tienden a considerarse en la organización matemática escolar como problemas aritméticos alejados del ámbito algebraico? ¿Qué restricciones impiden en la matemática escolar unificar todos los tipos de proporcionalidad clásica (directa, inversa, simple y compuesta) mediante el modelo de la función lineal y alcanzar así el segundo nivel de algebrización de la proporcionalidad descrito en el MER? ¿Qué condiciones se requieren para que la actividad matemática alcance un nivel de algebrización (en términos de los indicadores del grado de algebrización) que haga necesaria la emergencia de la modelización funcional general descrita en el MER? (Ibíd., pp. 282-289).

Entre los MER *específicos* elaborados por nuestro grupo de investigación podemos citar, haciendo uso de una etiqueta que alude al ámbito de la actividad matemática involucrada en cada caso, los siguientes: divisibilidad elemental (Gascón, 2001b); medida de magnitudes continuas (Bolea et ál., 2005; Sierra, 2006); límites de funciones (Barbé et ál., 2005); proporcionalidad en el ámbito de las relaciones funcionales elementales (García et ál., 2006); sistemas de numeración (Sierra et ál., 2007); modelización matemática (Barquero et ál., 2010; Serrano et ál., 2010) y modelización algebraico-funcional (Ruiz-Munzón et ál., 2011). En otras ocasiones hemos utilizado un MER *general* de la actividad matemática con el objetivo de caracterizar el modelo epistemológico de las matemáticas dominante en la enseñanza secundaria española (Bosch et ál., 2004) o bien para reformular el problema de la metacognición en el ámbito de la TAD (Rodríguez et ál., 2008).

Pero cada uno de dichos MER sólo queda relativamente caracterizado cuando se describen, como en el ejemplo citado anteriormente, los correspondientes fenómenos didácticos asociados y algunos de los problemas didácticos cuyo estudio ha permitido, en cada caso, aumentar el conocimiento de los fenómenos que se han "hecho visibles" (o se han construido) con ayuda del MER.

Tesis (1): *Los MER específicos o locales (compatibles con un MER general) se construyen en didáctica de las matemáticas como herramientas heurísticas para hacer visibles ciertos fenómenos didácticos. Su primera función es la de proporcionar los elementos necesarios para formular problemas didácticos cuyo estudio permitirá mejorar el conocimiento de dichos fenómenos. Sólo de esta forma, la didáctica puede emanciparse respecto del modelo epistemológico dominante en las instituciones concernidas y tener la posibilidad de construir de manera autónoma su propio objeto de estudio.*

Para completar esta tesis, debemos tomar en cuenta las siguientes características de los MER:

a. Un MER específico o local no está asociado simplemente a un ámbito de la actividad matemática, sino a uno o más fenómenos didácticos (que involucran un ámbito más o menos extenso de la actividad matemática). Por lo tanto, si se trata de estudiar diferentes fenómenos didácticos emergentes en un mismo ámbito de la actividad matemática, será necesario construir diferentes MER (Schneider, 2013).
b. La construcción de un MER, la explicitación de los fenómenos asociados y la formulación de los problemas didácticos correspondientes son procesos simultáneos que se desarrollan dialécticamente.
c. Un MER es una respuesta tentativa inicial a las cuestiones que forman parte de la *dimensión epistemológica* de los problemas didácticos involucrados (Gascón,

2011a) y, como tal, es imprescindible (en el ámbito de la TAD) para poder formular los problemas didácticos como verdaderos problemas de investigación.

d. Todo MER es provisional, es una hipótesis científica, y debe ser contrastado empíricamente. Si un MER específico no cumple su función fenomenotécnica, deberá ser revisado y hasta modificado profundamente. La piedra de toque para decidir entre dos MER rivales cuál de ellos es más útil heurísticamente (o para decidir cómo modificar un MER a fin de poder estudiar nuevos aspectos de un fenómeno didáctico), son los hechos didácticos interpretados como fenómenos (véase apartado 5).

Hemos mostrado que la didáctica (de las matemáticas) se sustenta forzosamente en un modelo epistemológico (de las matemáticas), por lo que podríamos decir que la didáctica es *ciega* si ignora que, de hecho, está utilizando un modelo epistemológico determinado, por latente e impreciso que sea, y que este modelo está condicionando fuertemente no sólo los problemas de investigación didáctica que pueden formularse, sino también las respuestas que se considerarán admisibles.

4. EMANCIPACIÓN EPISTEMOLÓGICA DE LA HISTORIA DE LA CIENCIA

En este apartado, a partir de una reinterpretación de la obra de Lakatos, pretendemos empezar a mostrar que las conclusiones relativas al papel de los MER en didáctica de las matemáticas son aplicables, *mutatis mutandis,* al caso de la historia de la ciencia y, en particular, al de la historia de las matemáticas.

La intención de Lakatos en su obra *Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales* era la de intentar explicar "[...] *de qué modo* la historia de la ciencia debería aprender de la filosofía de la ciencia y viceversa" (Lakatos, 1971/1982, p. 11). De manera un poco más precisa, parafraseando a Sierra (2006), podemos decir que Lakatos persigue, al menos, los siguientes objetivos:

a. Subrayar el *carácter empírico de la filosofía de la ciencia* (negado, por ejemplo, por Popper que no creía que la historia de la ciencia pudiera servir para contrastar las teorías de la filosofía de la ciencia).
b. Mostrar la necesidad ineludible para la historia de la ciencia de utilizar, de forma más o menos explícita, un *modelo epistemológico del saber científico*.
c. Contribuir a *emancipar al historiador de la ciencia* y a la *historia de la ciencia* de la sujeción a la ideología vigente en la comunidad científica (y en el resto de instituciones que forman parte de su objeto de estudio), en lo referente a la forma de interpretar la naturaleza de la ciencia.

Cuando Lakatos indica que la filosofía de la ciencia proporciona *metodologías normativas de la ciencia*[13] (o teorías de la racionalidad científica o lógicas del descubrimiento científico o, en definitiva, definiciones de ciencia), podemos interpretar que se está refiriendo a *modelos epistemológicos generales* de la actividad científica.[14] Además, en lo que concierne al trabajo del historiador de la ciencia, Lakatos señala que cada metodología funciona como (o sustenta) una teoría (o programa de investigación) *historiográfica*, esto es, una *teoría metahistórica*.

> Hemos expuesto brevemente cuatro teorías de la racionalidad del progreso científico —o lógicas del descubrimiento científico—. Se ha mostrado cómo cada una de ellas proporciona un sistema teórico para la reconstrucción racional de la historia de la ciencia. [...] Cada reconstrucción racional elabora algún modelo característico del desarrollo racional del conocimiento científico. Sin embargo, todas estas reconstrucciones *normativas* deben ser completadas por teorías externas *empíricas* para explicar los factores residuales no racionales. La historia de la ciencia es siempre más rica que su reconstrucción racional. (Ibíd., pp. 37-38)

Aparece aquí una importante analogía con la didáctica porque, al igual que en el caso de ésta, Lakatos muestra que toda investigación relativa a la historia de la ciencia utiliza como referencia, de manera más o menos explícita, una teoría del método científico o MER general que Lakatos denomina "lógica del descubrimiento científico". Por esta razón, la *explicitación* de dicho MER general es una condición necesaria para hacer posible la crítica científica de los resultados obtenidos por el historiador de la ciencia:

> Por supuesto, únicamente se puede criticar la historia interna haciendo explícita la metodología (generalmente latente) del historiador, mostrando cómo funciona en cuanto programa de investigación historiográfica. (Ibíd., p. 66)

Y, como el resto de ciencias sociales, la historia de la ciencia tiene la capacidad potencial de construir los fenómenos históricos y los problemas de investigación histórica asociados al estudio de dichos fenómenos. Pero la interpretación de los hechos históricos y la consiguiente construcción de fenómenos (relativos a la historia de la

[13] Las "metodologías *normativas* de la ciencia" de Lakatos equivalen a las "teorías del método científico" o "lógicas de investigación científica" de Popper. Se trata, en definitiva, de teorías epistemológicas del método científico que se materializan en un conjunto de *reglas metodológicas* que definen a la ciencia empírica: "[...] trataré de determinar las reglas (o, si se prefiere, las normas) por las que se guía el científico cuando investiga o cuando descubre algo [...]" (Popper, 1934/1973, pp. 48-49).

[14] El modelo epistemológico general de las matemáticas que propone Lakatos (su "lógica del descubrimiento matemático") puede considerarse como un tipo ideal de modelo epistemológico que denomina el método de *conjeturas, pruebas y refutaciones* (Lakatos, 1976/1978, pp. 149-150). Se trata de un modelo epistemológico cuasi empírico (véase el apartado 5).

ciencia) dependerán en gran medida del MER general o metodología de la ciencia que se utilice, como pasa en el caso de la didáctica y en el resto de ciencias sociales.

Para subrayar esta idea, después de describir cuatro metodologías de la ciencia (*inductivismo*, *convencionalismo*, *falsacionismo metodológico* y *metodología de los programas de investigación científica*) y caracterizarlas (a modo de tipos ideales) mediante reglas o normas que rigen la aceptación y el rechazo de teorías científicas, Lakatos explica claramente que cada una de ellas determina diferentes *unidades básicas*[15] de análisis histórico (Ibíd., p. 25) y que cada metodología permite hacer "visibles" fenómenos que permanecen "invisibles" para las otras.

> La metodología de los programas de investigación científica constituye, como cualquier otra metodología, un programa de investigación historiográfica. El historiador que acepte tal metodología como guía, buscará en la historia programas de investigación rivales, problemáticas progresivas y estancadas. Donde el historiador duhemiano vea una revolución en la simplicidad (como la de Copérnico), aquél buscará un programa progresivo a gran escala que se impone a otro estancado. Donde el falsacionista ve un experimento crucial negativo, aquél "predecirá" que no había tal experimento, que detrás de cualquier supuesto experimento crucial, detrás de cualquier supuesta batalla entre teoría y experimento, hay una lucha oculta entre dos programas de investigación. (Ibíd., p. 31)

En resumen, al igual que en el caso de la didáctica, la utilización de los MER es inevitable en historia de la ciencia. Y, de nuevo, la *ceguera* del historiador (o de la propia historia como disciplina) consistiría en ignorar que, de hecho, se está utilizando tal modelo epistemológico y que, en la medida que sea latente y no explícito, no podrá cumplir plenamente su función de instrumento de emancipación.

Tesis (2): *La historia de la ciencia utiliza como modelo de referencia, de manera más o menos implícita, un modelo epistemológico general. La explicitación de este MER general y su utilización para interpretar los hechos históricos como (rasgos de) fenómenos y para formular los problemas de investigación asociados, constituye una condición necesaria para: a) emanciparse de la asunción acrítica del modelo epistemológico dominante en las instituciones que forman parte de su objeto de estudio, b) cuestionar la forma de interpretar los problemas científicos e historiográficos en dichas instituciones, y c) construir de manera autónoma su objeto de estudio.*

[15] En el caso de la didáctica de las matemáticas, la elección de la *unidad de análisis* de los procesos didácticos determina en gran medida el tipo de fenómenos que se estudian y los problemas didácticos que se pueden formular (Bosch y Gascón, 2005).

5. CONTRASTACIÓN EMPÍRICA DE LOS MODELOS EPISTEMOLÓGICOS DE UN ÁMBITO *ESPECÍFICO* DE LAS MATEMÁTICAS: EL CASO DE LA GÉNESIS DEL ÁLGEBRA

¿Cómo se pueden criticar estas construcciones teóricas, estos modelos epistemológicos de la ciencia (o teorías del progreso científico) que utilizan el historiador y el didacta como MER? ¿De qué herramientas dispone la comunidad científica para contrastar su valor heurístico y, en particular, para comparar dos teorías rivales? La respuesta de Lakatos consiste en postular que, dado que todas las metodologías funcionan como teorías historiográficas, pueden criticarse analizando las reconstrucciones históricas racionales a las que ellas conducen.

> [...] *la historia* (en un sentido que ha de ser cuidadosamente especificado) *puede considerarse como una "prueba" de sus reconstrucciones racionales.* (Lakatos, 1971/1982, p. 46)

En este punto surge una dificultad importante puesto que no hay acuerdo respecto a la fuerza probatoria de los diversos episodios históricos y, además, cada metodología puede encontrar ejemplos que la vindiquen y ejemplos que no los puede encajar (Iranzo, 2005). Mostraremos en este último apartado que dicha dificultad puede solventarse localmente utilizando, "en un sentido que ha de ser cuidadosamente especificado", los MER *específicos* o locales de los diferentes ámbitos de la actividad matemática.

La tesis de Iranzo (2005) hace alusión a las metodologías generales de la ciencia y está sustentada en la hipótesis implícita según la cual la base empírica de la epistemología se limita a los hechos históricos y, en consecuencia, en que los episodios históricos constituyen el único material disponible para contrastar empíricamente las metodologías o teorías de la ciencia. Para cuestionar esta hipótesis en el caso de las matemáticas, empezaremos por describir brevemente la evolución de la epistemología de las matemáticas como disciplina. Veremos así que dicha evolución está ligada a la ampliación sucesiva de su objeto de estudio y, en consecuencia, al *aumento progresivo de su base empírica* provocado por la evidente inadecuación de ésta para abordar el problema que la epistemología plantea en cada momento. En Gascón (2001a), completando el esquema de los dos grandes tipos de modelos epistemológicos generales de las matemáticas descrito en Lakatos (1978/1981), se propone una reconstrucción racional de la evolución de este problema que sintetizamos brevemente a continuación:

a. Los modelos epistemológicos clásicos situados dentro del *euclideanismo* (el *logicismo* de Russell, el *formalismo* de Hilbert y el *intuicionismo* de Brouwer) tenían como único objetivo la *justificación lógica* de las teorías matemáticas y no necesitaban ninguna base empírica.
b. Los modelos epistemológicos *cuasi empíricos* pretendían resolver el problema

más amplio del *desarrollo del conocimiento matemático* y, por esta razón, requerían la utilización, como base empírica, de los *datos históricos*.

c. La epistemología *constructivista* piagetiana pretendía explicar no sólo cómo se establece que una teoría científica es superior a otra, sino también cuáles son los *instrumentos* y los *mecanismos* que provocan el paso de una teoría de nivel inferior a otra de nivel superior. Este objetivo más amplio requiere utilizar como base empírica los datos de la *psicogénesis*, además de los que proporciona la historia de la ciencia.

En resumen, el problema epistemológico comenzó siendo un problema puramente *lógico*, se convirtió después en un problema *histórico*, y para el constructivismo piagetiano ha acabado teniendo una *dimensión cognitiva* fundamental. En Gascón (1993), hemos puesto de manifiesto la necesidad de ampliar todavía más la base empírica de la epistemología mostrando que la *base empírica mínima* para abordar el problema epistemológico (incluso si aceptamos la versión del mismo que plantea el constructivismo), debe incluir, junto a los datos históricos, los hechos didácticos, esto es, los hechos relativos al *estudio* (de las matemáticas) en el sentido general propuesto en Chevallard, Bosch y Gascón (1997), que tienen lugar en todas las instituciones que intervienen en los procesos de transposición didáctica.

La nueva base empírica de la epistemología (ampliada) de las matemáticas incluye, por tanto, datos de todas las instituciones que intervienen, y que han intervenido a lo largo de la historia, en los procesos de producción, comunicación, utilización y transposición institucional de las praxeologías matemáticas. Podemos concluir así que la epistemología de las matemáticas comparte un mismo ámbito empírico con la didáctica y con la historia de las matemáticas.

Veremos a continuación que esta base empírica común, aunque no permita en primera instancia contrastar, corregir ni evaluar directamente los modelos epistemológicos *generales* de las matemáticas, proporciona medios para contrastar empíricamente los modelos epistemológicos de un ámbito específico de las matemáticas, esto es, los modelos epistemológicos locales.[16] Pretendemos así poner de manifiesto el impacto de la "evidencia histórica" (y de la "evidencia didáctica") sobre la "teoría filosófica (local) de la ciencia".

En efecto, al igual que en el caso del didacta, el historiador, además de utilizar un MER general de las matemáticas, debe construir un MER *específico* del ámbito de la actividad científica involucrado en el fenómeno que pretende estudiar. Estos MER específicos (o locales) deben ser, por supuesto, compatibles con el MER general adoptado. Los

[16] Esta limitación se explica principalmente porque los hechos y los fenómenos didácticos o históricos siempre se refieren a un ámbito específico de la actividad matemática y, en consecuencia, únicamente permiten contrastar y comparar (en primera instancia) los modelos epistemológicos de dicho ámbito de la actividad matemática. El paso de la contrastación empírica de los MER *específicos o locales* a la contrastación (aunque sea indirecta) del MER general que los contiene, constituye un problema delicado que no trataremos aquí.

MER específicos se utilizarán, en primera instancia, como sistemas de referencia para analizar e interpretar los modelos epistemológicos (específicos) dominantes, esto es, las formas vigentes en cada institución y en cada periodo histórico de interpretar los diferentes ámbitos de la actividad matemática. Pero, además, los MER específicos tienen en el caso de la historia (como en el caso de la didáctica) una función fenomenotécnica especialmente importante, puesto que determinan no sólo el *tipo* de fenómenos visibles y el *tipo* de problemas de investigación que se pueden formular, sino también los *fenómenos específicos* y los *problemas específicos* asociados.

Un ejemplo paradigmático del papel que puede desempeñar la investigación histórica (sustentada en un MER alternativo) en la evaluación y corrección de un modelo epistemológico *específico* dominante tanto en la comunidad de historiadores de las matemáticas como en la comunidad de didactas, nos lo proporciona el caso de la *génesis del álgebra*. Durante siglos, el modelo epistemológico dominante en dichas comunidades, MER_1 (y que sigue vigente en la mayoría de libros de texto y manuales de historia de las matemáticas), situaba los orígenes del álgebra en la escuela de Alejandría y, en particular, en la obra de Diofanto. Pero las investigaciones históricas de Jacob Klein, utilizando un MER_2 alternativo, esto es, una nueva definición de "álgebra", mostraron claramente que la interpretación histórica que hace coincidir la génesis del álgebra con la introducción de "valores indeterminados" representados por letras, no era satisfactoria porque no permitía dar cuenta de determinados fenómenos históricos.

> En effet, à partir de l'ouvrage de Jacob Klein, Piaget et Garcia (1982, pp. 135-141) montrent que cette interprétation ne permet pas d'expliquer certains phénomènes historiques importants, tels les difficultés rencontrées par les Grecs dans la solution de nombreux problèmes géométriques, difficultés qui ne peuvent s'expliquer que par l'indisponibilité d'instruments leur permettant de formuler les problèmes géométriques en termes d'opérations. Pour rendre raison de ces phénomènes, il convient de postuler, comme l'observe Klein (1934), que Viète crée une «nouvelle discipline» avec un niveau de généralisation qui n'était pas à la portée des Anciens. Deux démarches indépendantes convergent dans la genèse de cette «nouvelle algèbre»: l'analyse géométrique de Pappus et les méthodes arithmétiques de Diophante –d'où le fait que la nouvelle algèbre de Viète puisse être considérée à la fois comme *arithmétique* et *géométrique*. (Gascón, 1994-1995, p. 47)

Entre los principales rasgos del modelo epistemológico alternativo, MER_2, de la génesis del álgebra que Jacob Klein construye y utiliza para dar razón de los citados fenómenos históricos, hasta entonces inexplicados, destacamos que, más allá de la designación simbólica de ciertos objetos, el álgebra se caracteriza por hacer un uso sistemático del *cálculo simbólico*, de los *parámetros* y de las *fórmulas* (que se tornan posibles por primera vez), por *tematizar el método* como tal y por interpretar que la génesis del álgebra está ligada, a la vez, a la *aritmética y* a la *geometría*. El MER'_2 que proponíamos provisionalmente en Gascón (1994-1995) como alternativa a la "aritmética generalizada" es completamente compatible con el que utiliza Jacob Klein. Su formulación actual, mucho más detallada, en términos de una red de praxeologías (Ruiz-Munzón et ál., 2011) nos ha permitido, en el ámbito de la investigación didáctica, hacer visibles y empezar a explicar ciertos fenómenos *didácticos*, así como dar razones de por qué el modelo que identifica el álgebra elemental con la "aritmética generalizada" sigue estando vigente en las instituciones didácticas.

Este ejemplo muestra cómo las investigaciones históricas de Jacob Klein sustentadas en cierto MER_2 han corregido la interpretación clásica de la génesis histórica del álgebra sustentada en un MER_1 (y, en consecuencia, han corregido la interpretación del álgebra que proponía el MER_1) y cómo, paralelamente, investigaciones didácticas sustentadas en un MER'_2 (muy próximo al MER_2) han corregido, a su vez, la interpretación tradicional de la génesis escolar del álgebra que la identifica con una "aritmética generalizada".

Cada una de las investigaciones citadas en el apartado 3 puede interpretarse como una contrastación empírica de cierto MER de un ámbito *específico* de las matemáticas escolares. Dichas investigaciones han propuesto modelos alternativos y, en cierta medida, han corregido los modelos epistemológicos específicos que han sustentado tradicionalmente ciertos ámbitos de la matemática escolar como, por ejemplo, la divisibilidad elemental, la medida de magnitudes continuas, los límites de funciones, el papel de la proporcionalidad en el ámbito de las relaciones funcionales, los sistemas de numeración y la modelización algebraico-funcional, entre otros.

Junto a estos ejemplos en el ámbito de las investigaciones didácticas, tenemos los que propone Lakatos (1976/1978) en el ámbito de las investigaciones históricas. Entre otros, el que se refiere a la prueba que dio Cauchy de la conjetura de Descartes-Euler relativa a la característica de los poliedros. En este caso, las investigaciones históricas del propio Lakatos, sustentadas en un MER_2 específico del ámbito matemático en cuestión (compatible con el MER general de *conjeturas, pruebas y refutaciones*), corrigen las interpretaciones clásicas de los historiadores de las matemáticas sustentadas en un MER_1 (compatible éste, a su vez, con el MER general que Lakatos designa como *metodología euclídea*).[17]

Estos ejemplos permiten dar una reinterpretación (ampliada al caso de la didáctica) de la tesis, aparentemente circular, según la cual: "[...] dos metodologías rivales pueden ser evaluadas con la ayuda de la historia (normativamente interpretada) [...]" (Lakatos, 1971/1982, p. 11).

Para ello, tomando como ejemplo prototípico el caso de la génesis del álgebra que hemos descrito anteriormente, formularemos la última de las tesis de este trabajo:

[17] [...] Euclides ha sido el genio maligno particular de la historia y la enseñanza de las matemáticas, tanto a nivel introductorio como a nivel creativo (Ibíd., p. 163). La *metodología euclídea* ha desarrollado el estilo deductivista que recubre el tema de estudio de un aire autoritario, comienza con una exclusión de monstruos disfrazada con definiciones generadas por la prueba y con el teorema completamente desarrollado [y suprime] la conjetura original, las refutaciones y la crítica de la prueba. El estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se desvanece [...] (Ibíd., p. 166).

Tesis (3): *Supongamos que disponemos de un conjunto de proposiciones que constituyen una explicación* E_1 *de la génesis, del desarrollo histórico, de la utilización, de la difusión o de la transposición institucional de cierto ámbito de la actividad matemática. Esta explicación, como todas, se sustenta en cierto* MER_1 *específico de dicho ámbito. Supongamos, además, que aparecen hechos históricos (o didácticos) que no encajan en esta explicación y que, utilizando otro* MER_2*, la comunidad científica propone una explicación alternativa*[18] E_2 *que permite dar cuenta de los hechos (históricos o didácticos) que permanecían inexplicados al tiempo que saca a la luz fenómenos hasta entonces invisibles. Podemos suponer, incluso, que* E_2 *permite explicar por qué* E_1 *no era capaz de dar cuenta de los hechos citados y por qué los correspondientes fenómenos permanecían invisibles para la mirada de la comunidad científica. En esta situación diremos que el* MER_1 *ha sido evaluado (y corregido) con ayuda de la historia (o la didáctica) "normativamente interpretada" por el* MER_2.

En resumen, la didáctica de las matemáticas puede utilizar, junto a los hechos didácticos, los hechos históricos (una vez interpretados como fenómenos) para elaborar, evaluar y, en su caso, corregir determinados MER específicos. Análogamente, la historia de las matemáticas (y, por extensión, la historia de la ciencia) puede tomar en consideración ambos tipos de hechos en la construcción, evaluación y posible corrección de los MER específicos que utiliza. Se pone así de manifiesto que la historia y la didáctica (de las matemáticas), conservando su autonomía relativa, tienen en común una dimensión básica y fundamental: la *dimensión epistemológica*.

AGRADECIMIENTOS

Investigación financiada por el proyecto EDU2012-39312-C03-03 del Ministerio de Economía y Competitividad de España.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M., M. Bosch y J. Gascón (2011), "La TAD face au problème de l'interaction entre cadres théoriques en didactique des mathématiques", en M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (eds.), *Un panorama de la TAD. An overview of ATD*, Barcelona, Centre de Recerca Matemàtica, pp. 33-55.

Barquero, B., M. Bosch y J. Gascón (2010), "The 'ecology' of mathematical modelling: Constraints to its teaching at university level", en V. Durand-Guerrier, S. Soury-

[18] Es importante subrayar que no sería posible comprender las limitaciones de un MER_1 si no se dispone de un MER_2 alternativo que permita formular (y predecir) fenómenos nuevos, además de reformular los antiguos desde una perspectiva más comprensiva.

Lavergne y F. Arzarello (eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME6), Lyon, INRP, pp. 2146-2155 (www.inrp.fr/editions/cerme6).

Barbé, J., M. Bosch, L. Espinoza y J. Gascón (2005), "Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions in Spanish high schools", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 59, pp. 235-268.

Bolea, P., M. Bosch y J. Gascón (2001), "La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 21, núm. 3, pp. 247-304.

Bolea, P., M. Bosch, F. J. García, J. Gascón, L. Ruiz-Higueras y T. A. Sierra (2005), "Analyse de «La mesure en CM1» d'après la Théorie Anthropologique du Didactique", en M.-H. Salin, P. Clanché y B. Sarrazy (eds.), *Sur la Théorie des Situations Didactiques* (Hommage à Guy Broussseau), Grenoble, La Pensée Sauvage.

Bosch, M. y J. Gascón (2005), "La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques", en A. Mercier y C. Margolinas (eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 107-122.

——— (2007), "25 años de transposición didáctica", en L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, Jaén, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, pp. 385-406.

Bosch, M., C. Fonseca, y J. Gascón (2004), "Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 24, núm. 2-3, pp. 205-250.

Bourdieu, P. (2001), *Science de la science et réflexivité*, París, Editions Raisons d'Agir.

Brousseau, G. (1986), "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 7, núm. 2, pp. 33-115.

——— (1996), "La didàctica de les matemàtiques en la formació del professorat", *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, vol. 11, núm. 1, pp. 33-45.

——— (1997), *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1985/1991), *La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage (2a. edición 1991).

——— (1999), "L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, núm. 2, pp. 221-266.

——— (2002), "Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation", en J.-L. Dorier, *et ál.* (eds.), *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques,* Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 41-56.

——— (2006), "Émanciper la didactique?", exposé présenté le 8 février 2006 dans le cadre du séminaire de l'axe II («Didactique et anthropologie des connaissances scolaires») de l'UMR ADEF.

——— (2007), "Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique", en

L. Ruiz-Higuereas, A. Estepa y F. J. García (eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, Jaén, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, pp. 705-746.

Chevallard, Y., M. Bosch y J. Gascón (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona, ICEUB/Horsori.

Elias, N. (1983/1990), *Compromiso y distanciamiento*, Barcelona, Ediciones Península.

García, F. J., J. Gascón, L. Ruiz-Higueras y M. Bosch (2006), "Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, vol. 38, núm. 3, pp. 226-246.

García, R. (1994), "Interdisciplinariedad y sistemas complejos", en E. Leff (comp.), *Ciencias sociales y formación ambiental,* Barcelona, Editorial Gedisa, UNAM.

——— (2006), *Sistemas complejos. Conceptos, método y fundamentación epistemológica de la investigación interdisciplinaria*, Barcelona, Editorial Gedisa.

Gascón, J. (1993), "Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 13, núm. 3, pp. 295-332.

——— (1994), "El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas", *Educación Matemática*, vol. 6, núm. 3, pp. 52-64.

——— (1994-1995), "Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'«arithmétique généralisée»", *Petit x,* núm. 37, pp. 43-63.

——— (1998), "Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18, núm. 1, pp. 7-34.

——— (2001a), "Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*RELIME*), vol. 4, núm. 2, pp. 129-159.

——— (2001b), "Reconstrucción de la divisibilidad en la Enseñanza Secundaria", *Quadrante. Revista de Investigação em Educação Matemática*, vol. 10, núm. 2, pp. 33-66.

——— (2003), "From the Cognitive to the Epistemological Programme in the Didactics of Mathematics: Two Incommensurable Scientific Research Programmes?", *For the Learning of Mathematics,* vol. 23, núm. 2, pp. 44-55.

——— (2011a), "Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, vol. 14, núm. 2, pp. 203-231.

——— (2011b), "¿Qué problema se plantea el enfoque por competencias? Un análisis desde la teoría antropológica de lo didáctico", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 31, núm. 1, pp. 9-50.

——— (2013), "La revolución brousseauniana como razón de ser del grupo Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica", *AIEM*, núm. 3, pp. 69-87.

Iranzo, V. (2005), "Filosofía de la ciencia e historia de la ciencia", *Quaderns de filosofia i ciència,* 35, pp. 19-43.

Klein, J. (1934/1968), *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, Nueva York, Dover Publications.

Kuhn, T. S. (1977/1983), *The Essential Tension. Selected Studies in Scientific Tradition and Change,* Chicago, The University of Chicago Press [Trad. española: *La tensión esencial. Estudios selectos sobre la tradición y el cambio en el ámbito de la ciencia*, Madrid, Fondo de Cultura Económica, 1983].

Lakatos, I. (1971/1982), "History of Science and its Rational Reconstructions", en R. C. Buck y R. S. Cohen (eds.), *PSA 1970*, serie Boston Studies in the Philosophy of Science, vol. 8, Dordrecht, Reidel, pp. 91-136 [Trad. española: *Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales*, Madrid, Tecnos, 1982].

——— (1976/1978), *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press [Trad. española: *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático,* Madrid, Alianza Editorial, 1978].

——— (1978/1981), *Mathematics, Science and Epistemology*, Philosophical Papers vol. 2, Cambridge, Cambridge University Press [Trad. española: *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Madrid, Alianza, 1981].

Popper, K. (1934/1973), *Logik der Forschung*, Viena, Springer [Trad. española: *La lógica de la investigación científica*, Madrid, Tecnos, 1973].

——— (1956/2011), *Post scriptum a La lógica de la investigación científica,* Madrid, Tecnos, 2011.

Piaget, J. y R. García (1982), *Psicogénesis e historia de la ciencia*, México, Siglo XXI (4a. edición).

Rodríguez, E., M. Bosch y J. Gascón (2008), "A networking method to compare theories: metacognition in problem solving reformulated within the Anthropological Theory of the Didactic", *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, vol. 40, núm. 2, pp. 287-301.

Ruiz-Munzón, N., M. Bosch y J. Gascón (2011), "Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización", en M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (eds.), *Un panorama de la TAD. An overview of ATD*, Barcelona, Centre de Recerca Matemàtica, pp. 743-765.

Schneider, M. (2013), "Utiliser les potentialités phénoménotechniques de la TAD: quel prix payer?", conferencia impartida en el Cuarto Congreso Internacional sobre la TAD (CITAD 4), celebrado en Toulouse en abril de 2013 (pendiente de publicación).

Serrano, L., M. Bosch y J. Gascón (2010), "Fitting models to data: the mathematising step in the modelling process", en V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (*CERME6),* Lyon, INRP, pp. 2186-2195.

Sierra, T. A. (2006), *Lo matemático en la creación y análisis de Organizaciones Didácticas. El caso de los Sistemas de Numeración*, tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid.

Sierra, T. A., M. Bosch y J. Gascón (2007), "Interrelación entre lo matemático y lo didáctico en la reconstrucción escolar de los sistemas de numeración", en L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García, (eds.) *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, Jaén, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, pp. 359-384.

Torretti, R. (2012), "Fenomenotecnia y conceptualización en la epistemología de Gaston Bachelard", *Theoria*, núm. 73, pp. 97-114.

Weber, M. (1904/2009), *La "objetividad" del conocimiento en la ciencia social y en la política social*, trad. de Joaquín Abellán, Madrid, Alianza Editorial, 2009.

DATOS DEL AUTOR

Josep Gascón
Universitat Autònoma de Barcelona, España
gascon@mat.uab.cat
www.atd-tad.org

Phenomenology, Praxis, and the Question of Mathematical Objects

Luis Radford

In memoriam
Guillermina Waldegg

Abstract: In this article, I discuss some aspects of the manner in which phenomenology has dealt with the question of the nature of objects of knowledge and the knowability of such objects. I focus on Kant's phenomenology and consider in particular some ontological presuppositions that make Kant's phenomenology both Platonist and anti-Platonist. Then, I make a brief incursion into Hegel's phenomenological approach and Marx's critique of Hegel, Kant, and German idealism in general. In the last part of the article, I comment on Marx's idea of *praxis* as an entirely new path to tackle the question of the nature and knowability of objects of knowledge. I discuss some of the implications of such an idea for mathematics education. I end up sketching a Hegelian dialectic materialist concept of knowledge that provides room for understanding knowledge as something ineluctably embedded in cultural praxis.

Keywords: phenomenology, sense, sensation, mathematical objects, praxis, dialectical materialism.

Resumen: En este artículo discuto algunos aspectos de la forma en que la fenomenología se ha ocupado de la cuestión de la naturaleza de los objetos de conocimiento y la posibilidad de conocer este tipo de objetos. Me centro en la fenomenología de Kant y considero, en particular, algunos presupuestos ontológicos que hacen a la fenomenología de Kant a la vez platónica y anti-platónica. Después hago una breve incursión en el enfoque fenomenológico de Hegel y la crítica de Marx a Hegel, Kant y el idealismo alemán en general. En la última parte del artículo comento la idea marxista de la *praxis* como una nueva ruta para abordar la naturaleza de los objetos de conocimiento y la posibilidad de conocer dichos objetos. Además, discuto algunas de las implicaciones de tal idea en la educación matemática. Termino esbozando un concepto materialista dialéctico hegeliano de conocimiento que proporciona el espacio para entender el conocimiento como algo ineluctablemente inserto en la praxis cultural.

Palabras clave: fenomenología, sentido, sensación, objetos matemáticos, praxis, materialismo dialéctico.

Fecha de recepción: 31 de agosto de 2013; fecha de aceptación: 22 de noviembre de 2013.

1. INTRODUCTION

In his book, *The birth of mathematical objects*, Enrico Giusti (2000) admits that "one of the most embarrassing questions for a mathematician is to ask him what he deals with." Of course, we could say that mathematics deals with numbers, functions, shapes, and so on. But what kind of objects are they? Giusti's point is that, indeed, it remains difficult to find a straight, clear, and concise answer to that question.

The question, of course, is of interest to mathematics educators. We cannot talk about the teaching or learning of functions or numbers, for instance, if we do not have a clear understanding of the *nature* of functions or numbers, that is, of what functions or numbers are. Mathematics education discourse provides itself with a series of metaphors that somehow reveal an imaginary dimension to talk about mathematical knowledge. One is the "manufacturing" metaphor: knowledge is expressed as construction. Students *construct* knowledge. Another metaphor is the one of "reaching," which comes in an assorted variety of images; students try to *discover* or *uncover*, or to get *access* to mathematical objects, as if these objects were there, hanging in a kind of Platonic world of ideas.

These metaphors are not banal. On the contrary, they are concrete scars of the legendary painful struggle of Western thought to understand the question of knowledge. More precisely, these metaphors are an attempt to come to grips with the question of the nature of knowledge and the relationship of subject and knowledge. While the question of the nature of knowledge is an *ontological* question, the question of the relationship between subject and knowledge is an *epistemological* question: it deals with the extent to, and the manner in which, things are knowable. Naturally, the ontological and the epistemological questions are interrelated: one does not make sense without the other.

In this article, I discuss some aspects of the manner in which phenomenology investigated the aforementioned ontological and epistemological questions. I focus on Kant's phenomenology and consider in particular some ontological presuppositions that make Kant's phenomenology both Platonist and anti-Platonist. Kant's phenomenology is of particular interest to mathematics education not only because of the influence his phenomenology has had on Piaget's (1970) work and on contemporary educational constructivism (e.g., Cobb, Yackel and Wood, 1992; Yackel and Cobb, 1996), but also because, as we shall see later, Kant's work brings the knowing subject to the fore. In doing so, Kant faces the problem of the link between the subjective dimension introduced by the individual in the act of knowing and the objective dimension of knowledge that transcends the knowing subject *as such*. Kant reflects profoundly on the epistemic role of the senses and the sensual. In light of the recent "return of the body" and the "embodied cognition" in psychology, linguistic, anthropology, and education, Kant's reflections appear very interesting and hard to dismiss.

After discussing Kant's views on the senses and the sensual, I make a brief incursion into Hegel's phenomenological approach, and end up with Marx's critique of Hegel, Kant, and German idealism in general. In the concluding section, I comment on Marx's idea of *social practice* –more precisely, *praxis*) as an entirely new path to tackle the aforementioned ontological and epistemological questions. I discuss the implications of Marx's idea of *praxis* for mathematics education and mention some problems that still remain open.

2. KANT

Phenomenology is usually associated with thinkers such as Edmund Husserl (1900/2001; 1931) and Maurice Merleau-Ponty (1945). Both of them have indeed been instrumental in the development of phenomenology as a domain of inquiry. In *Logical Investigations* (Husserl, 1900/2001), Husserl talks about the phenomenology of the experiences of thinking and knowing. This phenomenology, he says, "has, as its exclusive concern, experiences intuitively seizable and analysable in the pure generality of their essence, not experiences empirically perceived and treated as real facts" (Ibíd., p. 86). Husserl is interested in understanding the various modes of lived experiences as defined by the manner in which we relate to things as they "appear." For this reason, he tells us in Draft B of the 1927 article on phenomenology he writes with Heidegger for the *Encyclopaedia Britannica*, "the lived experiences are called phenomena" (Husserl, 1997, p. 110), and the turning of the gaze to those phenomena is where the "phenomenological attitude" resides (Ibíd., p. 110).

Yet phenomenology goes back considerably earlier, as far back as Parmenides and his famous distinction between knowledge and opinion, or reality and appearance, or to put it in Platonic terms, ideas and things. Since then, the ontological status of reality and the explanation concerning the manner by which reality shows itself to us has been a matter of debate, conflict, and disputation. Plato, as we know, suggests that things are related to ideas through "participation." Thus, a thing is beautiful because of its participation in the idea of beauty. In more general terms, appearances are caused by "participation" in their corresponding *eidos*.

If it is true, hence, that phenomenology goes back to the pre-Socratic thinkers and that it underwent a substantial development in Plato's theory of forms, it is also true that phenomenological concerns were alive and well in the philosophical circles of empiricists and rationalists of the 17^{th} and 18^{th} centuries.

In Kant, we find a meticulous discussion of phenomenology. Kant's *Critique of Pure Reason* can even be considered a treatise on phenomenology–one that inquires into the structures of appearances and the limits of what is knowable to humans. To distinguish between appearance, reality, and objects of knowledge, Kant, much as Husserl, has to elaborate a complex conceptual terminology.

Perhaps our best starting point is a passage in the Preface that Kant adds to the 1781 original version of the *Critique of Pure Reason*. In the reworked version (called version B, published in 1787, when Kant was 64 years old), he says:

> A new light flashed upon the mind of the first man (be he Thales or some other) who demonstrated the properties of the isosceles triangle. The true method, so he found, was not to inspect what he discerned either in the figure, or in the bare concept of it, and from this, as it were, to read off its properties; but to bring out what was necessarily implied in the concepts that he had himself formed *a priori*, and had put into the figure in the construction by which he presented it to himself. If he is to know anything with *a priori* certainty he must not ascribe to the figure anything save what necessarily follows from what he has himself set into it in accordance with his concept (Kant, 1787/1929, p. 19; B xi-xii).

The first part of the passage reveals Kant's acknowledgment and dismissal of the British empiricist approach to knowledge formation (as elaborated, in particular, by Hume and Berkeley). The second part ("but to bring out...") reveals Kant's alignment with the rationalist tradition (as epitomized by Descartes, Leibniz and others). In fact, Kant's theory of knowledge and its concomitant phenomenology is a desperate battle to reconcile both camps, as this passage already intimates. But the previous passage tells us about more than this battle in which Kant participated over the course of his entire life. The passage also reveals a set of central themes of his theory of knowledge:

1. the distinction between a) *experimental* concepts (i.e. concepts derived from experience) and b) *a priori* concepts (by which Kant means concepts independent of all experience and all impression of the senses);
2. the *sensuous construction* of representations (e.g., a particular triangle in the previous example) as a manner to bring out the logical properties of concepts;
3. the idea of the human mind as architectonically built so as to *logically* reason through the *sensible* with apodeictic certainty.

These three themes develop around two chief ontological and epistemological assumptions:

The *ontological* assumption concerns the *nature* of the objects of knowledge. For Kant there is a mind-independent reality, which lies beyond appearance. The world, he says, is divided into a world of the senses and a world of the understanding, the former populated by *phenomena* and the other by intelligible entities or things in themselves, which he terms *noumena*. It would indeed be ridiculous, Kant argues, to claim that "there can be appearance without anything that appears" (Kant, 1787/1929, p. 27; Bxxvii), "For if the senses represent to us something merely as it appears, this something must also in itself be a thing, and an object of a non-sensible intuition, that is, of the understanding" (Ibíd., pp. 266-267; B306). Naturally, the aprioristic stance that Kant adopts brings him close to Platonism and its crucial dichotomic distinction between objects of knowledge (ideas) and phenomena.

The *epistemological* assumption concerns the manner in which, according to Kant, we come to know. As the example of the triangle suggests, in coming to know something, we resort to a *sensuous construction or representation*; we represent not *the* thing to be known (for instance, the concept of dog) but *a* particular one. What we learn of the thing to be known is not read from the particular representation thus drawn, but from something general that, for him, is beyond the sensuous realm: something not sensual but intellectual.

Kant's epistemology rests indeed on the claim that human cognition will always need *both*, a sensible, hence, experiential component, and an intellectual part. The sensible part he theorizes through the concept of *sensibility*, that is, our capacity for being affected by material things, and the intellectual part through the concept of *understanding*. He says:

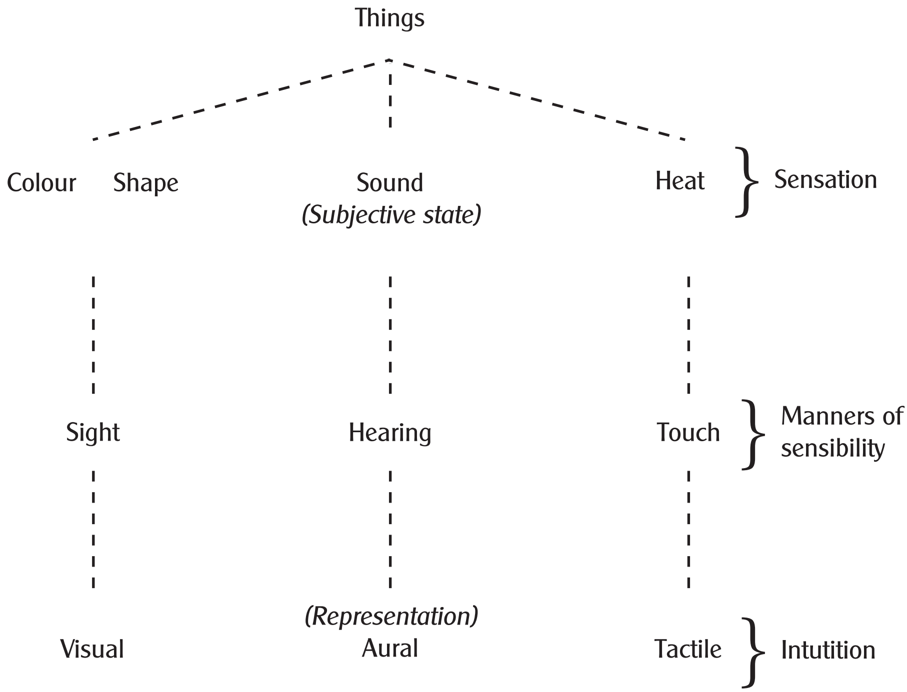
> Without sensibility no object would be given to us, without understanding no object would be thought. Thoughts without content are empty, intuitions without concepts are blind. It is, therefore, just as necessary to make our concepts sensible [...] as to bring them under concepts. These two powers or capacities cannot exchange their functions. The understanding can intuit nothing, the senses can think nothing. Only through their union can knowledge arise (Kant, 1787/1929, p. 93; B75-76).

The chapter on "Transcendental Aesthetic" is central to our understanding of Kant's phenomenology, for it is there that he introduces the concept of sensibility and other related concepts that ground the subject's phenomenological experience. Sensibility, as previously mentioned, is for Kant the embodied manner in which we sense the world. It is in our nature as human beings to be affected by things around us in specific manners. Sight, hearing, and touch are *manners* of sensibility, which may be different from other forms of life. Sensibility and its various manners are distinguished from *sensation*, which Kant defines as "The effect of an object on the capacity for representation, insofar as we are affected by it" (Ibíd., p. 64; B34). Sensation (e.g., colour, sound, heat) is, hence, a state caused in the subject by the presence of an object, and as such is specifically subjective.

In his dealing with phenomenology, Kant also introduces another important concept: the concept of *intuition*. Intuition is a mode of cognition, which "relates immediately to the object, and is single" (Ibíd., p. 314; A320-B377). In other words, intuition is the manner in which the immediate representation of the object is furnished by the corresponding manner of sensibility. In semiotic terms, intuition is a form of indexicality mediated by sensibility.

Let me illustrate these concepts here through Kant's example of wine as an object of knowledge. I could resort to a mathematical example, but the example of wine is good enough. Wine, in its phenomenological experience, affects us thanks to our faculty of sensibility. Furthermore, in affecting us, it appears to us not as such but as mediated by modes of sensibility: colour, taste, smell, etc., that modify our physical sense organs; the raw sensuous data constitute the *matter* of intuition (see Figure 1). Notice, however, that

Figure 1 Kant's structure of sense and sensation



we intuit not wine in general but a *specific* wine (it might be a specific 2009 Dolcetto D'Alba from Piemonte or a Nero d'Avola from Sicily). This is what Kant means by intuition relating to a single object.

Now, it is not really clear in Kant's work whether intuition is located in the sensible or the intellectual realm. As Buroker (2006, p. 40) notes, "'intuition' sometimes refers to the pre-conscious data received through sensibility, and sometimes to a conscious, intellectually processed perception." The fact that Kant calls intuition a *mode of cognition* seems however to put it on the side of the intellectual while allowing it to still be a carrier of sensations so to speak. What seems plausible though, given Kant's insistence on the need for empirical data to conform to the a priori concepts of the intellect, is that intuition requires a prior intellectual processing in order for us to become conscious of intuitive data. Kant's theory and contemporary theories of schematism rest on this crucial idea of prior intellectual processing.

Be that as it may, the sensation of the wine taste, for instance, Kant tells us, "does not belong to the objective determinations of the wine, not even if by the wine as an object we mean the wine as appearance, but to the special constitution of sense in the subject that tastes it" (Kant, 1787/1929, p. 73; B45). For Kant, taste and other sensations produced on us by wine, such as colour and smell, "are connected with the appearance only as effects accidentally added by the particular constitution of the sense organs" (Ibíd., p. 73; B46). Sensations are unable to yield true knowledge; they do not constitute an objective determination of the object, as they pertain to the subjective dimension of the sensing subject, and change from one individual to other. As a result, although the various modes of sensation of an object are unavoidably attached to their corresponding intuitions, they are not, according to Kant, necessary conditions of the object's appearance. And as such, sensations are not a constitutive part of the process of knowing the concept of wine. They are kinds of side effects of the manner in which we come to know things in the world. In a marginal manuscript note to his copy of the first edition of his *Critique of Pure Reason*, Kant wrote: "Sensation is that which is really empirical in our cognition [...] Sensation therefore lies outside all a priori cognition." (Inserted in Kant's copy of the First Edition in the chapter of Schematism, see p. 274; Guyer and Wood 1998 edition). Because of the Kantian duality between the sensible and the intellectual, sensations remain decidedly within the realm of the concrete and the organic.

But there is an interesting corollary that derives from Kant's phenomenology that we must not omit. The corollary deals with the limits of human reason. Let me mention it *en passant*. For Kant, the faculty of understanding cannot work in a spatial-temporal vacuum; it needs things to be presented to us through sensibility–for instance through a figure, like in the aforementioned instance of the triangle or a glass of wine in our second example. What the understanding can know, hence, is the objects of experience, not the objects as such, the *noumena*–those things in themselves that are not and cannot be objects of sensible intuition. In other words, because noumena correspond to a realm where our sensible faculty of intuition has no relation whatsoever, we cannot escape the "startling" consequence (to use Kant's term) that we do not and cannot have knowledge of things as they are, i.e., things in themselves.

This is, in a nutshell, the limit of human reason, according to Kant. The limit results from two innovative moves that Kant makes. The first concerns the question of *subjectivity* and the new role with which Kant endows the knowing subject. The second one concerns the manner in which sensibility is conceptualized.

As to the first move, I have mentioned previously that, in the introduction of the distinction between phenomena and noumena, Kant goes back to Platonism. Yet, Kant's approach brings forward a new conception of the subject. As Rockmore (2011, p. 46) mentions in his recent book *Kant and Phenomenology*, "Early Greek philosophy often approaches the general problem of knowledge without taking the subject into account." Yet, the subject of Kant's *Critique of Pure Reason* is not a psychological subject, but an abstract one that we may term the *epistemic subject*. Rockmore goes on to say:

> All the main British empiricists are concerned with human knowledge from the perspective of finite human beings. Kant, on the contrary, avoids any hint of philosophi-

cal anthropology because he is concerned to avoid the difficulty that, since Husserl, is known as psychologism, roughly the confusion between the analysis of epistemological conditions and their psychological description (Rockmore, 2011, p. 46).

As to the second move, Kant's conceptualization of sensibility draws the epistemic contours that we bring with us as we experience the world in peculiar ways. Our sensibility, according to Kant, enables us to be affected by things and to produce appearances or representations of things in a concrete manner. In doing so, sensibility *filters* what we come to know.

To sum up, while Kant moves into new directions through the insertion of an abstract sensing constructive epistemic subject, and elaborates a sophisticated phenomenological account around the manner by which we intuit things, he remains, as ontology is concerned, a Platonist who, although acknowledging the importance of sensuous experience, makes sure to keep phenomena and noumena separate. Although controversial, his epistemology is clearly innovative. His ontology, by contrast, is squarely traditional. In his ontology, Kant is a Platonist. In his epistemology, he is anti-Platonist.

Let me now turn to Hegel's phenomenology.

3. HEGEL

For Kant, as we just saw, things in themselves are part of a mind-independent world. Things in themselves transcend the subject. Hegel suggests a different route. He considers Kant's critical philosophy a form of empiricism, although not equal to empiricism in general, as practiced by Hume and others. For Hegel, Kant's critical philosophy remains bounded to the "actual" and, hence, is unable to understand the necessary theoretical dimensions of concepts. For Hegel, Kant's approach remains empiricist in that the perceptual and actual realm of experience is considered simply received, grasped, and then elevated to the realm of the intellectual. He says: "The precise stage of consciousness at which the Kantian philosophy grasps spirit [i.e., mind] is perception" (Hegel, 1978, p. 27). As we shall see later, for Hegel, consciousness comes into being in a sensuous form, what he calls *sensuous consciousness* (Ibíd., p. 19).

Hegel criticizes Kant for holding too strong a distinction between phenomena and noumena. Like Fitche (1994), Hegel turns away from the idea of noumena or thing-in-itself. To the static ontology of Kant, Platonists and Idealists, Hegel opposes an ontology of *movement*, in which things and beings react in a mutual or dialectical manner, and articulates an approach in which the distinctions between falsity, appearance, and truth are considered as relative categories. Thus, appearance, for instance, is not the index of a noumenon, but a moment on the way to an always moving historical truth.

In Hegel's account, subjects come to know through interaction with things. Knowing is not merely something that the subject "constructs" or the intellectual "grasping" of a mind-independent object. For, as Hegel argues, "consciousness simultaneously distinguishes itself from something, and at the same time relates itself to it." (Hegel, 1977, pp. 52-53). That is, consciousness is self-relation and relation to otherness. It is in this context that he distinguishes *being-for-another* from *being-in-itself*. Being-for-another is the manner in which the individual comes to relate to a thing, or comes to know it. Being-in-itself is the knowledge of the thing in all its determinations, as exterior to the subject and "posited as existing outside of being-for-another." This being-in-itself, he says, is called *truth*.

It is in this movement between being-for-another and being-in-itself that individual consciousness and historical-cultural consciousness develop and subject and object determine each other. Here Hegel refutes solipsism. In Kant's critical philosophy, like in all forms of idealism, the subject can know only what it has put in the object and the subject remains ineluctably a prisoner of its own mind.

In Hegel's account, the development of consciousness is ensured by a dialectical critical stance towards itself. Consciousness finds the conditions of possibility of its development in the inner contradictions of previous formations and concepts. Without contradiction there would not be development. There would be mere identity–the identity of subject and object, of mind and thing, of consciousness and itself.

In his well-known and dense book, *The Phenomenology of Spirit*, Hegel offers an account of consciousness's development. In its development, consciousness first finds sensuous immediacy, followed by perception, then understanding. In its first stage–that of sensuous immediacy– the object reaches us through our senses. "The object regardless of its being external or internal, is still devoid of any *thought determination* other than, firstly, that it simply *is*" (Hegel, 1978, p. 23). Sensuous consciousness knows *sense-certainty* only.

Hegel argues that, at this stage, consciousness appears as the richest in content and the poorest in thought. Consciousness is filled with the *determinations of feeling* and with the *indeterminations of thought*. Here the object is a wholly immediate being. Immediacy is in fact devoid of truth and filled with being. Rather than constituting a unity, here the object is "an independent being over against me [...] a singleness confronting my single immediacy" (Ibíd., p. 23). Here consciousness is sensed otherness and abstract relation between subject and object.

Perception is a more developed relation between subject and object. In perception, the immediate and underdeveloped unity of mind and thing is overcome. That which is sensuous becomes *other*. But in perception this other is a *thing*, not another singleness, and as such has many properties or predicates. In short, it is a *universal:*

> Perception starts with the observation of sensuous material. It does not remain confined to smelling, tasting, seeing, hearing and feeling however, but necessarily proceeds to relate what is sensuous to a universal which is not a matter of immediate observation. (Hegel, 1978, p. 27)

In perception, there is a recognizance of the sensuous material as being something else. The sensuous singleness becomes a sign. "Consequently, the many single beings of sensuousness become a range, a multiplicity of relations [...] and universalities" (Ibíd., p. 25).

Rather than an identity between the singularity of the object of perception and its universality, perception is its *contradiction*. "Its truth is rather that the general object is *appearance*" (Ibíd., p. 309). Sensuous immediacy does not know the truth. Perception begins to *demonstrate* the truth of things. But, Hegel claims, this demonstration is inadequate.

Consciousness moves beyond the inherent dialectical contradiction of perception and reaches the level of understanding, in which objects are considered as subjected to laws (in Hegel case, laws of necessity). "For the understanding consciousness [...] the world is a general object consisting of a realm of laws" (Ibíd., p. 311).

It is interesting to note that Hegel's phenomenology rests on a philosophy of language that is alien to the thought systems of Kant, empiricists and idealists. It is in language, Hegel tells us, that the forms of thinking find their conditions and possibilities. Through language we talk about things, but, reflectively, language also talks about he/she who speaks. We see here the dialectical reciprocity of things and beings as reflected through language. Dialectics is the discourse that forges the development of a universal consciousness. In this context, singular consciousness is at the same time universal. A singular consciousness is, in fact, a *concrete universal*, an instance of the universal through its various determinations. There is no such a thing as an "I" as pure individuality. "I" is unavoidably related to a form of universal consciousness. Explaining Hegel, French philosopher Jean Hyppolite says:

> La conscience qui prétend vivre la singularité pure sans la penser ou la signifier ne peut en fait que se dissoudre, c'est en vain qu'elle refuse le langage et le discours, et prétend atteindre un absolu ineffable. Ce qu'elle dit est le contraire de ce qu'elle vise, et c'est le langage qui a raison; ou si, par entêtement elle renonce au langage, elle ne peut que se perdre, se dissoudre. (Hyppolite, 1961, p. 14)

Hegel's philosophy of language helps also to clarify the nature of sensuous consciousness by realizing that the sensibly intuited thing of immediate apperception remains unsayable. For the characteristic of the singular is its ineffable nature. As soon as we utter *this*, we utter a universal, not a singular (it can be this table, this chair, this pen, etc.). Through the term 'this' we are already making a cognitive distinction between particulars; hence, we have already moved beyond the immediacy of immediate apperception. Hegel says: "Of course, we do not envisage the universal This or Being in general, but we utter the universal; in other words, we do not strictly say what in this sense-certainty we mean to say" (Hegel, 1977, p. 60). The finesse or delicacy of the particular cannot be grasped through the overly thick granularity of language.

Hyppolite comments as follows:

> Nous croyons bien saisir l'être singulier immédiat comme singulier, mais ce que nous disons c'est ce qu'il y a de plus universel, un ceci, un celui-ci, mais tout est un ceci, tout moi est un celui-ci. Nous croyons saisir la richesse même, il ne nous reste de cette expérience que la conscience de notre pauvreté. Nous voyons le singulier se transformer en universel, et l'être unique passer dans le néant comme néant de toutes les déterminations. (Hyppolite, 1961, pp. 15-16)

Hegel says:

> When I say "this Here", "this Now", or a "single item", I am saying all Thises, Heres, Nows, all single items. Similarly, when I say "I", this singular "I", I say in general all "Is"; everyone is "I", this singular "I" (Hegel, 1977, p. 62).

Through language, things and beings lose the horrifying silent nothingness of pure singleness and become community.

Hyppolite continues:

> [...] certes nous pouvons reprendre ces déterminations dans leurs connexions et retrouver alors l'être comme déterminé, mais nous entrons dans le discours qui s'amorce avec le geste par lequel nous désignons les choses, et si l'universel se particularise, ou se détermine de proche en proche, nous restons cependant toujours dans l'universel sans jamais pouvoir dire autre chose que de l'universel (Hyppolite, 1961, pp. 15-16).

Rather than naming the particular, the word negates it. For, as Vygotsky would say later on, "The basic and central feature of any word is generalization. All words generalize" (Vygotsky, 1987, p. 249). As such, a word does not point to *this* or *that* particular object, but rather to a class of objects. Yet, a word cannot help but keep the particular as an echo. In its truly dialectical nature, the word signifies what is not there by signifying what is there, and signifies what is there by signifying what is not there (Hyppolite, 1961, p. 34).

To sum up, Hegel (1977) elaborated a phenomenology based on a dialectical relationship between universals and particulars, between things and beings. In this phenomenology, things and beings exist as phenomena. One distinctive trait of this phenomenology is the fundamental role that is ascribed to language. Language is not merely considered a system of signs. It constitutes the universe of sense, where things and beings are reflected by and reflect each other. Rather than being a medium of communication, language is the material in which things, thought, and consciousness come into being in a unitary manner. As Feuerbach puts it, in Hegel being in language is the being of beings, much as being in water is the being of fish (Feuerbach, 1843, Part 2: Critique of Hegel, Section 27).

As mentioned previously, for Hegel, the particular exists as something intended (*visé*) and ineffable, whose truth is its immediacy. In this context, thought is not something that goes from the silence of the immediate and unspeakable particular to a linguistic expression that would illuminate the particular as it were. For thought is not a form of intellectual elaboration of sensible intuitions. Thought is movement; thought is sense development. "Sense deploys itself and find its determinations without being previously given in an ineffable manner" (Hyppolite, 1961, p. 26). It is this extremely interesting aspect of Hegel's phenomenology that Vygotsky articulates in *Thinking and Speech*, in particular in the last chapter, in which the Russian psychologist deals with the relationship of word to thought. In that chapter Vygotsky suggests that "thought is not *expressed* but *realized* in the word" (Vygotsky, 1985, p. 328; see also Vygotsky, 1987, p. 250). In Hegelian terminology, it is in language that thought finds its determinations and effectuates its descent to the concrete. In a truly Hegelian spirit, Vygotsky articulates the relationship between thought and speech not as a thing, but as a process of contradictory units, subsumed into a dialectical unity behind which lies consciousness, which Vygotsky understands no longer in a pure Hegelian sense but in Marx's Hegelian version of it, that is to say, as a lived and emotional relation of the individual to its concrete life.

4. THE QUESTION OF BEING AND REALITY

Feuerbach, and Marx after him, recognizes in Hegel the merit of presenting a philosophy in which the question is no longer about representing the world. Yet, for Feuerbach as well as for Marx, the questions of being and reality remain abstract in Hegel. They remain urgent questions to be elucidated. What are the determinations of the real? What are the determinations of being? Although it is true that we are beings in language, this Hegelian insight remains very abstract. "*The question of being is indeed a practical question;* it is a question in which our being participates – a question of life and death." (Feuerbach, 1843, part 2). For, Feuerbach argues, "I owe my existence by no means to the verbal or the logical bread – to the bread in itself – but always only to *this* bread," and went on to assert that "Where words cease, life begins and reveals its secret [...] Existence has meaning and reason in itself, without being verbalized" (Feuerbach, 1843, Part 2: Critique of Hegel, Section 28).

Feuerbach summarizes his critique of Hegel as follows: "Hegel is a *realist,* but a *purely idealistic* realist, or rather an abstract realist; namely, a realist abstracting from all reality" (Feuerbach, 1843, Part 2: Critique of Hegel, Section 29).

Feuerbach's critique moves, hence, around the dissatisfaction with the idea of reality that remains abstract and thematized along the lines of language only. Feuerbach makes a plea for a philosophy of the concrete and the sensuous:

> *Taken in its reality* or regarded as *real,* the real is the object of the senses – the *sensuous.* Truth, reality, and sensuousness are one and the same thing. Only a sensuous being is a *true and real* being. Only through the senses is an object given *in the true sense,* not through thought *for itself* (Feuerbach, 1843, Part 3, Section 32).

Within Feuerbach's materialist approach, the real is equated to the sensible and practice becomes the sensorial relation of sensible beings to this sensuous real.

Up to the 1844 Paris Manuscripts, Marx remains a follower of Feuerbach. Yet, Marx starts finding some holes in Feuerbach's account. Against Feuerbach he argues that the real is not merely the real objects of sense. The real is certainly something much more complex than a heap of sensuous things. Moreover, Marx reminds us, the objects of our senses are *historical* objects that bear in themselves traces of human activity. If Hegel is right in suggesting a dialectical determination of things and beings, then we still have to make explicit how the historicity of things and knowledge come to affect the manner in which we come to be the subjects that we are through our interaction with things.

For if the nature of things resides in their human objectification, as Hegel contends, the nature of beings, we must accept, resides in their material subjectification.

To a large extent, the 1844 Paris Manuscripts and *The German Ideology* are Marx's efforts to achieve a more coherent view of humans and things as mutually constitutive. In particular, within the dialectical view opened up by Hegel, Marx goes beyond the traditional anthropological conception of five human senses and thinks of human senses as the whole range of historically constituted powers of subjectivity and intentionality. Thus, while materialism characterized itself through its opposition to (abstract) thought, Marx's materialism includes superior forms of sensing that appear as a result of individuals' cultural and political forms of life. These superior forms of sensing are thus cultural-historical modalities of individuals' relations to their sensuous historical objects. It is within this context that Marx argues in *The German Ideology* that our biological senses are transformed and that they become theoreticians. My FLM paper (Radford, 2010) about the eye as a theoretician is little more than a footnote to this interesting insight by Marx.

It is this same interesting insight that Vygotsky (1978) articulates in the book *Mind in Society*, in which he talks about the phylogenetic merging of biological and cultural lines of development.

But Marx's greatest insight, I think, is the following. Reality, Marx comes to realize, does not reside in the mind's objectification of a pre-existing world; nor is reality constituted by an objectifying mind either. To accept the first idea would amount to remaining in the confines of the causal version of transcendental idealism that assumes that we can reach things in themselves through their phenomenal appearances. To accept the second idea would amount to remaining in the confines of Hegel's realist idealism. The historical abruptness of Marx's *Theses on Feuerbach* (1998), written as sketchy notes in Brussels in January 1845, is a sudden rupture with both Hegel's idealism and Feuerbach's sensuous materialism.

Marx had then to answer the question of what constitutes the nature of beings and things whose conditions of possibility cannot be located in the intuitions and workings of the mind. As French philosopher Michel Henry (1976) notes, one after the other the *Theses on Feuerbach* (Marx, 1998) tirelessly give us the answer: the conditions of possibility of things and beings, of knowledge and consciousness, reside in *human praxis*–an entirely new conception of practice.

Marx' concept of *praxis* is a concrete response to the abstract reality of Hegel and the sensuous one of Feuerbach–in which sensuous subjects and objects still remain *general* categories. With Marx, objectification and subjectification are anchored in a view in which individuals are really concrete beings, "apprehended in a situation that is theirs, embedded in a web of relations, in the effective fabric of a pre-existing totality" (Henry, 1976, pp. 316-317). Individuals find their idiosyncratic and contingent determinations in history and in their specific society. This new conception of practice, to which Marx refers as *praxis,* is not, hence, a kind of ancillary background where people get in touch or gather for some purpose (as in modern versions of interactionism). Praxis is rather the foundation from which consciousness arises; *praxis is the ultimate ontological founding category in which individuals live their concrete lives, in which they labour, suffer, struggle, love, think, and hope*. Through the introduction of this new materialist and historical conception of practice, Marx moves away from the idealist and abstractionist conceptions of practices of his time.

5. IMPLICATIONS FOR MATHEMATICS EDUCATION

Marx' concept of praxis is certainly helpful in rethinking the key concepts of mathematics education. It invites us to move away from classical accounts that cast knowledge in terms of representations or individual constructions or embodiments.

Certainly, the subject of praxis is a concrete subject. As such it is a subject who, in the act of knowing, acts with her entire body. The subject of praxis, however, is much more than an embodied subject. It is someone who interacts with material culture and other subjects, and in doing so, resorts to signs, language and other elements of culture and society. Yet, as mentioned in the previous section, it is not body only, or interaction, or signs, or language or discourse, or material culture, not even all these elements taken together, that count as the ultimate ontological founding category. The ultimate founding category is *praxis*.

A. N. Leont'ev (1978) is credited with having developed from a psychological viewpoint Marx's idea of praxis in his activity theory. However, as Leont'ev's introduction to his book makes it clear, his intention was not to develop a theory of activity. Actually, in the 1978 translation in English there are only 12 pages dedicated to discuss the structure of activity. The rest of the book is about something else, something that he considered the important thing: to understand how consciousness and personality emerge from activity. Not in the sense that the human psyche is merely a derivative of activity, but rather how the human psyche arises out of the contradictions, the transformations, and all the elements that come into play in activity. He was led, at least, to describe certain elements and certain layers of activity, but not to theorize activity in general.

Given the large spectrum of human activities, it may be very well the case that a general theory of activity is not achievable or useful. Be it as it may, we can try to reduce the scope of the spectrum of activities and focus on educational activities, those that are of interest to mathematics education, for example, teaching and learning classroom activities.

There are three points that derive from Leont'ev's concept of activity and Hegel's concept of knowledge that I would like to stress in this section.

5.1. Object/motive and the overcoming of dualism

First, Leont'ev provides us with a general schema about activity that makes it overcome the dualism of other approaches. Indeed, for me, the most significant element of Leont'ev's view on activity is the Hegelian dynamic connection between subject and society, that is, the connection between the individual and the sociocultural world. This connection appears in Leont'ev's account as a couple, consisting *of object* and *motive*.

The *object* is that which drives and sets the activity into motion. An object, "(fishing, for instance) is what endows the activity with a particular *intent*" (Roth and Radford, 2011, p. 6). The *motive* is both sociocultural and subjective (or individual): it is sociocultural in the sense that fishing has a sociocultural signifying valence attached to it; it is subjective in the sense that a motive is "determined by the sense of the child [or the individual] for a given task, a given situation" (Leont'ev, 1978, p. 178). The motive responds to a need that is not merely organic; it belongs also to the emotional realm.

The connection between the individual and the sociocultural at the basis of Leont'ev's concept of object/motive, is cast in such a way that it allows for a reconceptualization of the relation between the individual and the social. Human activity does not constitute a relationship that opposes the individual and society; As Leont'ev (1978) contends, "This must be stressed because psychology is now being flooded with positivist conceptions that are in every way imposing the idea of opposition of the human individual to society" (Ibíd., p. 51). Leont'ev criticizes positivist conceptions for reducing society to a mere "external environment to which [the individual] is forced to accommodate, in order not to appear 'nonadapted,' and to survive in exactly the same way as an animal is forced to adapt to an external, natural environment" (Ibíd., p. 51). This positivist perspective misses precisely the main point: "the fact that in society a man finds not simply external conditions to which he must accommodate his activity, but that these same social conditions carry in themselves motives and goals of his activity" (Ibíd., p. 51).

Within this context, the idea of teaching and learning can be formulated as an activity in which the student is not opposed to the teacher, nor is the teacher a simple coach, or assistant, or a transmitter of knowledge. The teacher is part of the joint activity through which learning and teaching occur. The teacher takes part in the teaching-learning activity; she enjoys and also suffers with the students. For activity in Marx's and Leont'ev sense is not just a gathering together, nor is it an ensemble of actions led by a contractual, utilitarian outlook: activity is a form of life, what Hegel and Marx called *labour* (Radford, 2012).

5.2 Knowledge

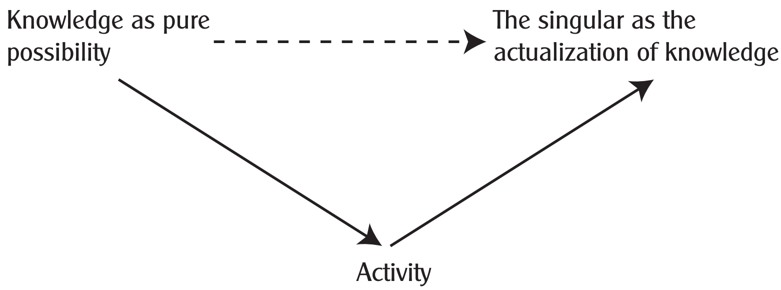
Hegel's concept of knowledge as movement opens up new avenues in which to theorize teaching and learning. From a Hegelian perspective, knowledge is not something that we represent. Actually, knowledge cannot be represented, for knowledge is always in motion. Knowledge is *pure possibility*. It is constituted of culturally and historically encoded forms of reflection and action that, instead of lending themselves to representation, are sources for action (Radford, 2013). Numbers, for instance, are not things or essences to be represented. They are possibilities for action (e.g., to count or to carry out complex calculations).

As pure possibility, knowledge cannot be an object of consciousness. To become an object of consciousness and thought, knowledge has to be set into motion. Knowledge has to be filled up with concrete determinations. And this can only happen through activity–sensuous and material activity. This is what students and teachers do when they participate in classroom activity.

Let us refer to a short example to illustrate these ideas. The example is about pattern generalization. Pattern generalization is a cultural activity at the heart of many ancient civilizations. The Pythagoreans and the Babylonians, for instance, practiced it, and thus, it started as an endeavour motivated by concrete counting processes or sense-making investigations. These endeavours became encoded ways of reflecting and acting that were refined in the course of cultural history (Diophantus, Fermat, etc.).

In contemporary curricula, in particular in English-speaking countries, pattern generalization appears often as a road to algebra. It is within this pedagogical intention that we have resorted to pattern generalization (see, e.g., Radford, 2011). As an object of knowledge, pattern generalization is not something to be represented. It is something to be known. However, from the students' viewpoint, pattern generalization (in fact all mathematical content to be known) appears, first, as pure possibility (a possibility to do something, to solve some problems or to argue about something). And in order for pattern generalization to be known, it has to be set into motion. Knowledge has to evolve and to *appear* in concrete practice. By being filled up with some conceptual content, what appears is not knowledge in its entirety, but a concrete instance of it. Hegel (2009) called it the *singular*. We have, then: 1) the *general*, which is knowledge as such (in this case pattern generalization), 2) the *activity* through which knowledge is actualized, and 3) knowledge in motion, filled up with conceptual content, that is, the *singular*. Figure 2 provides a diagram of these three elements.

Figure 2 The singular as knowledge actualized in activity



What Figure 2 expresses is the mediated nature of knowledge. We do not have access to knowledge but through mediation. As pure possibility, knowledge cannot be fully accounted for by anyone of its instances (the singulars). Not even the most perfect triangle reveals the depth of the concept of triangle, not because we will always make imperceptible mistakes in drawing a triangle or because there would be triangles with other shapes different from the one we drew. The reason is this: The concept of triangle cannot be revealed in its representation, because the concept is not representable. The concept is knowledge. That knowledge is possibility, and as such cannot be represented; it can only be actualized in the activity that fills it up with particular conceptual content.

The singular as actualization of knowledge in activity should not be seen as something static or as an end point, but as an *event*. It is rather an "unfinished and inherently open-ended event" (Roth, 2013). It is a process–a *semiotic process* through and through. Not only because in the activity that actualizes knowledge and transforms it into an event, students and teachers resort to discursive, embodied, and material signs and artifacts, but also overall (and indeed this is the real reason), because in mobilizing signs students and teachers engage in processes of signification. The singular is an activity-bound semiotic event.

From a semiotic viewpoint, there is something extremely important to understand about the activity that actualizes knowledge. This activity is, essentially, an activity of signification. In fact, the activity through which knowledge is actualized is an activity of conflicting significations. The teacher is aware of the aim of the activity. In our example, the aim (or in Leont'ev's terminology, the *object* of the activity) is to make the students aware of the historically and culturally constituted way of thinking and reflecting about pattern generalization. Before engaging in the activity, the students do not know about such a way of reflecting and thinking–at least not in all the scientific-cultural curricular details. If the students knew, there would not be learning on the horizon. The activity would be an exercise activity –i.e., practicing something already known. The epistemological asymmetry that underpins teaching and learning activity (Roth and Radford, 2011) infuses the activity with its inherent contradictions. The idea of contradiction has to be understood here in its dialectical sense, namely as precisely what drives the activity further.

Let me turn now to my last point: learning.

5.3 Learning

The fact that the students do not yet know the aim of the activity (e.g., how to generalize a pattern algebraically) does not mean that they cannot engage in the activity. In fact, they resort to what they already know. This is why it is not surprising that, when students engage in algebraic pattern activity, they resort to arithmetic generalizations.

The conflicting significations that are at the heart of the activity can be formulated in the following terms. The aim of the activity (knowing how to generalize patterns algebraically) is dynamically and variously refracted in the students' and teachers' consciousness as the activity unfolds. The conflicting significations move (in a dialectical sense), creating tensions that, at moments, may be partially resolved or intensified. Attenuated or not, these tensions do not disappear. They constitute mobile *wholes* made up of different perspectives and positions that each participant in the activity brings.

The attuning of inter-subjective perspectives is the requisite for learning to occur. It does not mean that teachers and students have to agree on, say, the manner in which a pattern can be generalized. Attuning refers also to matters of deep disagreement and unresolved tensions.

In previous work, we have suggested that learning can be studied through *processes of objectification*, that is, "those processes through which students gradually become acquainted with historically constituted cultural meanings and forms of reasoning and action" (Radford, 2010, p. 3). In light of the previous discussion, we want to stress that *acquaintance* does not mean *agreement*. It means *understanding*–a socially responsible and conceptually articulated understanding of something even if we do not agree with it.

6. SYNTHESIS AND CONCLUDING REMARKS

In this article, I argued that mathematics education cannot talk about the teaching or learning of mathematics without having a clear understanding of the *nature* of mathematical knowledge, that is, of what mathematical objects are. In other words, mathematics education theories need to specify the ontologies they resort to.

I started by mentioning two famous metaphors that have been developed to tackle, directly or indirectly, the ontological problem, namely mathematical objects as constructions or as ideas to be accessed. I cast my discussion in phenomenological terms and strived to sketch the path followed by two very different philosophical traditions: the Kantian and the Hegelian. Both traditions rest on different understandings and assumptions about knowledge and the knowing subject. In the last part, I endeavored to show how Marx's idea of practice, namely Marx's concept of praxis, is an attempt to reformulate the ontological and epistemological questions, that is, the question of the nature of knowledge and the question of the relationship between subject and knowledge, respectively. I argued that, within the Hegelian materialist dialectics as developed by Marx, it is not the individual's body only, or interaction, or signs, or language or discourse, or material culture, or even all these elements taken together, that count as the ultimate ontological founding category. The ultimate founding category is *praxis*. In the last section of the article, I discussed how praxis as an ontological category might serve as the starting point to reconceptualize teaching and learning. Teaching and learning are not two separate things. They constitute *joint-labour*, that is a self-fulfilling-form-of-life-with others (Radford, 2008; Roth and Radford, 2011). Within this context, the teaching and learning of mathematics moves from the social endeavour directed at the diffusion of knowledge that often defined it in the 1990s to a more complex endeavor inscribed in the politics and ethics of education. Teaching and learning is not about content only, but also about being and becoming; it is also about the processes of subjectification and agency that we promote and fail to promote in schools (Radford, 2008).

Drawing on Leont'ev's idea of activity as the foundational ontological category–an idea that, as we saw, Leont'ev borrows from Hegel and Marx–I stressed some aspects of knowledge and learning. Although the picture I offered is certainly very incomplete, it gives, I hope, a glimpse of what these concepts could look like within the dialectic materialist perspective.[1] Yet, the question can be asked: what then are mathematical objects within this account?

In a passage from an 1842 manuscript, Marx writes: "Philosophers do not grow on earth like champignons" (quoted in Henry, 1976, p. 416). Nor grow mathematicians and their ideas. Ideas –philosophical, mathematical, and others– come from people, as they labour together to satisfy their biological, practical, spiritual, and intellectual needs. Ideas are patterns of action that have been generalized, perfected, and encoded in culture and its various activities. Mathematical objects are *historically and culturally constituted ideas*. More precisely, mathematical objects are *crystalized labour* that new generations find and interpret in new ways and modify or expand as, in turn, they come to reflect and act in the always changing societies and cultures of their time. It is in this sense that mathematical objects, I suggested a few years ago, are culturally recognizable mov-

[1] There are, of course, within the field of Mathematics Education, other current approaches that rest on different conceptions of practice and mathematical objects. See, e.g., Sfard (2008) and Font, Godino and Gallardo (2013). While Sfard puts emphasis on discursive practices and considers mathematical objects as reification of individuals' discursive deeds, Font, Godino, and Gallardo convey a view of practice aligned with Wittgenstein's social nominalism that features the object-process duality. Although these approaches are undoubtedly interesting, the ideas presented here draw on a different philosophical tradition: the dialectical materialist view of knowledge as potentiality, as something fuzzy whose fuzziness makes it beyond representation: knowledge is rather something purely virtual that is put in *motion* and that acquires its *concrete determinations* through transformative historical-materialist dialectical praxis.

ing patterns of activity embedded in the always changing realm of reflective, semiotic- and artefact-mediated social practice (Radford, 2004).

ACKNOWLEDGMENTS

This article is a result of a research programs funded by the Social Sciences and Humanities Research Council of Canada (SSHRC/CRSH).

BIBLIOGRAPHIC REFERENCES

Buroker, J. (2006), *Kant's Critique of Pure Reason. An Introduction*, Cambridge, Cambridge University Press.

Cobb, P., E. Yackel and T. Wood (1992), "A constructivist alternative to the representational view in mathematics education", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 23, no. 1, pp. 2-33.

Feuerbach, L. (1843), *Principles of Philosophy of the Future* [www.marxists.org/reference/archive/feuerbach/works/future/index.htm, August 2011].

Fitche, J. (1994), *Introduction to the Wissenschaftslehre and other writings (1797-1800)*, Indianapolis and Cambridge, Hackett.

Giusti, E. (2000), *La naissance des objets mathématiques*, Paris, Ellipses.

Font, V., J. Godino and J. Gallardo (2013), "The emergence of mathematical objects from mathematical practices", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 82, no. 1, pp. 97-124.

Hegel, G. (1977), *Hegel's Phenomenology of Spirit*, trans. by A. V. Miller, Oxford and New York, Oxford University Press (1st edition, 1807).

——— (1978), *Hegel's Philosophy of Subjective Spirit. Vol. 3: Phenomenology and psychology,* ed. and trans. by M. J. Petry, Dordrecht, D. Reider.

——— (2009), *Hegel's Logic*, trans. by W. Wallace, Pacifica, MIA (1st edition, 1830).

Henry, M. (1976), *Marx*, Paris, Gallimard.

Husserl, E. (1900/2001), *The Shorter Logical Investigations*, London, Routledge.

——— (1931), *Ideas. General Introduction to Pure Phenomenology*, London, George Allen & Unwin Ltd. (2nd edition, 1958).

——— (1997), *Psychological and Transcendental Phenomenology and the Confrontation with Heidegger*, Dordrecht, Kluwer.

Hyppolite, J. (1961), *Logique et existence: Essai sur la logique de Hegel*, Paris, Presses Universitaires de France.

Kant, I. (1787/1929), *Critique of Pure Reason*, trans. by Norman Kemp Smith from 1781 and 1787, New York, St. Marin's Press (2nd print, 1965).

——— (1998), *Critique of Pure Reason*, trans. by P. Guyer and A. W. Wood, Cambridge and New York, Cambridge University Press.

Leont'ev, A. N. (1978), *Activity, Consciousness, and Personality*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall.
Marx, K. (1988), *Economic and Philosophic Manuscripts of 1844*, New York, Prometheus Books.
——— (1998), *The German Ideology, including Theses on Feuerbach and Introduction to the Critique of Political Economy*, New York, Prometheus Books.
Merleau-Ponty, M. (1945), *Phénoménologie de la perception* [Phenomenology of perception], Paris, Gallimard.
Piaget, J. (1970), *Genetic Epistemology*, New York, W. W. Norton.
Radford, L. (2004), "Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità" [Sensible things, essences, mathematical objects and other ambiguities (English version: http://Laurentian.Ca/educ/lradford/)], *La Matematica e la sua didattica*, no. 1, pp. 4-23.
——— (2008), "The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning", in L. Radford, G. Schubring and F. Seeger (eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture*, Rotterdam, Sense Publishers, pp. 215-234.
——— (2010), "The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities", *For the Learning of Mathematics*, vol. 30, no. 2, pp. 2-7.
——— (2011), "Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking", in J. Cai and E. Knuth (eds.), *Early Algebraization*, Berlin, Springer-Verlag, pp. 303-322.
——— (2012), "Education and the illusions of emancipation", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 80, no. 1, pp. 101-118.
——— (2013), "Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning", *Journal of Research in Mathematics Education*, vol. 2, no. 1, pp. 7-44.
Rockmore, T. (2011), *Kant and Phenomenology*, Chicago, The University of Chicago Press.
Roth, W. M. (2013), "To event: Toward a post-constructivist of theorizing and researching the living curriculum as event-in-the making", *Curriculum Inquiry*, vol. 43, no. 3, pp. 388-417.
Roth, W.-M. and L. Radford (2011), *A Cultural-Historical Perspective on Mathematics Teaching and Learning*, Rotterdam, Sense Publishers.
Sfard, A. (2008), *Thinking as Communicating*, Cambridge, Cambridge University Press.
Vygotsky, L. S. (1978), *Mind in Society*, Cambridge, Harvard University Press.
——— (1985), *Pensée et langage*, Paris, Éditions Sociales.
——— (1987), *Collected Works (vol. 1)*, R. W. Rieber and A. S. Carton (eds.), New York, Plenum.
Yackel, E. and P. Cobb (1996), "Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 27, no. 4, pp. 458-477.

ABOUT THE AUTHOR

Luis Radford
Université Laurentienne, Canadá
University of Manchester, UK
Lradford@nickel.laurentian.ca

Juegos de lenguaje matemáticos de distintas formas de vida: contribuciones de Wittgenstein y Foucault para pensar la educación matemática

Gelsa Knijnik

Resumen: Este artículo tiene como finalidad discutir aspectos relativos a la educación matemática, entendida como los procesos educativos que se realizan dentro o fuera del espacio escolar, en los cuales se involucran prácticas matemáticas. Específicamente, problematiza el no reconocimiento de la existencia de otros modos de matematizar, distintos de los usualmente enseñados en la escuela. Esa problematización tiene como base teórica lo que se denomina *perspectiva etnomatemática*, una caja de herramientas teóricas construida en la interlocución con ideas tardías de Wittgenstein y las teorizaciones de Michel Foucault. Desde el punto de vista empírico, se presentan ejemplos de juegos de lenguaje matemáticos de distintas formas de vida. El resultado de la discusión apunta a la productividad del uso de la *perspectiva etnomatemática* para ampliar las posibilidades de las matemáticas enseñadas en la escuela.

Palabras clave: perspectiva etnomatemática, Wittgenstein, Foucault, educación matemática.

Abstract: The paper aims at discussing aspects of mathematics education, which is understood as the educational processes that happen inside or outside the school space. Specifically it problematizes the no recognition of the existence of other ways to mathematize, different from those usually taught in school. This problematization has as theoretical bases what is called Ethnomatematics Perspective, a theoretical toolbox built with the interlocution of Wittgenstein's late ideas and the theorizations of Michel Foucault. From the empirical side, the paper presents examples of mathematical language games of different forms of life. The discussion done shows the productivity of such Ethnomathematics Perspective to increase the possibilities of school mathematics.

Keywords: ethnomatematics perspective, Wittgenstein, Foucault, mathematics education.

Fecha de recepción: 13 de septiembre de 2013; fecha de aceptación: 25 de diciembre de 2013.

INTRODUCCIÓN

Este artículo tiene como finalidad discutir aspectos relativos a la educación matemática, entendida como los procesos educativos que se realizan dentro o fuera del espacio escolar, en los cuales se involucran prácticas matemáticas. Este modo ampliado de significar la educación matemática tiene como supuesto que niños, jóvenes y adultos aprenden a "matematizar" no solamente en las instituciones oficialmente destinadas a la transmisión de los saberes y conocimientos matemáticos. Esta aseveración podría parecer obvia si fuese pensada, por ejemplo, en el contexto del aprendizaje de la lengua materna: ¿quién se atrevería a decir que el niño o adulto no escolarizado aprende a comunicarse en la lengua de "su gente" solamente al llegar a la escuela?

Sin embargo, al situarla en el campo de la educación matemática, la aseveración pierde, al menos en parte, su obviedad. Prueba de ello es cómo, en nuestras clases, hemos ignorado saberes matemáticos presentes en prácticas laborales y, de forma más amplia, en el cotidiano (no escolar) de las personas. Ese proceso de invisibilización puede comprenderse como el no reconocimiento de la existencia de otros modos de matematizar o como el desprecio a tales modos (no escolares), una vez que le cabría a la educación matemática circunscribirse al enseñar y al aprender lo que se ha denominado, en el Occidente, "matemática escolar". Aun así, sea válido el primero o el segundo de esos entendimientos, la matemática escolar usualmente está interesada en conservar lo que "ha sido producido por la humanidad" (con todos los problemas que esta expresión conlleva: ¿a qué "humanidad" nos estamos refiriendo?, ¿estarían incluidos en ella "los otros", los no-europeos?).

En este texto busco problematizar ese posicionamiento. Para ello, discuto en la primera sección una formulación teórica que he producido en años recientes, denominada *perspectiva etnomatemática* (Knijnik et ál., 2012). Se trata de una perspectiva construida en la interlocución con ideas tardías de Wittgenstein y las teorizaciones de Michel Foucault. Más adelante, en las otras dos secciones, me dedico a presentar ejemplos de esa perspectiva, con la intención de mostrar su productividad.

PERSPECTIVA ETNOMATEMÁTICA: CONFIGURACIONES TEÓRICAS

La referencia teórica de la discusión que busco emprender en este artículo consiste en lo que denomino *perspectiva etnomatemática*, concebida como una caja de herramientas teóricas que posibilita examinar los juegos de lenguaje matemáticos de la matemática académica y de la matemática escolar y sus efectos de verdad. En esa perspectiva hacen eco las voces de Ludwig Wittgenstein, correspondientes a lo que se conoce como su fase de madurez –cuya obra más referida es *Investigaciones filosóficas* (2004)–, y también las de Michel Foucault, principalmente sus formulaciones acerca de las nociones de discurso, "verdad" y poder.

Para explicar, aunque brevemente, el significado que atribuyo a la *perspectiva etno-*

matemática, es necesario aclarar primero el uso de la expresión "caja de herramientas teóricas". Con ella busco evidenciar que las nociones que utilizo de esos dos filósofos tienen el objetivo de "servir para pensar". Aquí tiene pertinencia lo que escribe Deleuze (1994, pp. 146-147), citando a Nietzsche: "que un pensador siempre tira una flecha, como en el vacío, y que otro pensador la recoge para enviarla en otra dirección". Aun sin ser una "pensadora", en el sentido asignado por el filósofo francés (que utiliza para referirse a Foucault), he elegido algunas nociones de Wittgenstein y de Foucault para, como lo expresa Deleuze, enviarlas en otra dirección, a saber, para transformarlas en herramientas teóricas que me posibiliten fundamentar aspectos de mi interés investigativo en el área de la educación matemática.

Una segunda aclaración se hace necesaria: ¿cómo justificar la pertinencia teórica de componer una caja de herramientas con nociones provenientes de dos tradiciones filosóficas tan diferentes? ¿Qué consonancias se pueden encontrar entre las ideas tardías de Wittgenstein y las formulaciones de Foucault? Escapa al ámbito de este artículo desarrollar en profundidad esa discusión que, sintéticamente, puede así explicarse: ambos filósofos asumen posiciones no esencialistas, y el significado que ambos atribuyen al lenguaje es convergente, así como la proximidad teórica de la noción wittgensteiniana de juegos de lenguaje y la noción foucaultiana de prácticas discursivas.[1]

Como ya se mencionó, las ideas de Wittgenstein, en el periodo que corresponde a su fase de madurez (también conocido como "el segundo Wittgenstein" o "el último Wittgenstein"), tienen como principal referencia el libro *Investigaciones filosóficas* (2004).[2] En esa obra, los argumentos del filósofo acerca de cómo funciona el lenguaje apuntan hacia una concepción opuesta a la de sus trabajos anteriores. Contraponiéndose a las posiciones presentadas en la obra *Tractatus logico-philosophicus*, Wittgenstein (1961) considera que no existe *el* lenguaje, sino lenguajes, en plural, identificándolos con una variedad de *usos*. Esos distintos usos, como destaca Hallett (en Condé, 1998, p. 42), se refieren a un contexto mucho más amplio que el contexto verbal. A diferencia de sus posiciones anteriores, Wittgenstein ve ahora el lenguaje "como una 'forma de vida' tejida en el todo de la textura de las relaciones sociales (I.F.23) y que pertenece a

---

[1] Una discusión profundizada sobre este punto se encuentra en Knijnik et ál., (2012).

[2] Aquí es importante mencionar lo que escribe Rivera (s/f, p. 1) sobre las distintas lecturas que se pueden hacer de la obra de un filósofo: "[...] la obra de cada filósofo, sin excepción, da lugar a más de un registro de lectura, alimentando de este modo la polémica de eruditos y exegetas. Pero en el caso de Ludwig Wittgenstein, y dado su particular estilo de escritura –al que se suma el carácter fragmentario o incompleto en que nos han llegado sus colecciones de reflexiones y notas–, esas lecturas se multiplican. Porque los espacios en blanco deben ser completados y los nexos entre sus aseveraciones establecidos por argumentaciones más o menos rigurosas. El resultado es la obra de un hombre estudiado en los límites de sus razones y sus deseos. Un hombre desarmado y reconstruido tantas veces, de acuerdo a pautas varias, diferentes, aún contradictorias, excluyentes". Como discutí en Knijnik (2011, 2013), la lectura de que me he servido para concebir la *perspectiva etnomatemática* es solamente una de las posibles lecturas de la obra de Wittgenstein, construida en convergencia con las desarrolladas por filósofos como Esther Díaz (2000), Mauro Condé (2004) y Silvia Rivera (2006).

la historia de nuestra naturaleza, tal como caminar, comer, beber, jugar (I.F.25)" (Hallet, en Condé, 1998, p. 90). De esa manera, los intérpretes de Wittgenstein atribuyen al *uso* una dimensión social, "una instancia a partir de la cual se crean significaciones [...] y se engendran los distintos juegos de lenguaje" (Condé, 2004, p. 48). Tales juegos, sin embargo, no pueden verse como completamente alejados unos de otros. Por el contrario, para Wittgenstein (2004), los diferentes juegos de lenguaje "se parecen", tienen una especie de parentesco que denomina *semejanzas de familia*.

Con el apoyo de las herramientas wittgensteinianas, brevemente presentadas con anterioridad, se puede considerar que la matemática escolar no reúne todos los juegos de lenguaje matemáticos, y que existen otros juegos asociados a otras formas de vida, que no coinciden con los juegos matemáticos escolares, sino que presentan *semejanzas de familia* con tales juegos. Precisamente por presentar esa semejanza de familia, podemos adjetivarlos como juegos de lenguaje matemáticos, ya que son similares a los que practicamos en la matemática escolar.

Las herramientas wittgensteinianas también nos posibilitan ampliar el sentido asignado a la expresión "educación matemática" —un punto relevante en el trabajo teórico que hemos desarrollado en los últimos años (Knijnik, 2012)—, debido a que las empleamos para indicar tanto las matemáticas que son enseñadas y aprendidas en la(s) forma(s) de vida escolar —que denominamos *educación matemática escolar*—, como las matemáticas que son enseñadas y aprendidas en las formas de vida no escolares —denominadas *educación matemática no escolar*—. Incluso siendo consciente de que un binarismo de ese tipo puede producir simplificaciones que terminarían por introducir nuevos problemas, he optado por conservarlo con el fin de subrayar que a la *perspectiva etnomatemática* le interesa examinar prácticas matemáticas que ocurren en la escuela y en otros espacios de la vida social, así como los procesos de enseñar y aprender vinculados a ellas.

Debido al interés de poner en discusión el eurocentrismo de la matemática escolar de Occidente, la *perspectiva etnomatemática* hace uso de las formulaciones de Michel Foucault. El carácter eurocéntrico de lo que se enseña y aprende en la escuela, en el ámbito de las matemáticas, ya ha sido exhaustivamente discutido (Joseph, 1992; D'Ambrosio, 2006; Gerdes, 1991). Por lo tanto, lo asumo como una "verdad" que no necesita, por ahora, ser "demostrada" (como todas las verdades). Lo que considero que aún necesitamos entender mejor es cómo opera ese discurso eurocéntrico en nuestro cotidiano escolar. La *perspectiva etnomatemática* que sirve de base a este texto quiere contribuir en esa dirección.

Como se ha indicado, están también en el centro de esa perspectiva nociones foucaultianas como discurso, "verdad" y poder. El entendimiento de discurso propuesto por el filósofo se expresa de forma efectiva en su obra *Arqueología del saber*. El filósofo considera el discurso "como prácticas que forman sistemáticamente los objetos de que hablan" (Foucault, 2002, p. 55), y no como "una estrecha superficie de contacto, entre una realidad y una lengua, el intrincamiento entre un léxico y una experiencia" (Ibíd., pp. 54-55).

En *El orden del discurso* (1992), Foucault enfatiza el entrelazamiento del discurso con el poder:

> [...] no tiene nada de extraño: ya que el discurso –el psicoanálisis nos lo ha mostrado– no es simplemente lo que manifiesta (o encubre) el deseo; es también lo que es el objeto del deseo; y ya que –esto la historia no cesa de enseñárnoslo– el discurso no es simplemente aquello que traduce las luchas o los sistemas de dominación, sino aquello por lo que, y por medio de lo cual se lucha, aquel poder del que quiere uno adueñarse. (Foucault, 1992, p. 10)

El discurso, así entendido, es el que da movimiento al poder, o sea, es a través de los discursos que se ejerce el poder. Asimismo, la producción de la "verdad" no estaría desvinculada de las relaciones de poder, que la incitan y apoyan, estando también atada a la positividad del discurso. El filósofo afirma que la "verdad" es "el conjunto de las reglas según las cuales se distingue lo verdadero de lo falso y se atribuye a lo verdadero efectos específicos de poder" (Foucault, 2003b, p. 13), "un conjunto de procedimientos regulados para la producción, la ley, la distribución, la circulación y el funcionamiento de los enunciados" (Ibíd., p. 14).

Esas formulaciones dan sentido a lo que Foucault denomina *política general de la verdad*. En sus palabras:

> Cada sociedad tiene su régimen de verdad, su "política general" de verdad: o sea, los tipos de discursos que acoge y hace funcionar como verdaderos; los mecanismos y las instancias que permiten distinguir los enunciados verdaderos de los falsos, la manera como se sancionan unos y otros; las técnicas y los procedimientos que se valoran para la obtención de la verdad; el estatuto de aquellos que tienen el rol de decir lo que funciona como verdadero. (Ibíd., p. 12)

Apoyándonos, por lo tanto, en Foucault, somos llevados a pensar en los discursos de la educación matemática como constituidos por y constituyentes de una *política general de la verdad*. En efecto, algunas técnicas y procedimientos –producidos en la academia– se consideran como los mecanismos (únicos y posibles) capaces de generar el conocimiento matemático, en un proceso de exclusión de otros saberes que, por no utilizar tal gramática, se sancionan y clasifican como "no-matemáticos". Tal operación se lleva a efecto con la ratificación de los *experts*, cuyas carreras están vinculadas a la academia, que tienen el estatuto para "decir qué funciona como verdadero" en el campo de la educación matemática.

Además, las "verdades" producidas por los (y productoras de los) discursos de las matemáticas académicas y de las matemáticas escolares también actúan en la fabricación y concepciones sobre cómo deben ser una clase de matemática y una buena profesora, quiénes son los "buenos y los malos" estudiantes, cuál es el lugar destinado, en la sociedad, a esa área del conocimiento.

Con ese entendimiento, utilizo nociones de Foucault para, como anteriormente mencioné, conformar la *perspectiva etnomatemática* como una caja de herramientas que posibilita analizar los discursos de la matemática académica y de la matemática escolar, buscando examinar "cómo se producen efectos de verdad en el interior de discursos que no son en sí ni verdaderos ni falsos" (Foucault, 2003b, p. 7).

Uno de los efectos de verdad producido por los discursos de la matemática académica y de la matemática escolar consiste en asumir que existe una y solamente una matemática, de carácter universal, que tendría la potencialidad de ser aplicada en diferentes contextos, en diferentes prácticas sociales, como por ejemplo las laborales. Como he tratado de mostrar en esta sección, las posiciones wittgensteinianas apuntan hacia otra dirección. No solamente se cuestiona la universalidad de las matemáticas académicas (lo que D'Ambrosio, desde la instauración de su Programa Etnomatemático (2001), ya indicaba), sino también se tienen elementos que justifican la existencia de juegos de lenguaje matemáticos que tendrían especificidades (vinculadas a las formas de vida en las cuales adquieren existencia) y presentarían *semejanzas de familia* con los juegos de lenguaje de la matemática académica. Así, al intentar resolver situaciones-problema del mundo no escolar, no nos serviríamos de las "aplicaciones" de esa matemática supuestamente única e universal. Más bien estaríamos ante la necesidad de practicar otros juegos de lenguaje que, por su inmanencia, ofrecerían, de modo más apropiado y satisfactorio, la solución que buscamos encontrar. En las próximas dos secciones presento ejemplos que elucidan las afirmaciones anteriores. La opción de presentarlos está en consonancia con las enseñanzas de Wittgenstein quien, en su obra tardía, escribe "la ejemplificación no es [...] un medio indirecto de elucidación – a falta de uno mejor" (IF§*71)*.

EL EJEMPLO DE LOS JUEGOS DE LENGUAJE DE "REDONDEAR"

Los estudios que realizo hace más de dos décadas con la forma de vida campesina del Movimiento Sin Tierra[3] (en adelante, MST) han posibilitado reunir ejemplos sobre juegos de lenguaje matemáticos allí practicados que, al compararlos con aquellos que se enseñan en la escuela, presentan peculiaridades, manteniendo, no obstante, semejanzas de familia. El ejemplo que se discute a continuación se inserta en esa trayectoria investigativa.

Consideremos el juego de lenguaje "redondear números", practicado en la escuela. Como lo he discutido anteriormente (Knijnik et ál., 2012), los materiales didácticos que

[3] Para ser más precisa, sería necesario usar la expresión "formas de vida", en plural, dado que este movimiento social –presente en 23 de los 27 estados brasileños, y que involucra a aproximadamente un millón de campesinos– no presenta homogeneidad cultural, social, económica y ni siquiera política. Eso significa que en los diferentes asentamientos y campamentos Sin Tierra coexisten distintas formas de vida.

circulan en el currículum escolar enseñan que para redondear un número de dos dígitos, si la unidad tiene un valor superior a 5, se redondea hacia la decena inmediatamente superior; sin embargo, si el valor de la unidad es inferior a 5, se indica que se redondee hacia la decena inmediatamente inferior. Ese juego forma parte de la racionalidad instituidora de las formas de vida escolares, con sus marcas de abstracción y búsqueda de generalización. En la forma de vida campesina Sin Tierra, como lo he aprendido con los integrantes de ese movimiento social, la práctica de redondear se realiza por medio de otra regla que, aunque tiene semejanzas con la escolar, presenta especificidades.

Un campesino del MST lo explicó de la siguiente manera: al estimar el valor total de lo que él gastaría con la compra de insumos para la producción, redondeaba "hacia arriba" los valores enteros, ignorando los centavos, puesto que no deseaba "pasar vergüenza y que le faltara dinero al momento de pagar". Sin embargo, si la situación involucraba la venta de algún producto, la estrategia utilizada era precisamente la opuesta. En este caso, redondeaba hacia "abajo", pues "no quería ilusionarme y pensar que iba a tener más que lo que tenía [de dinero]" (Knijnik y Wanderer, 2010).

De inmediato vemos la semejanza existente entre las dos reglas mencionadas anteriormente. Pero hay una peculiaridad que las distingue: en el juego producido por la forma de vida campesina, a diferencia del practicado en la escuela, hay una estrecha vinculación de la estrategia de redondear con las contingencias de la situación. Es la inmanencia de la racionalidad campesina Sin Tierra versus la trascendencia de la racionalidad de las matemáticas escolares eurocéntricas.

Más que mostrar, con este ejemplo, la superioridad de juegos de lenguaje "que sirven para usar en cualquier situación", comparados con aquellos cuyo uso es "localizado", o sea, que son dependientes de la situación en la que se practican, lo que me interesa subrayar aquí es el efecto de verdad del discurso de las matemáticas escolares en lo que atañe a la práctica de redondear números. Ese efecto nos llevaría a pensar que el juego transmitido en la escuela es el que presentaría —desde el punto de vista epistemológico— mayor valor, pues sería el que podría aplicarse a "cualquier situación". Sin embargo, como evidencia este ejemplo, en nuestras vidas nos enfrentamos a la necesidad de resolver situaciones específicas y no "cualquier situación"... Eso sí, esa situación cualquiera adquiere importancia cuando practicamos juegos de lenguaje matemáticos en el ámbito de la abstracción y del formalismo, propios de la forma de vida escolar. Esos juegos pertenecen a esa forma de vida y, como nos enseñó Wittgenstein, la operación de transportarlos de una forma de vida a otra (en este caso, la forma de vida "cotidiana") es inexequible.

En síntesis, no se trata de enseñar lo que usualmente enseñamos en la escuela con el argumento de que esas enseñanzas se transformarán en herramientas matemáticas para que podamos dar mejores soluciones a situaciones que ocurren en formas de vida no escolares. Desde mi punto de vista, la justificación para su enseñanza es otra: se trata de dar acceso a los juegos de una forma particular de vida (la escolar), puesto que son esos juegos los que funcionan socialmente como filtro social, definiendo, por ejemplo, quién tendrá "éxito" en los exámenes escolares, quién tendrá acceso a los mejores puestos de trabajo. Se podría decir, entonces, que los juegos de lenguaje matemáticos escolares y los no escolares se pueden pensar como epistemológicamente equivalentes, aunque, al ser examinados socialmente, sean desigualmente diferentes.[4]

WILL ADAMS Y EL TAICÚN: JUEGOS DE LENGUAJE[5]

El segundo ejemplo que presento se vincula a la anécdota relatada en la obra *El orden del discurso* (Foucault, 1992), publicación que corresponde a la clase inaugural ministrada por Michel Foucault en el Collège de France, en 1970. A continuación, la narración realizada por el filósofo:

> Me gustaría recordar una anécdota sobre este tema que es tan bella que uno se estremece de que sea verdadera. Concentra en una sola figura todas las coacciones del discurso: las que limitan los poderes, las que dominan las apariciones aleatorias, las que seleccionan a los sujetos que pueden hablar. A comienzos del siglo XVII, el taicún había oído hablar de que la superioridad de los europeos –en cuanto a la navegación, el comercio, la política, el arte militar– se debía a su conocimiento de las matemáticas. Deseó ampararse de un tan preciado saber. Como le habían hablado de un marino inglés que poseía el secreto de esos discursos maravillosos, le hizo llevar a su palacio y allí lo retuvo. A solas con él tomó lecciones. Aprendió las matemáticas. Mantuvo, en efecto, el poder y vivió largo tiempo. Y hasta el siglo XIX no existieron matemáticos japoneses. Pero la anécdota no finaliza allí: tiene su vertiente europea. La historia quiere que ese marino inglés, Will Adams, fuese un autodidacta: un carpintero que, por haber trabajado en un astillero naval, había aprendido la geometría. (Foucault, 1992, pp. 37-38)

La anécdota habla del enseñar de un carpintero, que poseía "el secreto de [los] discursos maravillosos" de la geometría, un secreto que legitimaba en un nivel de superioridad a los europeos; habla de un autodidacta que, retenido en el palacio por su aprendiz, fuera instado a allí permanecer para que el taicún pudiese apoderarse de "tan preciado saber" y pudiese aprender matemáticas con él. La anécdota también habla del vínculo inaugural entre dos culturas de lugares muy distantes y, hasta ese entonces –según cuenta la historia–, incomunicables, y remite a Will Adams, considerado el primer inglés que vivió en Japón. En su juventud, había sido aprendiz de un renombrado armador, con quien había aprendido el arte de la construcción de buques, así como de astrono-

[4] En Knijnik (2006), por otras vías teóricas, enfoqué ese argumento, aquí presentado de modo más contundente.

[5] Esta sección es una versión resumida de la discusión hecha en G. Knijnik (2012), "Differentially positioned language games: an ethnomathematical perspective", *Educational Studies in Mathematics*.

mía y navegación. En una de las cuatro cartas de Will Adams que fueron preservadas, fechada en 1611, escribió:

> A lo largo de cuatro o cinco años, el emperador me llamó varias veces, como lo había hecho anteriormente. Entonces, una vez, me dijo que le gustaría que le hiciese un pequeño buque. Le dije que era simplemente un carpintero, que no tenía grandes conocimientos acerca de eso. "Bien, esfuércese", me dijo, "si no sale bien, no importa". Entonces, bajo sus órdenes, construí un buque para cerca de 80 toneladas de carga; el buque, hecho a nuestra manera, le gustó mucho y esto hizo con que yo cayera en sus gracias, por lo que pasé a ser llamado a menudo a su presencia, él ofreciéndome regalos de tiempos en tiempos, y después un valor en dinero alrededor de setenta ducados al año, sumados a dos libras de arroz al día. Y estando de tal modo agraciado por él, le enseñé algunos puntos de geometría y la comprensión del arte de las matemáticas, entre otras cosas. (ápud Tappan, 1914, p. 328)

Transmitir el secreto de "algunos puntos de geometría y la comprensión del arte de las matemáticas" hizo que el carpintero se volviese rehén del emperador... Pero también el emperador se volvió cautivo del carpintero, de modo que, al enseñarle matemáticas, le posibilitara mantenerse en el poder, disfrutando de "una larga vejez".

A esas matemáticas de un carpintero –unas matemáticas de "astillero naval" (¡nada más terreno que eso!)– se les ha atribuido un lugar muy particular: conocimiento divino –"un pequeño conocimiento que me ha dado Dios", en las palabras de Will Adams–, conocimiento sacralizado, implicado en la perpetuación del poder... Desde las ranuras de un piso áspero hasta las alturas de un saber abstracto... un camino ascendente... que conduciría a los cielos todo lo que de allí proviniera... una matemática que emergió de la suciedad de las prácticas sociales del mundo del trabajo... que allí estaba de modo promiscuo, "fuera de lugar"... pero que a su lugar "justo" y "conveniente" regresó, guiada por el "sueño de la pureza" (Bauman, 1998, p. 13). Pureza y su duplo, el orden, como bien enseña Bauman:

> La pureza [...] es una visión del orden – o sea, de una situación en que cada cosa se encuentra en su justo lugar y en ningún otro. No hay ningún medio de pensar sobre la pureza sin tener una imagen del "orden", sin atribuir a las cosas sus lugares "justos" y "convenientes" [...] (Ibíd., p. 14).

¿Y si nos pusiésemos a pensar de otro modo sobre ese proceso ascendente de purificación? ¿Si pensáramos, inspirados en las enseñanzas de Wittgenstein (brevemente presentadas en la primera sección de este artículo), no en la existencia de *una única* matemática, ésa que Lizcano (2006) identifica como la forma de vida de la "tribu europea" (y que, en palabras de Foucault, le dio "la superioridad [a] los europeos en cuanto a la navegación, el comercio, la política, el arte militar"), sino en *diferentes* matemáticas que (como escribí en la sección anterior) no guardasen ningún tipo de subordinación epistemológica (ya que desde el punto de vista sociológico ¡sería ingenuo no considerar tales subordinaciones!) en relación a aquella matemática eurocéntrica en la cual hemos sido escolarizados?

Sirvámonos de las ideas wittgensteininas discutidas en la primera sección de este artículo para atribuir nuevos sentidos a las matemáticas del marinero inglés Will Adams. Habiendo sido él un aprendiz en un astillero naval, un autodidacta en la versión europea, nos inclinamos a pensar –siguiendo las enseñanzas de Wittgenstein– que había aprendido una matemática constituida por juegos de lenguaje cuyas reglas estarían fuertemente integradas a la(s) cultura(s) de los carpinteros de los astilleros navales de aquella época, juegos de lenguaje que estarían marcados por la(s) racionalidad(es) de aquella(s) forma(s) de vida, expresándose por medio de una gramática propia. Sin embargo, la anécdota no hace referencia a alguna especificidad que pudiese corresponder a esa matemática cuyo uso posibilitó al taicún satisfacer su deseo de ver construido un buque "hecho a nuestra manera", como se lee en el fragmento de la carta de Will Adams. Ese silencio puede ser pensado como indicativo de que el saber "tan preciado" del cual el taicún quería apoderarse era la matemática de la tribu europea. ¿No sería precisamente ella –cuyos juegos de lenguaje funcionan con reglas marcadas por el rigor, formalismo y abstracción– la que otorgaba superioridad a sus "indígenas"? Una matemática marcada por usos muy distintos de aquellos vinculados a la(s) forma(s) de vida de carpinteros de astilleros navales ingleses...

Pero podemos atribuir aun más sentidos al encuentro de Will Adams y el taicún, narrado por Foucault... Leamos de nuevo las palabras con las que el filósofo introduce esta anécdota "tan bella que uno se estremece de que sea verdadera": "Concentra en una sola figura todas las coacciones del discurso: las que limitan los poderes, las que dominan las apariciones aleatorias, las que seleccionan a los sujetos que pueden hablar". ¿Qué sugieren esas palabras? ¿Qué ideas movilizan?

Para responder a esos interrogantes se impone volver nuestra mirada con más detalle a *El orden del discurso*. En ese texto, Foucault, al preguntarse sobre "las condiciones de posibilidad del discurso en su materialidad de acontecimiento enunciativo" (Díaz, 2005, p. 77) e introducir la problemática del poder, realiza un emprendimiento analítico que considera la hipótesis de que "en toda sociedad, la producción del discurso es, al mismo tiempo, controlada, seleccionada, organizada y distribuida por determinado número de procedimientos que tienen por función conjurar sus poderes y peligros, dominar el acontecimiento aleatorio y esquivar su pesada y temible materialidad" (Foucault, 1992, p. 5). Asimismo, el filósofo expone que tales procedimientos pueden ser caracterizados como externos –que "se ejercen en cierta manera desde el exterior; funcionan como sistemas de exclusión; conciernen sin duda a la parte del discurso que pone en juego el poder y el deseo" (Ibíd., p. 13)– e internos, "puesto que son los discursos mismos los que ejercen su propio control; procedimientos que juegan un tanto a título de principios de clasificación, de ordenación, de distribución, como si se tratase en este caso de dominar otra dimensión del discurso: aquélla de lo que acontece y del azar" (Ibíd., p. 13). Y también están aquellos procedimientos que "limitan el intercambio y la comunicación de los discursos y que determinan la apropiación social del discurso" (Castro, 1995, p. 231).

Los procedimientos externos se refieren a la *exclusión* –"no se tiene derecho a decirlo todo, que no se puede hablar de todo en cualquier circunstancia, que cualquiera, en fin, no puede hablar de cualquier cosa" (Foucault, 1992, p. 9)–, a la *separación y el rechazo* –"la oposición razón y locura" (Ibíd., p. 11)– y al *deseo de verdad*, que "no debe ser entendido en el sentido clásico de 'amor a la verdad', sino en el sentido de búsqueda de dominación que cada uno emprende, marcando y señalando los discursos por sistemas de exclusión" (Veiga-Neto, 2003, p. 124).

En el grupo de los procedimientos internos de control del discurso, Foucault incluirá el comentario, el autor y las disciplinas. Sobre la noción de comentario, el filósofo apunta hacia la existencia, en toda sociedad, del desfase entre textos primarios y secundarios, "entre textos que se pueden decir y textos que dicen lo que ya se ha dicho, [lo que] limita las posibilidades discursivas, imponiendo como límite los textos primarios" (Castro, 1995, p. 231); "el comentario conjura el azar del discurso al tenerlo en cuenta: permite decir otra cosa aparte del texto mismo, pero con la condición de que sea ese mismo texto el que se diga, y en cierta forma, el que se realice (Ibíd., p. 16). El autor es quien da al inquietante lenguaje de la ficción sus unidades, sus nudos de coherencia, su inserción en lo real (Ibíd., p. 17); un procedimiento que a lo largo de la historia y en contextos variados ha asumido distintas funciones. Y por último están las disciplinas, cuya organización "se opone tanto al principio del comentario como al del autor" (Ibíd., p. 18).

Examinemos más de cerca ese último procedimiento interno de control del discurso, dado que este texto remite a la disciplina "matemáticas". ¿Qué dice Foucault sobre las disciplinas, que pueda ser útil para que pensemos, de forma renovada, la disciplina con la que trabajamos? Para el filósofo, la disciplina "constituye una especie de sistema anónimo a disposición de quien quiera o de quien pueda servirse de él, sin que su sentido o su validez estén ligados a aquel que se ha concentrado en ser el inventor" (Foucault, 1992, p. 18); por eso, se opone al principio del autor. Se opone, también, al principio del comentario, ya que...

> ...no persigue la repetición; más bien exige la novedad, la generación de proposiciones todavía no formuladas. La disciplina determina las condiciones que debe cumplir una proposición determinada para entrar en el campo de lo verdadero: establece de qué objetos se debe hablar, qué instrumentos conceptuales o técnicas hay que utilizar, en qué horizonte teórico se debe inscribir (Castro, 2004, p. 86).

Pero las proposiciones aún no formuladas que serán generadas no podrán ser cualesquiera. "En toda disciplina hay objetos, métodos, proposiciones verdaderas, reglas, definiciones, técnicas e instrumentos a disposición de sus posibles participantes" (Díaz, 2005, p. 80), y las proposiciones que no estén alineadas a eso se consideran espurias y, por lo tanto, deben excluirse de la disciplina. Si, para Foucault, "la medicina no está constituida por el total de cuanto puede decirse de cierto sobre la enfermedad" (Foucault, 1992, p. 19), lo mismo vale para la botánica, ya que ésta no es el conjunto de verdades que pueden decirse sobre las plantas. También podríamos pensar en extender esa posición a las matemáticas y, parafraseando al filósofo, considerar que "[las matemáticas] no pueden ser definidas por la suma de todas las verdades que conciernen [a los juegos de lenguaje involucrando cuantificaciones (como, por ejemplo, calcular áreas de superficies)]".

De esa manera, diríamos que las matemáticas (académica y escolar) no reúnen todos los juegos de lenguaje que tratan de calcular áreas, "rechazando hacia afuera de sus márgenes" juegos como los de cubar (medir) la tierra de las matemáticas campesinas (Knijnik, 2006), con sus reglas específicas, diferentes de las reglas del formalismo y la abstracción que dan forma a la gramática de las matemáticas (académica y escolar). Las "verdades" de las prácticas de *cubación de la tierra*, que producen resultados "aproximados" (en mayor o menor grado) al resultado preciso de las matemáticas escolares, muchas veces son consideradas por los científicos como "errores". Pero, como escribe Foucault, "no hay quizás errores en el sentido estricto, pues el error no puede surgir y ser decidido más que en el interior de una práctica definida" (Foucault, 1992, pp. 20-21). Los juegos de lenguaje de cubar la tierra, cuando son examinados en el interior de esas prácticas, en la contingencia de la forma de vida campesina Sin Tierra a la cual están asociados, no presentan ningún error "en el sentido estricto", ya que, como lo discutí en otro texto (Knijnik, 2007), el resultado "inexacto" no hace que los campesinos del sur del país, integrantes del Movimiento Sin Tierra, los descalifiquen, los consideren como no verdaderos.

En *El orden del discurso*, Foucault examinará además otro conjunto de procedimientos "que limitan el intercambio y la comunicación de los discursos y que determinan su apropiación social" (Castro, 2004, p. 94). Ahí están incluidas, por ejemplo, las instancias rituales y también el sistema educativo. "El ritual define la cualificación que deben poseer los individuos que hablan [...]; define los gestos, los comportamientos, las circunstancias y todo el conjunto de signos que deben acompañar el discurso" (Foucault, 1992, p. 24). Y por su parte, el sistema de educación es "una forma política de mantener o de modificar la adecuación de los discursos, con los saberes y los poderes que implican" (Ibíd., p. 27).

Es precisamente al discutir ese tercer grupo de procedimientos de control del discurso cuando el filósofo narra la anécdota de Will Adams y el taicún. Ahora entendemos mejor el efecto de *raréfaction* formulado por Foucault: "enrarecimiento, esta vez, de los sujetos que hablan; nadie entrará en el orden del discurso si no satisface ciertas exigencias o si no está, de entrada, calificado para hacerlo" (Ibíd., p.23). Entendemos mejor las razones que llevaron al filósofo a decir que todas las coerciones del discurso se expresan "en una sola figura", que me parece posible identificar con la del taicún: sus poderes estarían limitados por desconocer las matemáticas –el "preciado saber" de la tribu europea que la hacía superior a las demás–; por lo tanto, la perpetuación de su posición como emperador implicaba retener al europeo Will Adams, que poseía ese "preciado saber", para que él, y solamente él, tuviese acceso al "secreto de esos discursos maravillosos" de las matemáticas. Foucault, de modo irónico, cuestiona la idea de que esta narrativa pudiese ser interpretada de la siguiente manera: "al saber monopolizado y secreto de la tiranía oriental, Europa opondría la comunicación universal del conocimiento, el intercambio indefinido y libre de los discursos" (Ibíd., pp. 23-24).

En realidad, como la historia de la ciencia occidental y, en particular, la historia de las matemáticas occidentales muestran, la comunicación e intercambio de conocimientos, a lo largo de los tiempos, ha funcionado como medio de procedimientos de sujeción como los listados por el filósofo. Un ejemplo de los más exhaustivamente mencionados en la literatura es el de la escuela pitagórica (Chassot, 2007, p. 140), cuyo modo de funcionar puede ser comparado a una *sociedad del discurso*, en el sentido atribuido por Foucault a la expresión: allí se producían y conservaban los discursos, "pero para hacerlos circular en un espacio cerrado, distribuyéndolos nada más que según reglas estrictas y sin que los detentadores sean desposeídos de la función de distribución" (Foucault, 1992, p. 24). Como bien resalta el filósofo, sociedades de discurso como las existentes en el pasado, hoy no se pueden encontrar, pero aun así es necesario reconocer que en el mundo académico de la actualidad, en el cual el uso de nuevas tecnologías ha facilitado la circulación de lo que se produce, "todavía se ejercen formas de apropiación del secreto y de la no intercambiabilidad. (Ibíd., p. 25). Bourdieu (2003), en un registro teórico distinto al de Foucault, también argumenta que las luchas por el capital simbólico que caracterizan al campo científico, –válido también, obviamente, para el campo de la matemática–, así como los intereses que están en juego en la producción de la ciencia, con sus imposiciones, solicitudes, implicaciones económicas, políticas, etc., muestran la "no pureza" del campo científico y los juegos de poder de todo orden que terminan por instituir "secretos", que funcionan coercitivamente en la circulación y divulgación de la ciencia.

¿Y qué decir del campo de la *educación matemática*, al cual pertenecemos? Es necesario que nuestra experiencia de profesoras y profesores involucrados con los procesos de enseñar y aprender matemáticas nos muestre cómo opera, en "el aula" "suelo árido de la escuela" (para recordar a Wittgenstein), y la "comunicación del conocimiento matemático": bien identificamos los procedimientos coercitivos que constriñen la circulación de los discursos... Tal vez pudiésemos pensar que, en el límite, nuestra área de docencia e investigación tiene un poco de "grupo doctrinario", como concebido por Foucault. Ahora el movimiento sería inverso al de la sociedad de discurso, pues lo que nos movería sería la inclusión, lo más amplia posible, de todos "nuestros secretos", que, justamente por eso, dejarían de ser considerados como tal. Queremos, sobre todo, difundir nuestros discursos, imponer "nuestras" verdades al mayor número posible de "fieles". Pero "la doctrina vincula los individuos a ciertos tipos de enunciación y como consecuencia les prohíbe cualquier otro" (Foucault, 1992, p. 27). ¿Qué serían, si no eso, las categorías (tan utilizadas en tiempos pasados) de "profesores constructivistas" y "profesores tradicionales"; y, todavía hoy, las categorías de "profesores que se dicen 'de la enseñanza de las matemáticas' y nosotros, que nos decimos educadores matemáticos"?

Esas ideas nos llevan a entender con más profundidad el interrogante del filósofo:

> ¿Qué es, después de todo, un sistema de enseñanza, sino una ritualización del habla; sino una cualificación y una fijación de las funciones para los sujetos que hablan; sino la constitución de un grupo doctrinal cuando menos difuso; sino una distribución y una adecuación del discurso con sus poderes y saberes? (Ibíd., p. 28)

¿No serían esos poderes y saberes los que terminarían por lograr que "otras" diferentes matemáticas –no aquella que conocemos como "la" matemática– fuesen posicionadas en "el espacio de una exterioridad salvaje" (Ibíd., p. 22)? ¿No fueron esos poderes y saberes los que acabaron por reunir al marinero inglés autodidacta Will Adams –"que poseía el secreto de esos discursos maravillosos"– y al taicún, para que "a solas con él tom[ase] lecciones" de matemática y se mantuviese en el poder? ¿No han sido ellos los que ponen en movimiento el enseñar y el aprender involucrados en los procesos de educar matemáticamente a las nuevas generaciones y a los adultos que, solamente ahora, llegan a las escuelas?

Ésos son los interrogantes con los cuales me enfrento en la actualidad. La escritura de este artículo y la formulación de esas inquietudes constituyen balizas para alimentar mi pensamiento y mi acción como educadora matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bauman, Z. (1998), *O mal-estar da pós-modernidade*, Río de Janeiro, Jorge Zahar Editor.

Bernstein, B. (1996), *A estruturação do discurso pedagógico: classe, códigos e controle*, Petrópolis, Vozes.

Bourdieu, P. (2003), *Os usos sociais da ciência. Por uma sociologia clínica do campo científico*, São Paulo, Editora UNESP.

Castro, E. (1995), *Pensar a Foucault. Interrogantes filosóficos de* La arqueología del saber, Buenos Aires, Biblos.

——— (2004), *El vocabulario de Michel Foucault. Un recorrido alfabético por sus temas, conceptos y autores*, Buenos Aires, Universidad Nacional de Quilmes.

Chassot, A. (2007), *A ciência através dos tempos*, São Paulo, Moderna.

Conde, M. L. L. (1998), *Wittgenstein, Linguagem e Mundo,* São Paulo, Annablume.

——— (2004), *As Teias da Razão: Wittgenstein e a crise da racionalidade moderna,* Belo Horizonte, Argvmentvm Editora.

D'Ambrosio, U. (2006), *Ethnomathematics – Link between traditions and modernity.* Rotterdam, Sense Publishers.

D'Ambrosio, U. (2001), *Etnomatemática: elo entre a tradição e a modernidade*, Belo Horizonte, Autêntica.

Deleuze, G. (1994), *Conversações*, Rio de Janeiro, Ed. 34.

Díaz, E. (ed.) (2000), *La Posciencia,* Buenos Aires, Biblos.

——— (2005), *La filosofía de Michel Foucault*, Buenos Aires, Biblos.

Foucault, M. (1992), *El orden del discurso*, trad. de Alberto González Troyano, Buenos Aires, Tusquets Editores (título original: *L'ordre du discours*, 1970).

——— (2002a), *Arqueologia do saber,* 6a. ed., Rio de Janeiro, Forense Universitária.

——— (2002b), *Vigiar e punir: nascimento da prisão*, 26a. ed., Petrópolis, Vozes.

——— (2003a), *História da Sexualidade – a vontade de saber*, 15a. ed., Rio de Janeiro, Graal.

——— (2003b), *Microfísica do poder,* 18a. ed., Rio de Janeiro, Graal.

Gerdes, P. (1991), *Etnomatemática: cultura, matemática, educação,* Maputo, Instituto Superior Pedagógico.

Joseph, G. (1992), *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*, Londres, Penguim.

Knijnik, G. & Wanderer, F. (2010), "Mathematics Education and Differential Inclusion: A Study about Two Brazilian Time-Space Forms of Life", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, vol. 42, núm. 4.

Knijnik, G., F. Wanderer, I. Giongo, y C. Duarte (2012), *Etnomatemática em Movimento*. Belo Horizonte, Autêntica.

Knijnik, G., (2006), *Educação Matemática, culturas e conhecimento na luta pela terra,* Santa Cruz do Sul, EDUNISC.

——— (2007), "Mathematics education and the Brazilian Landless Movement: Three different mathematics in the context of the struggle for social justice", *Philosophy of Mathematics Education Journal*, vol. 21, pp. 1-18.

——— (2008), "Will Adams e xogum: do ensinar e do aprender em lugares e culturas no campo da matemática", en C. Traversini, E. Eggert, y E. Peres (org.), *Trajetórias e processos de ensinar e aprender: práticas e didáticas*, Porto Alegre, ediPUCRS, pp. 265-280.

——— (2011), "Wittgenstein y las matemáticas en la forma de vida de los campesinos Sin Tierra de Brasil", *Perspectivas metodológicas*, Buenos Aires, vol. 11, pp. 36-48.

——— (2013), "Juegos de lenguaje matemáticos en formas de vida campesinas del Movimiento Sin Tierra de Brasil", en Silvia Rivera (ed.), *Alternativas epistemológicas Axiología, lenguaje y política,* Buenos Aires, Prometeo Libros, vol. 1, pp. 175-194.

Lizcano, E. (2006), "As matemáticas da tribo européia: um estudo de caso", en Gelsa Knijnik et ál., *Etnomatemática, currículo e formação de professores*, Santa Cruz do Sul, EDUNISC.

Machado, R. (2003), "Por uma genealogia do poder", en M. Foucault, *Microfísica do poder,* 18a. ed., Rio de Janeiro, Edições Graal.

Rivera, S. (s/f), *Wittgenstein y la expansión de lo político*, texto digitado.

Rivera, S. (2006), *Ludwig Wittgenstein: entre paradojas y aporías*, Buenos Aires, Prometeo Libros.
Tappan, E. M. (org.) (1914), *The World's Story: A History of the World in Story, Song, and Art. Volume I: China, Japan, and the Islands of the Pacific*, Boston, Houghton Mifflin, pp. 325-331 (escaneado por Jerome S. Arkenberg, Cal. State Fullerton).
Veiga-Neto, A. (2003), *Foucault & a Educação*, Belo Horizonte, Autêntica.
Wittgenstein, L. (1961), *Tractatus Logico-Philosophicus*, São Paulo, Companhia Editora Nacional.
——— (2004), *Investigações filosóficas*, Petrópolis, Vozes.

DATOS DE LA AUTORA

Gelsa Knijnik
Universidade do Vale do Rio dos Sinos, Brasil
gelsa.knijnik@gmail.com

La perspectiva enactivista en educación matemática: todo hacer *es* conocer

María Dolores Lozano

Resumen: El presente artículo muestra la perspectiva enactivista (Maturana y Varela, 1984) como una alternativa teórica para investigar y esclarecer la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se presentan las raíces biológicas de la teoría, incluyendo las ideas fundamentales de autopoiesis y determinismo estructural. Posteriormente se profundiza en el acercamiento de la teoría a la cognición como un fenómeno corporal, para después ejemplificar el uso de la perspectiva en el área. Finalmente se concluye invitando al lector interesado a utilizar las ideas expuestas para investigar, de manera compleja y tomando en cuenta una multiplicidad de dimensiones, los fenómenos relacionados con la educación matemática.

Palabras clave: enactivismo, autopoiesis, determinismo estructural, educación matemática.

Abstract: In this article I present the enactivist perspective (Maturana and Varela, 1984) as a theoretical alternative that can be used to investigate and clarify the teaching and learning of mathematics. The biological roots of the theory are introduced, including fundamental ideas such as autopoiesis and structural determinism. In addition, the theory's ideas on cognition as embodied action are discussed and some of its uses in mathematics education are exemplified. Finally, I conclude by inviting the reader to use the ideas exposed in order to investigate, in a complex manner and considering a multiplicity of dimensions, the phenomena related to the teaching and learning of mathematics.

Keywords: enactivism, autopoiesis, embodied cognition, mathematics education.

INTRODUCCIÓN

Existen numerosas perspectivas teóricas que, en el campo de la educación matemática, ayudan a esclarecer lo que sucede en el aula y fuera de ella cuando las personas aprendemos matemáticas. Por ejemplo, algunas de las perspectivas utilizadas en esta área son el constructivismo, la teoría sociocultural, la teoría de las situaciones didácticas, entre otras. Ante la multiplicidad de posturas teóricas, resulta importante conocer los fundamentos y usos de cada una con el objeto de que, por un lado, se utilicen de manera apropiada y, por otro, se establezcan lazos y relaciones entre las distintas teorías

Fecha de recepción: 22 de agosto de 2013; fecha de aceptación: 31 de octubre de 2013.

(Artigue et ál., 2005). En este artículo hablaré sobre la perspectiva enactivista (Maturana y Varela, 1984; Varela et ál., 1991; Varela, 1999), la cual ha guiado mi investigación en educación matemática anteriormente (e.g. Lozano, 2005; 2008). Si bien esta postura no es tan conocida y utilizada en educación matemática como lo son otras teorías, me parece que ofrece posibilidades interesantes para explicar los fenómenos educativos de manera enriquecedora. Comenzaré por dar algunos de los antecedentes de la teoría, hablando de sus raíces biológicas y explicando algunas de sus ideas fundamentales. Después centraré la discusión alrededor de las ideas que propone el enactivismo con respecto a la cognición como un proceso corporal, idea que en inglés se denota con el término *embodied cognition* y que puede traducirse como cognición corpórea, cognición "en-el-cuerpo" o encarnada. Finalmente daré algunos ejemplos de cómo ha sido utilizada esta perspectiva para explicar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas.

ENACTIVISMO: IDEAS PROVENIENTES DE LA BIOLOGÍA Y LA TEORÍA DE SISTEMAS

> El problema consiste en [...] demostrar cómo es que un organismo que existe en un medio y que opera adecuadamente a sus necesidades, puede atravesar un continuo cambio estructural de manera tal que permanece actuando adecuadamente en su medio aun cuando el medio esté cambiando. Muchos nombres se le pueden dar a esto; se le podría llamar *aprendizaje*. (Maturana, 1987, pp. 74-75; énfasis añadido, mi traducción)

El enactivismo es una teoría que proviene principalmente de las ideas de los biólogos chilenos Maturana y Varela (1984), quienes desarrollaron una perspectiva a la que denominaron *biología de la cognición*. Sus ideas tuvieron influencias de la cibernética –un marco conceptual desarrollado en la década de 1940 por un grupo multidisciplinario internacional–, así como de la teoría de sistemas. Maturana y Varela partieron de la base, presente ya en dichas perspectivas, de que un sistema, es decir, un conjunto de elementos que forman un todo, no puede explicarse en su totalidad a través de la descripción de sus partes o componentes. Es necesario tomar en cuenta la organización del todo para poder entender sus propiedades. Al estudiar la organización de los seres vivos y siguiendo en particular las ideas de Bateson (1979, 1987, 2000), los biólogos desarrollaron una caracterización de los organismos radicalmente distinta, que permite situar a la cognición en el centro de los procesos de la vida misma.

El cambio de perspectiva en relación a la percepción y a los procesos cognoscitivos en los organismos comenzó cuando, al estudiar la visión del color en las palomas –en la década de 1960–, Maturana encontró que era imposible considerar los colores como características pertenecientes a los objetos en el mundo (Maturana, 2002, p. 5). El investigador se vio forzado entonces a relacionar "el conocer" o "el saber", con la manera en que los organismos están constituidos y con la interacción que tienen con el contexto (incluyendo otros organismos) (Ibíd., pp. 5-6). Maturana cambió la pregunta: *¿qué es lo que percibimos?,* por: *¿qué pasa en nosotros cuando percibimos?* Sus ideas acerca del conocimiento y del conocer cambiaron porque se percató de que no tenía sentido pensar en una realidad externa al sujeto dado que todo está configurado por lo que somos y lo que hacemos. En el momento en que pensamos o percibimos que hay algo "allá afuera", en ese instante ya es parte de nosotros. Es imposible saber qué hay en el mundo sin "contaminarlo con nuestra observación" (Maturana, 1992).

Al constatar que resulta problemático hablar de una realidad "externa" al sujeto, y que el proceso del conocer depende de cómo se encuentran constituidos los organismos, Maturana y Varela (1992) desarrollaron el concepto denominado *autopoiesis*, mismo que les permitió caracterizar a los seres vivos de una manera diferente a las existentes en ese momento y así desarrollar una importante teoría del conocimiento.

Autopoiesis y determinismo estructural

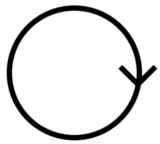
> Lo que caracteriza al ser vivo es su *organización autopoiética*. (Maturana y Varela, 1984, p. 28, *énfasis añadido*)

La primera idea central en la *biología de la cognición* es que lo que caracteriza a los seres vivos es su *organización autopoiética*. Para entender este concepto, empecemos por las definiciones que Maturana y Varela (1984) utilizan para "organización" y "estructura":

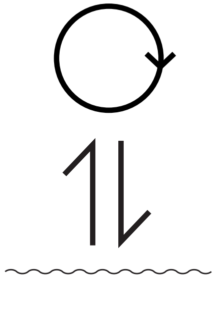
> Se entiende por **organización** a las relaciones que deben darse entre los componentes de algo para que se lo reconozca como miembro de una clase específica. Se entiende por **estructura** de algo a los componentes y relaciones que concretamente constituyen una unidad particular realizando su organización. (Ibíd., p. 28, énfasis en el original)

Por ejemplo, si hablamos de una silla, podemos decir que su organización se refiere a la manera en que las partes están relacionadas y que la convierten en una silla y no en una mesa o un banco. El modo en que las patas (o pata) de una silla se relacionan con el asiento, de tal manera que resulta posible sentarse en ella, conforma la organización de la silla. La organización es tal, que si cambiara, lo que se obtendría ya no sería una silla. La estructura de la silla, en cambio, puede ser modificada. Por ejemplo, si reemplazamos madera por plástico, o si en lugar de cuatro patas utilizamos solamente un pilar grueso, tendríamos todavía una silla. La estructura puede cambiar y la entidad sigue existiendo siempre y cuando la organización se conserve.

De acuerdo a Maturana y Varela, los seres vivos son sistemas en los que la estructura está continuamente cambiando, pero cuya organización se conserva (Maturana, 1988a). Esto significa que mientras que los componentes de un sistema se modifican constantemente, el sistema continúa existiendo como tal. Esto ocurre en el modo particular de organización al que Maturana y Varela (1992) llaman *autopoiesis*. En sistemas autopoiéticos los componentes están relacionados en una red de interacciones y es a través de estas interacciones que los componentes *se producen a sí mismos*. "Lo que es peculiar en ellos [los seres vivos] es que su organización es tal que su único producto es sí mismos, donde no hay separación entre productor y producto" (Maturana y Varela, 1984, p. 29). En otras palabras, el concepto autopoiesis denota sistemas autorreferenciales cuyos componentes se producen a sí mismos en el proceso del vivir. El siguiente diagrama simboliza un sistema autopoiético que continuamente se crea a sí mismo (Maturana y Varela, 1992, p. 74).



A pesar de producirse a sí mismos a cada instante, los seres vivos se encuentran abiertos a las interacciones con el contexto que les rodea. Dichas interacciones provocan perturbaciones en el organismo; cambios estructurales que son incorporados en un proceso continuo de reorganización. Las interacciones con el medio ambiente, por lo tanto, provocan ciertas respuestas, pero no las determinan. Los estímulos externos siempre son experimentados a través de nuestras estructuras internas en el proceso de autocreación. Maturana y Varela (1992, p. 72) utilizan el siguiente diagrama para explicar la relación entre el organismo autopoiético y el medio:



Desde esta perspectiva, un(a) estudiante de matemáticas es un sistema que se organiza internamente a sí mismo (o a sí misma) en cada instante. Cuando un estímulo llega hacia él o ella, por ejemplo, la percepción de un símbolo matemático, éste es inmediatamente incorporado en la estructura del (de la) estudiante, esto es, en su ser. No podemos hablar de que el (la) estudiante elabora una representación interna de algo externo, ya que en todo momento estará trabajando con elementos propios. Los elementos internos con los que trabajamos (por ejemplo, pensamientos o imágenes) no representan objetos externos, es decir, no tienen una correspondencia con algún objeto que pertenece al mundo exterior. Para el individuo, los estímulos adquieren sus características y se conforman en la medida en que son percibidos e interpretados en el proceso de modificación en las estructuras.

Debido a que los seres vivos se crean a sí mismos a cada instante, viven todo en referencia a ellos mismos, a través de sus estructuras (Maturana, 2002, pp. 5-6). Esto significa que, al final, las estructuras determinan lo que sucede en un organismo en un momento determinado (Ibíd., p. 6). Las estructuras limitan las acciones que un sistema puede llevar a cabo en un instante. Es por esta razón que Maturana y Varela caracterizan a los seres vivos como sistemas *determinados estructuralmente* (Ibíd., p. 5).

Por ejemplo, un árbol se mueve con el viento de la manera que su constitución lo especifica. El viento, cuando sopla, no puede determinar el tipo de forma que adoptará el árbol; es la estructura del árbol la que permite ciertos movimientos y no permite otros.

Los estudiantes de matemáticas, cuando incorporan un símbolo algebraico en su sistema, lo hacen tal como su estado estructural permite. La manera en que el símbolo es "visto" por los estudiantes está determinada por cómo están configurados en ese momento, no por algún significado intrínseco del signo, o por la manera en que está presentado frente a ellos.

Ahora, si decimos que los seres vivos están determinados estructuralmente, ¿cómo es que actúan de manera congruente en su contexto? ¿Cómo es que a veces observamos respuestas similares dado un mismo estímulo? ¿Cómo es que existe comunicación entre los organismos y el medio? Lo que sucede es que la estructura de los organismos es altamente flexible y se encuentra cambiando en cada momento. Aun cuando el medio ambiente no especifique o determine una reacción en particular debido a que todos los estímulos se viven a través de las estructuras, sí desempeña un papel importante al provocar los cambios que suceden en dichas estructuras. Las respuestas están determinadas por la estructura individual, y la estructura individual es, a su vez, un producto de los cambios ocurridos a raíz de interacciones pasadas, tanto internas como con el medio ambiente.

Las estructuras del o de la estudiante de matemáticas cambiarán constantemente, pero su organización, es decir, aquello que lo o la hace estudiante, no cambiará. Los estudiantes modifican sus estructuras (pensamientos, emociones, imágenes y todo aquello que los constituye de manera individual o particular), en relación a los estímulos que reciben, y las modificaciones serán tales que les permitirán seguir siendo estudiantes en un ambiente determinado. Esto quiere decir que, al ser un organismo autopoiético, un o una estudiante de matemáticas interactuará con el medio de tal manera que los cambios resultantes le permitan continuar en la clase de matemáticas (conservación de organización). El cambio de estructura bajo la misma organización resulta en la adaptación al medio, es decir, en continuar siendo estudiante en la clase de matemáticas.

Ahora, si en el proceso de vivir en un ambiente determinado, se crea una historia de interacciones recurrentes entre dos (o más) sistemas, entonces ambos sistemas atravesarán cambios estructurales motivados por dichas interacciones. Existirá lo que Maturana y Varela (1984) llaman *acoplamiento estructural* (p. 49).

Acoplamiento estructural

> Hablamos de acoplamiento estructural cuando hay una historia de interacciones recurrentes que dan lugar a la congruencia estructural entre dos (o más) sistemas. (Maturana y Varela, 1992, p. 75, mi traducción)

Los seres vivos interactúan con el medio ambiente (incluyendo otros seres vivos) y cuando hay interacción recurrente entre dos sistemas, ambos cambian de manera congruente o similar. En este caso, los sistemas pueden ser un solo organismo (por ejemplo, un estudiante de matemáticas interactuando con otro), o pueden también ser un conjunto de individuos (el mismo estudiante interactuando con el grupo completo de estudiantes y el profesor como un todo). En este último caso, podría observarse al estudiante responder congruentemente a las preguntas y observaciones del profesor y de sus compañeros. Un observador externo podría decir que la persona está actuando de manera coherente con su entorno, como si él o ella percibiera determinadas características del mundo externo y respondiera a ellas. En realidad, lo que sucede es que el individuo, en este caso el estudiante, ha estado interactuando con el medio por un cierto periodo y se encuentra actuando de acuerdo a su estructura, la cual ha estado cambiando junto con la estructura del medio (estudiantes y profesor).

Conforme el estudiante de matemáticas interactúa de manera recurrente con su profesor o profesora y con los demás estudiantes en el salón de clases, juntos crearán una historia de interacciones. Es a través de esta historia que las estructuras de todos los participantes en el salón de clases cambiarán de manera congruente, creando formas de comunicación y de trabajo conjunto. Cuando esto no sucede, un estudiante (o profesor) puede, en un caso extremo, dejar de actuar congruentemente y, por lo tanto, dejará de pertenecer a la organización en que se encuentra. Esto sucede cuando los cambios estructurales no dan lugar a la adaptación al medio. Por ejemplo, reprobar repetidamente los exámenes de matemáticas, en ciertos contextos tiene como consecuencia una separación del estudiante del grupo en el que se encuentra.

LA COGNICIÓN DESDE EL PUNTO DE VISTA ENACTIVISTA

El sistema nervioso de los organismos, según la perspectiva enactivista, no puede operar con representaciones del medio ya que es una red cerrada de neuronas (autopoiéticas) que se producen a sí mismas a cada instante (Maturana, 2002, p. 19). La cognición, por lo tanto, no está relacionada con representaciones mentales, ya que es biológicamente imposible para los seres vivos el operar con algo que se encuentra determinado en el exterior de ellos mismos. "Para entender los procesos neurológicos desde un punto de vista no-representacional, es suficiente con notar que cualquier perturbación que llegue del medio será informada (moldeada) de acuerdo a las *coherencias internas* del sistema" (Varela, 1987, p. 60, mi traducción, énfasis en el original). Un estímulo externo solamente provoca un cambio en la estructura del organismo, no produce una representación de algo fuera del mismo.

La cognición es un fenómeno que ocurre en sistemas determinados estructuralmente y está relacionado con la manera en que las estructuras de estos sistemas cambian. Los seres vivos modifican y producen sus estructuras en el proceso del vivir, al actuar e interactuar con el medio ambiente. La cognición es, en la teoría enactivista, equivalente al proceso de vida mismo. Un organismo "conoce" o "sabe" cuando sobrevive en un contexto determinado, cuando muestra un comportamiento que es posible en ese contexto, cuando está vivo. La cognición está íntimamente relacionada con la acción, de tal manera que resultan inseparables. En palabras de Maturana y Varela: "Todo hacer es conocer y todo conocer es hacer" (Maturana y Varela, 1984, p. 13).

Dadas sus raíces biológicas, comentadas anteriormente, la perspectiva enactivista enfatiza la comprensión de la acción –sinónima de la cognición– como *corpórea* (*embodied*) o perteneciente al cuerpo en dos sentidos fundamentales:

1. cognición dependiente del tipo de experiencia proveniente del tener un cuerpo con diversas capacidades sensomotoras;
2. capacidades sensomotoras individuales que se encuentran, a su vez, inmersas en un contexto social y cultural más amplio (Varela, 1999, p. 12, mi traducción).

El primer significado de cognición corpórea la sitúa en nuestros cuerpos, y nos impide pensar en ella como una noción abstracta, separada de nuestra experiencia cotidiana. El segundo significado ubica al aprendizaje en un contexto social y cultural.

A continuación examinaré el primer punto: la relación directa entre la cognición y las experiencias que provienen de un cuerpo físico. Esto a su vez incluye dos ideas: la primera es que la cognición surge de las acciones que realizamos, y la segunda, que las acciones se encuentran limitadas por nuestra constitución particular. Elaboraré ambos puntos y después comentaré las implicaciones de tomar la cognición como derivada de un cuerpo situado en un cierto contexto.

La cognición como acción corpórea

> [E]l mundo no es algo que se nos da, sino algo con lo que nos relacionamos al movernos, tocar, respirar y comer. Esto es a lo que llamo *cognición* como en-acción (*cognition as enaction*) [...]. (Varela, 1999, p. 8, énfasis en el original, mi traducción)

Anteriormente mencionamos que la cognición, en la perspectiva enactivista, es el continuo proceso de cambio en nuestras estructuras, es decir, en la manera que estamos constituidos momento a momento. Nuestras estructuras son altamente complejas y flexibles, cambiando a cada instante. Modificaciones en éstas ocurren al actuar en el mundo y no como resultado directo de los estímulos externos. No recibimos información del mundo, *actuamos* sobre el mundo, y nuestras acciones constituyen nuestros procesos cognoscitivos. La perspectiva enactivista enfatiza, por un lado, que nuestras *percepciones se encuentran guiadas por nuestras acciones* y, por otro, que las *estructuras cognitivas emergen a partir de patrones recurrentes en actividad sensomotora* (Varela, 1999, p. 12, énfasis añadido). En otras palabras, el enactivismo indica que nuestra actividad mental (pensamientos, imágenes, emociones) se encuentra enraizada en las acciones que llevamos a cabo con y a través de nuestros cuerpos.

Con el objeto de ilustrar la noción de acción guiada perceptualmente, se da el siguiente ejemplo de un experimento realizado por Held y Hein, en 1958.

> En un estudio clásico, Held y Hein criaron gatitos en la oscuridad y los expusieron a la luz sólo bajo ciertas condiciones. A un primer grupo de animales se le permitió moverse normalmente, pero cada uno de ellos fue atado a un simple carrito con una canasta que contenía a un miembro del segundo grupo de animales. Los dos grupos, por lo tanto, compartieron la misma experiencia visual, pero el segundo grupo estuvo totalmente pasivo. Cuando los animales fueron liberados después de unas semanas de dicho tratamiento, el primer grupo de gatitos se comportó de manera normal, pero aquellos que habían sido llevados de un lado a otro [en la canasta], actuaban como si fueran ciegos: chocaban contra los objetos y se caían en las orillas [de los muebles]. Este bello estudio apoya la perspectiva enactivista de que los objetos no son vistos debido a la extracción visual de propiedades, sino por la guía visual de la acción. (Varela et ál., 1991, pp. 174-175, mi traducción)

Aquellos gatitos a los que no se les permitió el movimiento actuaban como si fueran ciegos debido a que no habían tenido la oportunidad de formar su percepción a través de la acción. Los otros, aun cuando habían tenido acceso limitado a la luz, pudieron moverse y explorar su entorno. Esto hizo posible que percibieran a través de la vista, es decir, que vieran.

Otro ejemplo dado por Varela et ál. (1991), que comenta un caso desarrollado por Bach-y-Rita, puede resultar de utilidad para comprender esta idea:

> Bach-y-Rita diseñó una cámara de video para personas ciegas que puede estimular múltiples puntos de la piel a través de vibraciones activadas eléctricamente. Utilizando esta técnica, se logró que las imágenes formadas con la cámara correspondieran a patrones de estimulación de la piel, compensando así la pérdida visual. Los patrones proyectados en la piel no tienen contenido visual a menos que el individuo se encuentre conductualmente activo dirigiendo la videocámara mediante la cabeza, la mano y otros movimientos corporales. Cuando la persona ciega se comporta activamente de esta manera, después de unas cuantas horas de experiencia ocurre algo asombroso: la persona deja de interpretar las sensaciones en la piel como relacionadas con el cuerpo y las percibe como imágenes proyectadas en el espacio que está siendo explorado por el cuerpo dirigido mediante la "mirada" de la videocámara. Entonces, para experimentar "objetos reales que ese encuentran allá afuera", la persona debe dirigir activamente la cámara (usando la cabeza o la mano). (Ibíd., p. 75, mi traducción)

La percepción, entonces, no se trata de la recuperación de información acerca del mundo. Cuando actúo en el mundo, percibo. Cuando volteo la cabeza o muevo las manos, entonces veo, toco. Si no realizamos acciones no percibimos. Esto lo sabemos de nuestra vida cotidiana. A veces no escuchamos sonidos a menos que alguien más los mencione, o dejamos de escucharlos cuando nos enfrascamos en alguna tarea. Un gran número de objetos y eventos pasan desapercibidos a menos que actuemos sobre ellos.

De acuerdo a estas ideas, podemos entender por qué, cuando se escucha pasivamente una explicación de matemáticas, resulta prácticamente imposible tener como consecuencia una comprensión profunda de los conceptos involucrados. La percepción misma de los sonidos que conforman la explicación requiere de acciones (que pueden incluso ser invisibles para un observador) por parte del estudiante. Además, la perspectiva enactivista propone que no solamente la percepción se encuentra íntimamente relacionada con la acción. Las estructuras cognitivas, tales como las que tienen que ver con el aprendizaje de las matemáticas, se forman también a partir de patrones en la actividad sensomotora. Esto es, las actividades que llevamos a cabo sobre los objetos al interactuar en el mundo dan lugar a estructuras cognitivas tales como los conceptos y categorías matemáticos.

Esta idea se encuentra presente en el trabajo de Piaget (e.g. Piaget, 1954) y también ha sido desarrollada por autores como Lakoff y Johnson (Lakoff, 1983; Johnson, 1989 en Varela, 1999, p. 15). Piaget, por su parte, propuso que el conocimiento surge de la actividad del sujeto, ya sea física o mental. En esta perspectiva, conocer un objeto o un evento implica utilizarlo al asimilarlo a una estructura mental determinada (Glasersfeld, p. 56).

> [...] el conocer un objeto implica su incorporación en esquemas de acción, y esto es cierto [tanto] para el nivel sensomotor más elemental [como para] las más altas operaciones lógico-matemáticas. (Piaget, 1967, p. 17, citado en Glasersfeld, p. 56)

Piaget explicó cómo, a partir del sistema sensomotor y su propia actividad, el ser humano desarrolla toda su concepción de un mundo, incluyendo objetos localizados en el tiempo y en el espacio y las relaciones entre ellos.

Por otro lado, lo que Lakoff y Johnson argumentan es que las estructuras experienciales –esquemas directamente derivados de actividades sensomotoras– motivan la comprensión conceptual y el pensamiento racional y abstracto a través de los procesos generales cognitivos como el enfoque, la superposición y el escaneo (Varela, 1999, pp. 15-16). Lo que esto quiere decir es que los esquemas kinestésicos (relacionados con el cuerpo) que tenemos todos los seres humanos, tales como el esquema parte-todo, se originan en la experiencia corporal y después son proyectados metafóricamente para estructurar una variedad de dominios cognitivos de más alto nivel (Varela et ál., 1991, p. 177).

La perspectiva enactivista concuerda con estas posturas y considera que las estructuras conceptuales abstractas son producto de la capacidad de realizar acciones sobre estructuras directamente relacionadas con las interacciones corpóreas.

Nuevamente vemos cómo, desde el punto de vista enactivista, el aprendizaje surge a medida que nos relacionamos activamente con el medio ambiente, por lo que no puede pensarse como absorción de información. Ahora explicaré la manera en que nuestra constitución determina nuestras acciones en cada instante. Si bien al describir las raíces biológicas de la teoría hablamos del determinismo estructural en los organismos, ahora la discusión se enfocará en las acciones y los procesos sensomotores de los seres humanos.

Las acciones corporales determinadas estructuralmente

En Sacks (1995), el autor describe el caso de un hombre ciego llamado Virgil, quien recupera la vista después de una cirugía a la que fue sometido a la edad de 50 años. Cuando Virgil abrió los ojos después de la cirugía, nada de lo que veía tenía sentido para él. Percibía solamente lo que para él era un confuso caos de luz y sombra. En realidad, todavía actuaba como un hombre ciego, aun cuando los doctores decían que era físicamente capaz de ver.

Una explicación enactivista de estos eventos podría ser que Virgil no tuvo la oportunidad de construir, a través de la experiencia, las estructuras que nos permiten encontrar significados para lo que vemos. Debido a que su vista había estado afectada, no había podido realizar acciones guiadas perceptualmente que le permitieran construir las estructuras que hacen posible ver como lo hacemos la mayoría. Lo que esto nos muestra es que, de la misma manera que las estructuras surgen cuando actuamos, las acciones que llevamos a cabo se encuentran determinadas por nuestras estructuras. Las acciones de Virgil eran las de un hombre ciego, aun cuando físicamente era capaz de ver. Sus estructuras limitaban las acciones que podía llevar a cabo.

Estar determinados estructuralmente aplica a todas las acciones y, por lo tanto, al aprendizaje. Nuestro aprendizaje se encuentra delimitado, en un momento determinado, por nuestras estructuras, esto es, por la manera en la que estamos constituidos en ese instante, incluido nuestro estado corporal. Nuestras estructuras determinan qué elementos serán percibidos e interpretados y también limitarán y moldearán las acciones que llevaremos a cabo. La cognición no puede verse como la recuperación de información del mundo; se trata de notar ciertas características a través de nuestras acciones, y lo que podemos notar es resultado de nuestra constitución.

Es por las ideas anteriores sobre la cognición como acción corpórea que, desde la perspectiva enactivista, resulta imposible pensar en una separación, por una parte, entre la mente y el cuerpo y, por otra, entre la razón y la emoción. Las emociones, desde esta perspectiva, son estados corporales que especifican las acciones posibles para un organismo en un momento dado: "[Las emociones] son disposiciones corporales dinámicas para [ciertas] acciones [...] que especifican en un momento determinado los dominios de acción en los que los organismos se mueven" (Maturana, 1988a, p. 49, mi traducción). El notar determinados aspectos del medio y actuar de determinada manera siempre estará motivado por un estado emocional. El aprendizaje de las matemáticas, por lo tanto, no puede verse separado de los estados emocionales de los estudiantes ya que dichos estados forman parte de su constitución, que a su vez selecciona aquellas características del ambiente que puedan generar cambios estructurales.

El hecho de que nuestras estructuras, que incluyen nuestro estado corporal, determinan nuestras acciones y, por lo tanto, nuestro aprendizaje en un momento particular no significa que estemos predeterminados, o que podemos decir lo que sucederá a una persona en el futuro. En realidad es lo opuesto. Hemos hablado de que nuestras estructuras son flexibles y que cambian momento a momento a través de nuestras acciones. Si los individuos actúan de cierta manera en un determinado momento, eso no significa que no pueden actuar de manera distinta en el futuro. Por ejemplo, las personas que pierden la habilidad de hablar después de haber tenido un infarto cerebral pueden, en algunos casos, aprender a hablar nuevamente después de meses de terapia. El hecho de que las estructuras no les permitieran utilizar el lenguaje en un determinado momento no significa que la situación no pueda cambiar. Lo mismo sucede con un estudiante de matemáticas que, en un momento determinado, no puede "ver" una estructura matemática o una relación conceptual. En otro momento, el mismo estudiante podrá ver estos elementos sin dificultad. Es a través de las interacciones y de las acciones internas que nuestras estructuras cambian cuando aprendemos distintas cosas. En palabras de Maturana y Varela (1992): "No vemos lo que no vemos, y lo que no vemos no existe. Sólo cuando una interacción nos saca de lo obvio –por ejemplo, el ser transportados a un medio cultural diferente– y nos reflexionamos, es que creamos nuevas constelaciones de relaciones [...]" (p. 242, mi traducción).

El complejo juego entre estructuras que surgen a partir de acciones y acciones que son determinadas por las estructuras sugiere que es prácticamente imposible predecir resultados cuando se habla de aprendizaje. Las estructuras están moldeadas por las acciones en cada instante. Nuestras historias completas de interacciones, junto con nuestras dinámicas biológicas internas, serán responsables por la manera en que actuamos en cualquier situación. De hecho, desde este punto de vista y siguiendo a Stewart (2010), podemos decir que "la instrucción, en el sentido estricto de la palabra, es radicalmente imposible" (p. 9). Las acciones que los maestros o las maestras realizan no causan respuestas en los alumnos. Los agentes externos solamente desencadenan o generan respuestas en los individuos, no las especifican.

Esto nos ayuda a explicar por qué tenemos una variedad tan amplia de respuestas individuales cuando enfrentamos una situación específica. En un salón de clases de matemáticas, los estudiantes viven eventos similares, pero cada uno experimenta cada situación de una manera particular, debido a su estado estructural. Los mismos problemas recibirán soluciones diferentes, ya que la historia de cada individuo es única y, por lo tanto, estructuras particulares determinarán acciones particulares.

El aprendizaje, por lo tanto, no es el resultado de determinadas estrategias de enseñanza. El aprendizaje es lo que ocurre en el estudiante cuando sus estructuras se modifican al actuar en el mundo. Los cambios en las estructuras, sin embargo, no ocurren en individuos aislados; el aprendizaje ocurre cuando actuamos en un determinado contexto. Las acciones de un maestro no determinarán el resultado de los cambios estructurales pero sí ejercerán una influencia en relación al tipo de cambio que puede ocurrir. Esto nos lleva al segundo significado de cognición corpórea y nos remite a la idea de acoplamiento estructural vista anteriormente. Nuestros cuerpos están localizados en un contexto biológico, social y cultural, y, por lo tanto, las acciones que realizamos se efectúan dentro de un ambiente particular, en la compañía de otros.

INTERACCIONES CON EL MEDIO AMBIENTE

Cuando, en el día a día, interactuamos con nuestro entorno, tanto nuestras estructuras como las estructuras del entorno cambian en un proceso de acoplamiento estructural. Las acciones dan lugar a las estructuras cognitivas, y estas acciones ocurren en un contexto específico que también se ve afectado por dichas acciones. El individuo que aprende no puede ser considerado de manera aislada, tanto él o ella como el mundo se encuentran unidos a través de los constantes cambios en sus estructuras que emergen a raíz de sus interacciones. La cognición no es un fenómeno que surge dentro de la cabeza o el cuerpo de un solo individuo. Surge de las interacciones continuas con el medio, que a su vez se ve modificado por éstas. En el caso del ser humano, este medio incluye a la sociedad y a la cultura, las cuales no pueden separarse del proceso de aprendizaje mismo. El aprendizaje individual se encuentra moldeado por las interacciones que tienen lugar en culturas particulares, pero estas culturas a su vez se encuentran moldeadas a cada instante por las acciones individuales. En el enactivismo se utiliza el término *co-emergencia* para describir la manera en que el individuo y el mundo se especifican mutuamente (Davis, 1996, p. 10, mi traducción).

Cuando dos o más individuos se involucran en interacciones reiteradas dentro de una cultura en particular, el resultado será una historia de cambios mutuos en estructura. Las interacciones repetitivas darán lugar a cierta congruencia estructural entre los participantes (Maturana y Varela, 1984, p. 50). Esto significa que el aprendizaje colectivo puede ocurrir a través de cambios armónicos en estructura que emergen a partir de interacciones recurrentes. Por ejemplo, si dos estudiantes continuamente se involucran en la resolución de problemas matemáticos, es muy probable que encuentren una manera de trabajar juntos que cambie las estructuras de cada uno de una manera similar o congruente. El resultado para cada estudiante será único debido a su historia particular, pero habrá un espacio para acciones coordinadas que permitirá a ambos participar en una manera de resolver problemas creada por ambos. Cada estudiante poseerá las estructuras necesarias para ser capaz de actuar de determinada manera.

En un salón de clases, las estructuras de los participantes cambiarán simultáneamente al interactuar unos con otros. Como resultado de estas continuas interacciones, se crearán patrones de comportamiento. Estos patrones de comportamiento, que se establecen y pueden ser aprendidos por nuevos miembros de la comunidad a través de dinámicas de comunicación verbales y no-verbales, formarán lo que, a partir de las ideas de Maturana y Varela (1992, p. 201), llamo cultura del salón de clases. Se creará una cultura particular en cada instante en cada salón de clases, como resultado de las acciones de los participantes. Esta cultura, a su vez, moldeará a cada uno de los participantes.

Este es el juego, entre el individuo y el mundo, que caracteriza al enactivismo. El conocer ocurre en la interacción, con otros participantes y en un contexto determinado. Las interacciones recurrentes hacen posible compartir mundos individuales. Conforme las interacciones afectan a los distintos miembros de la comunidad, el contexto se vuelve una "ubicación" (Davis, 1996, p. 197, mi traducción) en la que se van creando los saberes individuales y colectivos. Debido a que la naturaleza de la influencia de las interacciones en los participantes estará determinada por su historia social y cultural, las interpretaciones de los eventos variarán. Al mismo tiempo, habrá acuerdos comunes sobre el tipo de acciones que pertenecerán a ubicaciones particulares.

> El aprendizaje ocurre en el intersticio en donde el que aprende encuentra al medio ambiente, enfatiza particularidades de éste y genera una respuesta cuya viabilidad en el medio es entonces determinada. El dominio de lo posible debe intersectar con la preferencia de advertirlo por parte del aprendiz. (Dawson, 1999, p. 154, mi traducción)

La cultura establecida por los participantes impondrá ciertas restricciones sobre el tipo de acciones que la comunidad considerará como "aceptables" en un determinado momento. Al comportamiento que permite a los participantes continuar existiendo en un contexto dado se le llama *comportamiento efectivo o conducta adecuada* (Maturana and Varela, 1992).

APRENDIZAJE COMO COMPORTAMIENTO ADECUADO

El aprendizaje, en la perspectiva enactivista, siempre es considerado en un contexto relacional (Maturana and Varela, 1984, p. 116). Dado que la cognición está íntimamente relacionada con la acción, y las acciones ocurren en lugares determinados, entonces el aprendizaje tiene que ser investigado en relación a la situación en la que ocurre. El conocimiento, en un lugar determinado, está asociado con la conducta adecuada o la acción efectiva en ese lugar (Maturana, 1987, p. 66). Los individuos organizan sus estructuras al interactuar con el mundo, determinados por su historia. Si la organización da lugar a un funcionamiento adecuado entonces podemos considerar que ha tenido lugar un aprendizaje.

En el caso del aprendizaje de las matemáticas, operar efectivamente es actuar de manera que el estudiante continúe existiendo en un determinado ambiente, es decir, es llevar a cabo acciones que son consideradas aceptables en la clase de matemáticas. Se especificarán diferentes criterios de aceptación en diferentes contextos. Por ejemplo, en un cierto contexto, el aplicar una estrategia de cálculo mental o un procedimiento para resolver una ecuación lineal, sin entender el porqué de su función, puede ser efectivo, mientras que en otros contextos es necesario justificar y explicar para que el resultado sea considerado correcto. El comportamiento que no es efectivo dará lugar a la interrupción de las interacciones y, a la larga, evitará que el individuo continúe participando en un contexto en el que las acciones son inaceptables. La conducta adecuada, entonces, es la que permite a los estudiantes seguir siendo estudiantes (y a los profesores seguir siendo profesores) en el salón de clases en el que se encuentran.

Si bien, como se mencionó anteriormente, el aprendizaje no puede ser resultado directo de una estrategia de enseñanza, las acciones de los maestros moldearán la cultura que se crea en el salón de clases y, por lo tanto, ejercerán una influencia en el tipo de acciones que serán consideradas efectivas y que darán lugar al aprendizaje.

ENACTIVISMO COMO CAMINO MEDIO

Al caracterizar al aprendizaje como acción efectiva en un dominio en particular, el enactivismo nos provee de un “camino medio” entre posturas epistemológicas subjetivas y objetivas. Al igual que con el constructivismo, el enactivismo sostiene que el aprendizaje se relaciona con la organización y reorganización de nuestro mundo de experiencia; sin embargo, a diferencia de posturas constructivistas radicales, los individuos no se contemplan como entidades aisladas del medio ambiente, sino como parte de un mundo en cuya creación participan activamente. El contexto cultural y la mediación social no son solamente influencias en el aprendizaje individual como en ciertas posturas de constructivismo social. Como sucede en aproximaciones como la teoría sociocultural, la cognición es vista como proceso colaborativo, y el conocimiento colectivo surge a partir de la acción compartida, ya que los individuos son considerados parte de sistemas complejos (Davis, 1996, p. 192). De esta manera, un salón de clases de matemáticas es considerado como un todo y los participantes construyen su conocimiento a través de sus interacciones. Mientras actúan de manera conjunta en un contexto dado, los individuos contribuyen a crearlo. Los estudiantes y los profesores participan en la creación de una cultura que, a su vez, ejerce una influencia en el aprendizaje individual. El énfasis se encuentra en la inseparabilidad de individuo y contexto al considerarse que emergen de manera simultánea.

En la postura enactivista, "la educación es un proceso a través del cual estudiantes y profesores cambian juntos de manera congruente mientras mantienen interacciones recurrentes tales que los estudiantes aprenden a vivir con sus profesores en cualquier dominio de existencia" (Maturana y Nisis, 1998, mi traducción). No puede considerarse el aprendizaje como resultado directo de la enseñanza, como un proceso en el que existe una correspondencia entre estímulo y respuesta, pero tampoco puede considerarse como un proceso en individuos aislados, que existen de manera separada de su entorno. Alumno, maestro y cultura emergen de manera simultánea.

ENACTIVISMO Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La perspectiva enactivista ha sido utilizada principalmente en algunos círculos de investigadores en educación matemática en Canadá y el Reino Unido, aunque el interés en la teoría ha ido en aumento en los últimos años, y más investigadores la empiezan a utilizar en su trabajo, por ejemplo, en Finlandia y Sudáfrica. Ernest (2010) sostiene que sus fundamentos poseen gran riqueza y poder para generar explicaciones acerca del aprendizaje. Asimismo, Simon (2013) incluye el enactivismo entre las "grandes teorías" en educación matemática, junto con el constructivismo y la teoría sociocultural.

En esta sección mencionaré algunos de los trabajos que se han realizado desde una perspectiva enactivista con el objeto de ejemplificar su uso. No se trata de una revisión exhaustiva de la literatura, sino de mostrar el tipo de investigación que se lleva a cabo desde esta perspectiva.

Reid (1996) es uno de los principales investigadores dedicados a estudiar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a través de ideas enactivistas. Durante muchos años trabajó en colaboración cercana con Zack, una maestra de primaria con quien desarrolló análisis y propuestas teóricas alrededor del trabajo matemático realizado por los alumnos del salón de clases de esta última (Zack y Reid, 2003; 2004). Reid y Zack, por ejemplo, describen cómo los alumnos, al encontrar ideas complejas por primera vez, toman decisiones y realizan acciones que les funcionan de manera provisional. Frecuentemente trabajan con una comprensión que denominan como "suficientemente buena" (*good enough*), la cual es incompleta si se considera desde un punto de vista matemático formal, pero sirve o es adecuada de manera temporal. Los autores argumentan que esto no constituye una debilidad, sino que la disposición de los estudiantes a continuar trabajando con base en esta comprensión incompleta es un componente esencial de la resolución de problemas complejos.

Reid introdujo también la idea de tomar esta perspectiva no solamente como una posición teórica sino también metodológica. Para Reid, el investigador constituye una unidad autopoiética que se encuentra en un determinado contexto, y que actuará de manera que sus acciones le permitan continuar existiendo en ese contexto (Reid, 1996 p. 206). Las teorías y los resultados en educación matemática, por lo tanto, serán formuladas de acuerdo a los criterios establecidos por comunidades científicas en momentos determinados. La investigación es considerada como una forma de aprendizaje en la que las ideas del investigador se verán en continua modificación. Asimismo, el contexto en el que el investigador se encuentra será también modificado por las acciones de éste. Ambos, contexto e investigador, están relacionados y co-emergen a través de sus interacciones. Esto se puede ilustrar mediante el hecho de que, por ejemplo, en la mayoría de los trabajos de investigación hechos por Reid, el papel del investigador, el desarrollo de sus ideas y la interacción con los participantes en el salón de clases a lo largo del proceso de investigación son descritos detalladamente (véase Zack y Reid, 2003; 2004). El investigador no se presenta como un observador aislado sino como un aprendiz y coparticipante que interactúa y aprende junto con el maestro y los alumnos.

Brown y Coles, por su parte, han trabajado conjuntamente durante un considerable número de años en diversos proyectos, estudiando el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva enactivista (e.g. Brown y Coles, 1999; 2011). El trabajo inició como una colaboración muy cercana entre investigadora y profesor, la cual se presenta con frecuencia como característica de la investigación enactivista. Brown y Coles trabajaron durante varios años en la creación de una cultura del salón de clases en la que se lleva a cabo la práctica de "ser un matemático"; práctica mediante la cual los participantes cuestionan, reflexionan y meta-comentan acerca de sus acciones. Todas éstas se consideran acciones adecuadas o efectivas en dicha cultura. Los investigadores muestran evidencia de que las prácticas anteriores sirven de soporte para el aprendizaje matemático (Coles, 2013). Lo anterior sucede en una "comunidad de indagadores" en la cual las acciones individuales son moldeadas por, y a la vez modifican a, la comunidad misma.

Por otra parte, Davis (e.g. 1995; 1997) también ha contribuido fuertemente al establecimiento y uso de la perspectiva enactivista en educación matemática. Ha escrito libros y artículos de reflexión acerca de la teoría misma y de su uso para investigar el aprendizaje matemático tanto en estudiantes como en profesores. Davis hace hincapié en la inseparabilidad de los procesos de aprendizaje y del producto (las matemáticas). El autor considera el enactivismo como una postura intermedia que, si bien permite retomar aspectos fundamentales del constructivismo, incluye la parte social en el aprendizaje, no como una influencia sino como algo fundamental al tomar en cuenta la inseparabilidad del individuo con el medio, que es fundamental en la teoría.

La parte afectiva –inseparable de los procesos cognoscitivos en el enactivismo– ha sido retomada por varios autores. Brown y Reid (2006) exploran las decisiones no-conscientes que ocurren continuamente en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y explican cómo las emociones desempeñan un papel importante en este proceso: "Hemos intentado clarificar las maneras en las que la emoción es parte esencial de la cognición y cómo los marcadores somáticos proveen la base emocional para las decisiones no-conscientes que deben ocurrir antes de la acción y de la reflexión consciente" (Ibíd., p. 190, mi traducción). Brown y Coles (2011) también toman en cuenta la inseparabilidad de la cognición con los aspectos afectivos al reformular sus ideas sobre el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Al reconocer las bases biológicas del conocimiento, los autores concluyen que la forma de trabajo creada en grupos formados por futuros profesores, profesores e investigadores depende de las historias de interacción entre los participantes e incluye la dimensión afectiva: "Al invocar la noción de un grupo de "conocer-interconectado" reconocemos la importancia de la dimensión afectiva al describir cualquier método de desarrollo profesional. Una implicación del reconocimiento de las bases biológicas del ser es que lo afectivo no puede ser separado de lo cognitivo" (Ibíd., p. 864).

Asimismo, Hannula (2012) habla sobre cómo la perspectiva enactivista ayuda a tomar en cuenta tanto la base evolutiva de los procesos afectivos como el desarrollo individual, permitiendo así tener una fundación meta-teórica para relacionar distintos aspectos de la investigación en esta área.

En mi propio trabajo de investigación (Lozano, 2004; 2008), la perspectiva enactivista me permitió, a través de un estudio longitudinal, formular una caracterización del aprendizaje del álgebra que incluye diversas dimensiones, incluyendo aspectos sociales, cognoscitivos, afectivos y matemáticos. En dicho estudio, el aprendizaje del álgebra ocurrió cuando los participantes crearon y fueron moldeados por una cultura en la que actuar algebraicamente, en el sentido convencional, se volvió parte del actuar natural de los estudiantes, es decir, cuando se volvió parte de su ser. Desde mi punto de vista, las ideas enactivistas me permitieron "ver" el aprendizaje del álgebra de una forma que sin ellas no habría sido posible.

COMENTARIOS FINALES: UNA INVITACIÓN A CONOCER –Y POR LO TANTO HACER– MÁS

Como hemos visto, la fuerte inconformidad –presente en el enactivismo– con la noción de que la cognición es fundamentalmente una representación del mundo que rodea al observador, permite considerar el aprendizaje de las matemáticas desde un ángulo distinto al que suele utilizarse en el campo. El conocer, como vimos, no puede ser caracterizado por la aprehensión de representaciones de objetos que se encuentran en un mundo externo al sujeto. Sin embargo, tampoco puede estar determinado por procesos internos que suceden en mentes aisladas del entorno. Para el enactivismo, la cognición resulta del interactuar de un mundo y una mente con base en una historia de una variedad de acciones que un organismo lleva a cabo en ese mundo (Varela et ál., 1991, p. 9, mi traducción). Esto quiere decir que el conocer es resultado de las interacciones con el mundo, las cuales estarán determinadas por la historia del individuo (Ibíd., p. 18). De esta manera, la estructura biológica y la experiencia previa determinan el significado que, del mundo, cada persona construye. El conocer surge a partir de las interacciones, que a su vez ejercerán influencia sobre todos los participantes. El énfasis no se encuentra en el individuo ni en el contexto, ya que ambos son inseparables.

A través de las ideas enactivistas, el aprendizaje individual se reconcilia con la interacción social, el cuerpo con la mente, la razón con la emoción y el conocer con el conocimiento matemático. Sus conceptos, desde mi punto de vista, permiten tener una perspectiva amplia acerca del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, tomando en cuenta su complejidad. Al contemplar la dificultad de generalizar resultados en educación matemática –ya reconocida en la investigación en el campo– debido a la multiplicidad de factores que influyen en el aprendizaje, me parece fundamental contar con miradas teóricas que permitan tomar en cuenta, de manera explícita, la multidimensionalidad de los fenómenos estudiados. El presente artículo constituye una invitación a conocer la perspectiva enactivista a mayor profundidad para contemplarla como una posibilidad para explorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de manera multifacética. Me parece que, dada la complejidad y riqueza de la educación matemática, dicha posibilidad resulta tanto útil como valiosa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M., M. Bartolini Bussi, T. Dreyfus, E. Gray y S. Prediger (2005), "Different theoretical perspectives and approaches in research in mathematics education", *Proceedings from* CERME *4*, Working group 11, pp. 1239-1243, http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME4/CERME4_WG11.pdf#page=3, [12-05-13].

Bach-y-Rita, P. (1962), *Brain Mechanisms in Sensory Substitution*, Nueva York, Academic Press.

Bateson, G. (1979), *Mind and Nature*, Nueva York, Dutton.

——— (1987), "Men are Grass: Metaphor and the World of Mental Process", en W. I. Thompson (ed.), GAIA, *A Way of Knowing: Political Implications of the New Biology,* Hudson, N. Y., Lindisfarne Press.

——— (2000), *Steps to an Ecology of Mind,* Chicago, The University of Chicago Press.

Brown, L. y A. Coles (1999), "Needing to use algebra – A case study", en O. Zaslavsky (ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Haifa, vol. 2, pp. 153-160.

——— (2011), "Developing expertise: How enactivism re-frames mathematics teacher development", ZDM *Mathematics Education*, vol. 43, pp. 861-873.

Brown, L. y D. Reid (2006), "Embodied Cognition: Somatic markers, purposes and emotional orientations", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 63, núm. 2, pp. 179-192.

Coles, A. (2013), *Being Alongside: For the Teaching and Learning of Mathematics,* Rotterdam, Sense Publishers.

Davis, B. (1995), "Why teach mathematics? Mathematics education and enactivist theory", *For the Learning of Mathematics*, vol. 15, núm. 2, pp. 2-9.

——— (1996), *Teaching Mathematics: Toward a Sound Alternative*, Nueva York, Garland Publishing.

——— (1997), "Listening for differences: An evolving conception of mathematics teaching", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 28, pp. 355-376.

Davis, B. y E. Simmt (2003), "Understanding learning systems: Mathematics education and complexity science", *Journal for Research in Mathematics Education*, 34, pp. 137-167.

Dawson, S. (1999), "The Enactive Perspective on Teacher Development: 'A Path Laid While Walking'", en B. Jaworski, T. Woods y S. Dawson (eds.), *Mathematics Teacher Education: Critical International Perspectives*, Londres, Falmer Press.

Ernest, P. (2010), "Reflections on theories of learning", en B. Sriraman y L. English (eds.), *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers,* Heidelberg, Springer, pp. 39-47.

Glasersfeld, E. von (1995), *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*, Londres, Falmer Press.

Hannula, M. S. (2012), "Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 14, núm. 2, pp. 137-161.

Johnson, M. (1989), *The Body in the Mind*, Chicago, University of Chicago Press.

Lakoff, G. (1983), *Women, Fire and Dangerous Things*, Chicago, University of Chicago Press.

Lozano, M. D. (2004), *Characterising Algebraic Learning: an enactivist longitudinal study,* tesis doctoral, University of Bristol.

——— (2005), "Mathematics learning: ideas from neuroscience and the enactivist approach to cognition", *For the Learning of Mathematics*, vol. 25, núm. 3, pp. 24-27.

——— (2008), "Characterising Algebraic Learning through enactivism", *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Morelia, vol. 3, pp. 329- 336.

Maturana, H. (1987), "Everything is Said by an Observer", en W. I. Thompson (ed.), *GAIA, A Way of Knowing: Political Implications of the New Biology*, Hudson, N.Y., Lindisfarne Press, pp. 65-82.

——— (1988a), "Ontology of Observing: The Biological Foundations of Self Consciousness and the Physical Domain of Existence", *Conference Workbook: Texts in Cybernetics*, American Society for Cybernetics Conference, Felton, pp. 18-23, http://www.inteco.cl/biology/ontology [30-07-01].

——— (1992), "Diálogo con Humberto Maturana, un notable biólogo cibernetista, sobre la realidad y el conocimiento", http://www.puntoedu.edu.ar/comunidades/comunicacion/sanpedro/comunicacionestrategica [15-04-01].

——— (2002), "Autopoiesis, Structural Coupling and Cognition: A history of these and other notions in the biology of cognition", *Cybernetics and Human Knowing*, vol. 9, núm. 3-4, pp. 5-34.

Maturana, H. y S. Nisis (1998), "Human Awareness: Understanding the Biological Basis of Knowledge and Love in Education", http://members.ozemail.com.au/~jcull/articles/arteduc.htm [31-01-03].

Maturana, H. y F. Varela (1984), *El árbol del conocimiento*, Santiago de Chile, Editorial Universitaria.

Maturana, H. y F. Varela (1992), *The Tree of Knowledge: The Biological Roots of Human Understanding*, ed. rev., Boston, Shambhala.

Piaget, J. (1954), *The Construction of Reality in the Child*, Nueva York, Basic Books.

Reid, D. (1996), "Enactivism as a Methodology", en L. Puig y A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Valencia, pp. 203-209.

Sacks, O. (1995), *An Anthropologist on Mars*, Londres, Picador.

Simon, M. A. (2013), "The need for theories of conceptual learning and teaching of mathematics", en K. R. Leatham (ed.), *Vital Directions for Mathematics Education Research*, Nueva York, Springer, pp. 95-118.

Stewart, J. (2010), "Foundational issues in enaction as a paradigm for cognitive science: from the origin of life to consciousness and writing", en J. Stewart, O. Gapenne y E. D. Paolo (eds.), *Enaction: Toward a New Paradigm for Cognitive Science*, Cambridge, Massachusetts, MIT Press.

Varela, F. (1987), "Laying down a path by walking", en W. I. Thompson (ed.), *GAIA, A Way of Knowing: Political Implications of the New Biology*, Hudson, N.Y., Lindisfarne Press, pp. 48-64.

Varela, F. (1999), *Ethical Know-How: Action, Wisdom and Cognition*, Stanford, Stanford University Press.

Varela, F., E. Thompson y E. Rosch (1991), *The Embodied Mind*, Cambridge, Massachusetts, MIT Press.

Zack, V. y D. Reid (2003), "Good-enough understanding: Theorising about the learning of complex ideas (Part 1)", *For the Learning of Mathematics*, vol. 23, pp. 43-50.

Zack, V. y D. Reid (2004), "Good-enough understanding: Theorising about the learning of complex ideas (Part 2)", *For the Learning of Mathematics,* vol. 24, pp. 25-28.

DATOS DE LA AUTORA

María Dolores Lozano
Universidad de las Américas Puebla, México
maria.lozano@udlap.mx

Parte III

Nuevos aportes al campo de la educación matemática

Intuir y formalizar: procesos coextensivos

Luis Moreno Armella

Resumen: Hay una fuerza que atraviesa la enseñanza del cálculo: la tensión entre la intuición y el rigor. El cálculo se sigue enseñando como si fuera natural introducir el estudio de la variación y la acumulación mediante las matemáticas de ε y δ. Frecuentemente se considera un fracaso que los estudiantes conciban la noción de límite mediante metáforas del movimiento. Aquí se evidencia la tensión creada por la educación tradicional entre las intuiciones y una formalización sin brújula. Las conexiones internas intuitivas sobre acumulación y variación no se traducen correctamente en la formalización aritmetizada mediante ε y δ.

Palabras clave: intuición, formalización, infinitesimal, cognición analógica, símbolo, metáfora, conocimiento enraizado, medio digital, mediación.

Abstract: There is a force that goes through the teaching of Calculus: The tension between the intuitive and the formal. Calculus continues to be taught as if it were natural to introduce the study of change and accumulation by means of formalized concepts known as the mathematics of ε and δ. It is frequently considered as a failure that "students still seem to conceptualize limits via the imagination of motion." This kind of assertions shows the tension created by traditional teaching between students' intuitions and a misdirected formalization. The internal connections of the intuition of change and accumulation are not correctly translated into that arithmetical approach of ε and δ.

Keywords: intuition, formalization, infinitesimal, analog cognition, symbol, metaphor, embodied knowledge, digital medium, mediation.

1. INTRODUCCIÓN

Felix Klein, en un artículo publicado en 1896 en el *Bulletin of the American Mathematical Society*, "The arithmetizing of mathematics", expresó su descontento frente al rumbo formalizante que estaban tomando las matemáticas en ese momento. En ese artículo, por primera vez, se introduce la expresión "aritmetización de las matemáticas". Allí, Klein recuerda que Gauss, aunque pertenecía a una generación que había introducido gradualmente un espíritu más crítico dentro del quehacer matemático, empleaba, sin duda alguna, su intuición del espacio como base de sus demostraciones. Para Klein, la intuición tenía un papel central en el pensamiento matemático y lo expresa así:

Fecha de recepción: 15 de agosto de 2013; fecha de aceptación: 4 de noviembre de 2013.

> No concedo que la ciencia aritmetizada constituya la esencia de las matemáticas [...] Debo señalar del modo más enfático que no es posible tratar exhaustivamente las matemáticas mediante el método deductivo exclusivamente, sino que, aun hoy en día, la intuición conserva su provincia [...] La investigación lógica tiene su lugar sólo después que la intuición haya completado su trabajo de idealización. *La intuición matemática aparece íntimamente vinculada con las capacidades motoras y visuales* [...] (Klein, 1896)

Klein veía, en este movimiento de aritmetización, la instalación de una *falsa pedagogía y una visión distorsionada de las ciencias*. Las preocupaciones de Klein incluían la pedagogía de las matemáticas y las matemáticas mismas. ¿Estaba la pedagogía subordinada al desarrollo formal de las matemáticas? Parece que Klein, en el artículo mencionado y en otras obras (Klein, 2004), impulsa la idea de que dicha subordinación hay que cuestionarla y analizarla críticamente.

Nada de esto le impedía percibir que intuición y formalización constituían una especie de trayectoria bidireccional, dialéctica, en la producción del conocimiento, pero distinguía claramente los problemas de la enseñanza como cualitativamente distintos a los del desarrollo propio del conocimiento matemático.

Pero ésta no es una historia aislada. En 1931, Mark Vygodskii publicó en Moscú su libro *Fundamentos del cálculo infinitesimal*. En este libro, Vygodskii explicaba por qué estaba presentando un enfoque que pretendía rescatar el papel de la intuición y el razonamiento inductivo. Refiriéndose a los textos oficiales, decía:

> Todos estos libros comparten un enfoque que considero equivocado y lesivo. Específicamente, en todos ellos los conceptos fundamentales del cálculo se presentan de manera lógica. No importa cuánto se simplifiquen las pruebas para eludir el rigor formal, invariablemente los textos intentan presentar los esquemas del análisis moderno. La consecuencia es que los conceptos fundamentales no aparecen en una perspectiva evolutiva sino como un bloque de hielo.

Nikolai Luzin, cofundador de la escuela de análisis matemático de la Universidad de Moscú, hizo explícito su apoyo a Vygodskii en unas cartas escritas poco después de las polémicas que suscitó su libro. En esas cartas, Luzin explica su punto de vista sobre la aritmetización del cálculo y enfatiza que, en realidad, ese proceso de aritmetización *no corresponde a una sistematización de las ideas medulares del cálculo*. Resalta que aquel trabajo de fundamentación fue muy bueno, que se hizo como debía hacerse, pero que:

> [...] si ello se corresponde con lo que tenemos en nuestra conciencia, eso es otro asunto. Me asalta una brutal contradicción entre las fórmulas intuitivamente claras del cálculo integral con el incomparablemente artificial y complejo trabajo invertido en las *justificaciones* y *demostraciones*. (en Demidov y Shenitzer, 2000)

Estas líneas dejan ver con claridad meridiana a dónde apunta la crítica: la intuición sobre los problemas de movimiento, de variación y acumulación, propios del cálculo, ha sido desalojada y ha sido sustituida por una maquinaria formal, más precisa seguramente, pero desconectada de aquellas intuiciones.

Para Luzin, el tratamiento *intuitivo* había constituido una de las piedras de toque de su formación matemática y filosófica, tal y como explicaba extensamente en las cartas a Vygodskii.

Las siguientes líneas, tomadas de un artículo de Grabiner (1983), ilustran, a través de un diálogo, la situación de callada perplejidad que aqueja a muchos estudiantes frente a este formalismo que venimos comentando:

Estudiante: El carro lleva una velocidad de 50 km por hora. ¿Qué significa eso?
Profesor: Dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que si $|t_2 - t_1| < \delta$, entonces:

$$\left| \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} - 50 \right| < \varepsilon$$

Estudiante: ¿Cómo es posible que alguien haya imaginado tal respuesta?

Éste es un drama que cotidianamente se presenta en muchos salones de clase. Siguiendo el hilo conductor de las reacciones de Klein, Vygodskii y Luzin, se llega a la conclusión de que la aritmetización introdujo una tensión casi insostenible entre las ideas intuitivas del cálculo y las ideas desarrolladas en el curso de dicha *aritmetización*.

Es muy claro que el análisis histórico, las investigaciones didácticas y los cambios curriculares nos están enseñando, de manera pertinaz, que no llevamos la dirección adecuada para atender el tema en cuestión; pero que, de manera igualmente pertinaz, estamos decididos a no corregirla.

Tanto Klein como Luzin escriben varias décadas *después* de que ha tenido lugar la instalación del proceso de aritmetización. Sus expresiones permiten inferir que perciben las consecuencias del desequilibrio producido entre el acercamiento intuitivo y el nuevo enfoque aritmético.

En un artículo sobre la aritmetización de las matemáticas, el matemático norteamericano James Pierpont escribió, no sin cierta inquietud, que:

> Tenemos dos mundos: el mundo de nuestros sentidos y de nuestra intuición y el mundo del número [...] el análisis de hoy [está] construido sobre la noción de número, y sus verdades son las más sólidamente establecidas dentro del conocimiento humano. Sin embargo, no hay que pasar por alto que el precio que debemos pagar por ello es terrible: *la total separación del mundo de los sentidos*. (Pierpont, 1899)

Se percibía ya que el papel central del pensamiento intuitivo estaba siendo puesto de lado, o más bien, *inhibido* por el desarrollo del programa de aritmetización. La tensión entre el razonamiento intuitivo, el inductivo y el puramente deductivo sigue gravitando hoy día en el medio educativo.

2. LA EXPERIENCIA SIMBÓLICA

Cuando vemos a un pez nadar o a un pájaro surcar el aire, estamos contemplando el resultado de millones de años de "diálogo" entre una especie y el entorno físico. La forma del animal y su aparente facilidad para desplazarse en su propio medio son el resultado de un proceso de selección natural que ha producido una especie *viable* en ese entorno. A simple vista resulta difícil aceptar que el pájaro no haya sido diseñado *a priori* para volar con tanta facilidad... pero no, no ha sido así. Es, más bien, el resultado de un proceso que ha ido depositando lenta pero inexorablemente una forma de "conocimiento" en su sistema nervioso y en su morfología, que lo hace actuar como si "supiera" lo que tiene que hacer. El pájaro "sabe" volar, el pez "sabe" nadar, *pero no saben que lo saben*. Es como si el conocimiento que tuvieran no pudiesen declararlo al "cruzar una frontera", porque no saben que lo tienen: su conocimiento permanece *implícito*, encerrado en su cuerpo.

Los seres humanos, al pertenecer al mundo biológico, compartimos con las demás especies este nivel implícito de conocimiento que "vive" encerrado en el cuerpo. Sin embargo, en determinado momento de nuestra evolución, adquirimos una capacidad que marcó profundamente a nuestra especie y trazó un camino evolutivo distinto. Esa capacidad –expresada en términos generales– ha sido la *capacidad simbólica*. La posibilidad de capturar nuestra experiencia de forma simbólica nos hace más conscientes de aquello que se representa mediante símbolos. La lengua natural conforma el que, tal vez, es el sistema simbólico más importante que posee una persona. A pesar de que el significado de las palabras es compartido en gran medida por todos los hablantes de una lengua, aquéllas tienen, para cada hablante, matices personales. Los matices del significado son inseparables del intérprete.

Desde el primer día en el planeta, un recién nacido entra en contacto con su mundo social y cultural de manera que sus experiencias llevan ya la marca de la cultura. A diferencia de otras especies, para el humano se trata de una experiencia híbrida, y con el tiempo va quedando depositada casi totalmente en los sistemas simbólicos de esa cultura. Toda persona ha experimentado alguna vez un sentimiento de angustia, por ejemplo, ante una situación en la que siente que le faltan las palabras para expresar eso que tiene dentro de sí. Es como si nuestro "mundo implícito" no lograra ser *traducido* plenamente a los símbolos de la lengua, es decir, a las palabras.

Las siguientes líneas de un poema de O. Mandelstam, al que era muy afecto Vygodskii, capturan esa situación: *He olvidado la palabra que quería decir, y el pensamiento, incorpóreo, regresa al reino de las sombras*.

Las personas viven inmersas en una tensión (sutil a veces, apremiante en otras), entre el mundo de sus experiencias y el impulso de fijar esas experiencias en algún sistema simbólico, incluido, desde luego, el lenguaje natural.

Una vez que una experiencia ha sido trasladada al lenguaje o a otro sistema de representación simbólica, ésta puede ser refinada, pulida, profundizada. Como cuando una piedra preciosa está a disposición de un avezado joyero que la transforma en una pieza única. Para las personas, las relaciones entre su mundo de experiencias y su mundo simbólico constituyen un todo inseparable. Un buen narrador, mediante su oralidad o su escritura, puede lograr que vivamos los pormenores de una historia como si hubiésemos estado en el lugar y tiempo de su acontecer. Pero no pasemos por alto que al escuchar o leer esa historia, casi de manera automática la referimos a nuestras propias experiencias, que funcionan como un piso firme sobre el que se elabora el mundo de significados nuevos que vienen encarnados en la narración que escuchamos o leemos. Si la experiencia que se cuenta nos es totalmente ajena, seguramente no logrará afectarnos de manera profunda; en todo caso, la podemos entender a un nivel, digamos, formal.

Los significados de las palabras y de los otros sistemas simbólicos que empleamos en nuestra cultura no son aislados, más bien son parte sustancial de la infraestructura de la cultura a la que pertenecemos. Somos una especie híbrida, pero somos, sobre todo, una especie simbólica.

La búsqueda de razones es una pulsión más o menos permanente. Cuando se dice que algo "tiene sentido", es como si el significado hubiese llegado a través del ojo, del oído o del tacto, es decir, a través de los *sentidos*. Lo que llega mediante los símbolos resulta tan natural como lo que llega mediante la percepción humana, pues, al fin y al cabo, las percepciones siempre son un acto de interpretación o, por lo menos, un intento de interpretación.

Como una banda de Moebius, tenemos simultáneamente los colores de la biología y de la cultura. Pero, como ha expresado el antropólogo C. Geertz (*The Interpretation of Cultures*, 1983), dado que nuestro sistema nervioso se desarrolló en gran medida en interacción con la cultura, le resulta imposible organizar nuestra experiencia sin la guía que suministran los sistemas de símbolos significativos.

La experiencia humana es, en síntesis, una experiencia en un mundo social y cultural. La acción humana ha saturado el mundo en que nacemos con sus obras materiales y conceptuales. Estamos rodeados de objetos plenos de significados. Casi podríamos decir que esos objetos están *definidos* por aquellos significados. Pero también estamos inmersos en una especie de atmósfera plagada de objetos simbólicos como el lenguaje, las obras de arte, los instrumentos científicos y todas las instituciones sociales que modulan nuestra cotidianidad.

Todo lo anterior permite afirmar que la experiencia humana sobre la variación, la acumulación y demás ideas que han estado en las raíces del cálculo son experiencias en un mundo material y cultural. Experimentamos la fuerza de la gravedad que nos mantiene fijados al piso; experimentamos la aceleración al caer, y para ello pareciera que no necesitamos tener palabras o conceptos. Pero una vez que esas experiencias pasan por el tamiz de la conceptualización matemática, dejan de ser experiencias corporales y se convierten en conceptos cristalizados en símbolos. Tal es el caso, por ejemplo, de la geometría euclidiana que, aunque es una organización simbólica, puede apreciarse en ella las experiencias sobre el espacio que dieron origen a dicha organización. Decir, por ejemplo, que dos puntos definen una única recta es casi una traducción directa de la experiencia de tensar una cuerda entre las manos.

Las nociones que dieron origen al cálculo tenían y siguen teniendo una contraparte cercana en las experiencias humanas. La recta tangente y el área bajo la curva son más generales que la tangente a una circunferencia o que el área del círculo, pero no parecen necesitar, conceptualmente, una mayor elaboración. La validez de la operatividad que las acompaña sigue de cerca a las nociones originales. No es necesario entrar, digamos, a una discusión sobre la *existencia* del área bajo una curva cuando, claramente, la curva es continua en todo punto. Los pioneros del cálculo, Cavalieri, Fermat, Wallis y, desde luego, Newton y Leibniz, se mantuvieron cerca de esta posición: subordinar la validez a la interpretación de los resultados, basándose en la experiencia y el sentido intuitivo de los mismos. De esa manera mantuvieron la organización formal muy cercana a las ideas de origen. Los símbolos matemáticos desempeñaban el rol de intermediarios entre las ideas y su formalización.

Las críticas al programa de aritmetización que hemos documentado en la primera parte de este trabajo, apuntan justamente a que dicho programa se impulsó desde una epistemología de las matemáticas alejada del naturalismo que animaba a los desarrollos de la primera edad del cálculo. Más adelante podremos regresar al análisis de dicha epistemología, pero de inmediato queremos señalar que ese cambio de marco epistémico, al trasladarse a la enseñanza, generó y sigue generando desequilibrios graves en los procesos de aprendizaje.

Vale la pena traer a colación las siguientes líneas del académico S. Nóvikov (véase la introducción a la obra *Matemáticas Superiores* de Ya. Zeldóvich e I. M. Yaglom, MIR 1982), quien expresa su visión sobre cómo las investigaciones acerca de los fundamentos del análisis matemático han tenido un fuerte impacto *negativo* en el estilo de presentar las ideas centrales a los estudiantes. En palabras de Nóvikov:

> Las definiciones precisas de tales conceptos como, por ejemplo, el número real, límites, la continuidad y otros, representan el resultado de un análisis lógico prolongado y, además, nada trivial de las teorías *ya creadas e intuitivamente claras* a un nivel de rigurosidad propio de las ciencias naturales. Dichos conceptos, nada fáciles para principiantes, se empezaron a *usar de manera irracional*: en los libros de texto precedían a la exposición de la teoría substancial y de la aplicación de ésta, *complicando artificialmente la comprensión de cosas intuitivamente claras*. (Zeldóvich y Yaglom, 1982)

Por su parte, Merlin Donald, en su obra *A Mind so Rare* (2001), arroja luz sobre el problema intuición/formalización desde una perspectiva evolutiva, y concluye con la siguiente observación:

> Hemos sido capaces de construir lenguajes y símbolos, como los que encontramos en las narraciones, en el arte y en las matemáticas. Éstas tipifican el modo simbólico [...] y este lado simbólico de nuestras mentes crea un universo abstracto, finamente definido, que es en gran medida de nuestra propia invención. (Donald, 2001, pp. 154-155)

Estas reflexiones son oportunas, teniendo en cuenta que la mayor parte de la formalización aritmética clásica de la continuidad tiene lugar vía la simbolización logográfica. Ahora bien, señalando la indisociabilidad del conocimiento analógico (implícito, intuitivo) y del conocimiento simbólico, puede advertirse que si bien los símbolos tienen un impacto cristalizador profundo sobre cómo sentimos el mundo, ellos terminan generando la ilusión de ser la fuente de la experiencia misma. Sin embargo, los símbolos no son la fuente exclusiva, primordial, de la experiencia. Más bien, como en un telar, los símbolos y la experiencia son como la trama y la urdimbre de nuestros conocimientos explícitos.

3. LAS RAÍCES DE LA REFERENCIA Y LA NOTACIÓN DEL CÁLCULO

El significado primigenio del cálculo se articula alrededor de una serie de *metáforas sobre el movimiento y la variación*. Esas metáforas controlan la notación: por ejemplo, se habla que una sucesión como de una sucesión de aproximaciones que tienden a un número fijo llamado el límite de la sucesión y eso lo escribimos así: $a_n \rightarrow L$.

La flecha sugiere que los términos sucesivos de la "aproximación" cada vez se "encuentran más cerca" del número L, que transcurre un tiempo antes de que la sucesión "alcance" su límite. Se emplean, además, términos como sucesión (o función) "creciente", "constante". Visualizamos una función como una máquina que transforma el número x que introducimos en la máquina, en otro que sale de la máquina y que se denota $f(x)$. Tenemos, pues, una simbolización asociada a las metáforas de base del cálculo, cargada de sus significados originales pero –y aquí puede estar la raíz de la crítica de Luzin que se ha presentado antes– las definiciones formales que se asocian con esas notaciones son atemporales, desconectadas del movimiento. Bolzano, en su programa de formalización del cálculo, ya insistía en que el movimiento no debía tomarse como una idea matemática. Había razones para ello (como bien explica Nóvikov, entre otros), pero esas razones han sido trasladadas a la enseñanza como justificaciones de un movimiento didáctico y se produce entonces una *ruptura del significado:* las sucesiones ya no son sucesiones de aproximaciones, la sucesión ya no se acerca a su límite, etc., y que llevaron a Vygodskii a escribir que tales ideas quedaban congeladas, *como un bloque de hielo*. Metáforas que en un primer acercamiento desempeñan un papel central en el refinamiento de las ideas enraizadas en el aparato cognitivo de los estudiantes y que ayudan al proceso inicial de simbolización.

Claro, una notación como la flecha → utilizada en la idea de límite como aproximación: $a_n \to L$, puede emplearse porque ya viene "cargada" con un significado. Desde muy temprano, los estudiantes, las personas en general, viven sumergidas en un medio sociocultural donde abundan los símbolos, y lo que esos símbolos significan comunalmente, se aprende allí, en el medio sociocultural. Las personas aprendemos el significado de un símbolo al tiempo que lo asociamos a nuestras propias experiencias primigenias, que también son experiencias fusionadas, como se dijo antes, al medio sociocultural. No podemos separar, pues, el significado sociocultural y el significado "original". Vemos flechas dibujadas y flechas físicas, y todas ellas *indican* una dirección de movimiento. Ése es el significado que se sugiere al estudiante cuando se encuentra ante la notación $a_n \to L$.

Con esa raíz del significado puede elaborarse posteriormente una extensión, una profundización como la del análisis matemático. Pero no de inicio. Esto ocurre no sólo como problema didáctico, sino también entre profesionales. Nóvikov explica (en Zeldóvich y Yaglom, 1982) que, insatisfechos con la literatura matemática de enseñanza, los físicos teóricos consideran como condición *sine qua non* llevar hasta el principiante sus propias ideas sobre la manera cómo un naturalista ha de usar el aparato matemático, así como el procedimiento más sencillo mediante el cual puede apropiarse de los métodos que requiere el naturalista (el físico teórico).

4. EULER: UN MUNDO MATEMÁTICO

La obra de Euler reconcilia el carácter constructivo de las matemáticas con la necesidad de un nivel aceptable de justificación de los asertos matemáticos que se van formulando. Más que definiciones formales, se puede encontrar en su obra *descripciones* sustanciales de los objetos matemáticos, y la manera de operarlos va develando gradualmente su naturaleza.

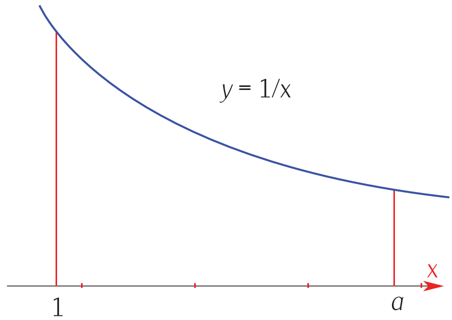
Por ejemplo, los logaritmos de base *e* pueden definirse como las áreas bajo la curva $1/x$. En símbolos matemáticos:

$$\log(a) = \int_1^a \frac{dx}{x}$$

Geométricamente, esto corresponde al área bajo la curva entre $x = 1$ y $x = a$ (figura 1).

Ahora bien, el dominio de la función logaritmo (según Euler) incluye números infinitesimales y números infinitamente grandes. Tomando una cantidad infinitesimal w, tendremos:

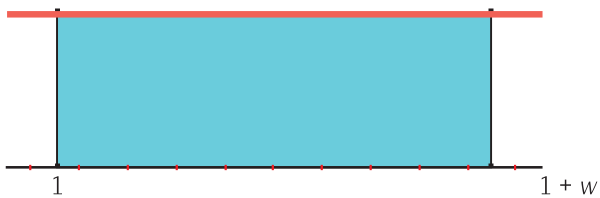
Figura 1



$$\log(1 + w) = \int_{1}^{1+w} \frac{dx}{x}$$

Geométricamente, el área sombreada (figura 2) representa a $\log(1 + w)$.

Figura 2



En efecto, como $1 + w$ se encuentra a distancia infinitesimal de 1, la gráfica de la función entre 1 y $1 + w$ es horizontal y, por lo tanto, el área de interés es un rectángulo (aquí se está aplicando el hecho que para una función continua si la variable independiente varía infinitesimalmente, entonces la variable dependiente [la altura] varía infinitesimalmente: es horizontal), de modo que:

$$\log(1 + w) = w$$

Como la función logaritmo es la inversa de la función exponencial, se tendrá:

$$e^{w} = 1 + w$$

Ahora, para cualquier número finito x, se toma el número infinitamente grande:

$$N = \frac{x}{w}$$

Entonces,

$$e^x = e^{Nw} = (e^w)^N = (1 + w)^N = (1 + \frac{x}{N})^N$$

Tomando los extremos en la expresión anterior, se tiene:

$$e^x = (1 + \frac{x}{N})^N$$

No es necesario ofrecer más ejemplos del modo de operar de Euler con las cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas para captar que, si bien sus procedimientos operatorios pudiesen ser considerados hoy día como "informales", hay una verdad, una corrección profunda en ellos. Constituyen un ejemplo de esa ambigüedad entre intuición y rigor formal, en el sentido que W. Byers da al término ambigüedad (véase *How Mathematicians Think*, Princeton University Press, 2007).

Una de las metas de este trabajo es *problematizar* el aprendizaje: *las matemáticas, en el salón de clases, no pueden ser reducidas al juego de un sistema simbólico con grandes restricciones sintácticas que no parecen obedecer a ninguna base semántica enraizada en la experiencia de quien intenta aprender.* Antiguamente se decía que para enseñarle latín a Juan, había que saber latín, pero también *saber* Juan... No como algo complementario sino tan importante como saber latín. El proceso educativo no puede deslindar el conocimiento, que es el *instrumento* educativo, del ser humano cuya educación está, en gran medida, en nuestras manos.

Aclaremos que se está trabajando en un *modelo de uso* donde se es insensible a la "perturbación" de una cantidad mediante otra que, frente a la primera, es infinitesimal. Es en esa especie de *modelo de uso* donde Euler fabrica sus resultados. Los infinitesimales son como un ojo poderoso que penetra en los ámbitos más recónditos de las funciones y revelan sus secretos. Conviene recordar el punto de vista de Leibniz sobre los infinitesimales, porque deja en claro que muchas de las objeciones contemporáneas sobre estos entes son como misiles mal dirigidos:

> [...] será suficiente hacer uso de ellos *como una herramienta* que tiene ventajas para los propósitos de calcular, de la misma manera que el algebrista trabaja con raíces imaginarias con gran provecho. Lo hacemos porque en ellos [en los infinitesimales] hay a mano una herramienta para calcular, como queda verificado de modo manifiesto <u>con rigor</u> en cada caso mediante el método que ya hemos presentado. (en Ímaz y Moreno, 2010)

Estas líneas dejan ver meridianamente que no hay en Leibniz problema ontológico alguno: los infinitesimales forman parte de un método para calcular en el contexto de un *modelo de uso* cuyos propósitos son desentrañar, inventar... Euler mismo, en la introducción a su libro *Introducción al análisis de los infinitos* (en traducción espléndida al español por la Real Sociedad Matemática Española, 2000), ya lo dice: *desentraño cuestiones harto numerosas* [...] *deduzco soluciones a diversas cuestiones*... Euler asume una actitud epistémica contraria a la platónica y queda claro cuando afirma que:

> Este libro no sólo contiene mucho enteramente nuevo, sino que además señala fuentes de donde pueden extraerse aún muchas insignes *invenciones*.

Es una visión de la actividad matemática distinta a la platónica, en la que el matemático es pasivo: descubre lo que ya existe, no crea. La visión del mundo concomitante con esa época en Europa trae aparejada la historia de muchos descubrimientos: geográficos, científicos (teoría heliocéntrica de Copérnico), médicos (la circulación de la sangre), tecnológicos (la invención de la imprenta, los telescopios, los microscopios). Por lo tanto, no es de extrañar que la cultura europea hubiese asimilado la importancia del descubrimiento por encima de la justificación formal que, en ese momento, aún no constituía el otro polo de una tensión, y que surgiría en el futuro. Debe anotarse que las intuiciones que se construyen desde la práctica de las matemáticas son distintas a aquellas que provienen de nuestra relación con el mundo material. Este señalamiento resalta algo que ya hemos discutido anteriormente: la casi imposibilidad de establecer una separación entre los niveles analógico y analítico en el desarrollo de la cognición humana. Desde luego estamos ahora discurriendo por un nivel diferente, pero nada queda en el olvido: traemos con nosotros nuestra herencia filogenética, aunque hoy se encuentre profundamente transformada por la cultura simbólica.

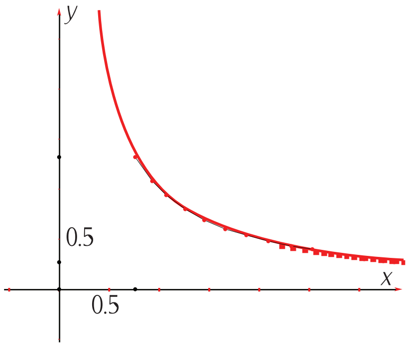
El cálculo florece mediante la continuidad, tal y como la entendemos perceptivamente. En su núcleo gravita la idea de que cada estado de un proceso es tan sólo infinitesimalmente distinto a lo que era un momento antes; como una cinta de una película de cine, en la que el personaje se mueve suavemente en la escena cuando la cinta viene acompañada de su movimiento. Pero si vemos la cinta estáticamente, hay una sucesión de lo que, cada pocos cuadros, parece la misma fotografía. Pero el movimiento revela otra cosa, revela el flujo, con cambios casi imperceptibles, que acompaña a la continuidad. En esa idea podemos encontrar la semilla de la concepción de las curvas como aparece en el texto de L'Hôpital: una curva es una trayectoria poligonal cuyos lados son infinitamente pequeños. Leibniz ya se había hecho a esta idea y lo expresó así:

> Tenemos que entender que hallar una tangente significa trazar una recta que conecta dos puntos sobre la curva que se hallan entre sí a distancia infinitesimal; ello equivale a prolongar uno de los lados del polígono que constituye la curva.

Pero las curvas se concebían además como trayectorias, como objetos que resultan del movimiento. Esa manera de entender las curvas extendía la descripción cartesiana, a saber, que una curva era tal cuando podíamos dar una descripción analítica de ella.

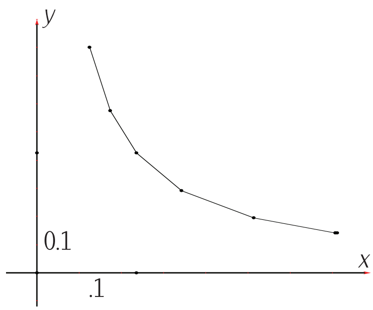
Ahora bien, cuando Leibniz miraba una curva, ¿qué veía? Podría especularse que ante la vista de una curva,

Figura 3



observando a través de su poderoso microscopio conceptual, veía esto:

Figura 4



Es decir, un polígono cuyos lados eran infinitamente pequeños.

Esa idea trasciende todos los marcos de simbolización que podamos imaginar. Ha estado a lo largo del desarrollo del cálculo, siempre presente. ¿Qué aporta entonces de especial la simbolización matemática?

J. Hadamard lo vio claramente cuando expresó:

> La creación de una palabra, o una notación para una clase de ideas puede ser, y lo es a menudo, un hecho científico de mucha importancia, ya que significa crear una conexión entre esas ideas en nuestro nuevo tren de pensamiento. (en Ímaz y Moreno, 2010, p. 22)

La notación de Leibniz/Euler lo muestra de manera elocuente. Ahora, la notación ejerce un control sobre las imágenes conceptuales y permite su exploración. Las ideas fundacionales del cálculo son *ideas enraizadas* en la experiencia del cuerpo humano, no ideas que ya existen más allá de las estrellas, como hubiese preferido Platón.

5. CAUCHY: LA INTUICIÓN GEOMÉTRICA DE LO FORMAL

Durante las primeras décadas del siglo XIX, Cauchy se proponía dejar de lado el método de razonamiento por analogía (como lo practicaba Euler) y, en su lugar, aplicar el *rigor euclidiano*.

Su *Cours d'Analyse*, de 1821, se plantea desde su introducción una meta capital:

> Con respecto a los métodos, he buscado darles todo el rigor que uno requiere en geometría, de modo que nunca haya que recurrir a razones extraídas de la generalidad del álgebra. (en Bradley y Sandifer, 2009)

Cauchy buscaba así abandonar el uso poco claro de los métodos del álgebra, tal y como los había empleado Euler, y más bien recuperar el ideal de Euclides cristalizado en su geometría. Por esta razón, su obra ha sido interpretada tradicionalmente como una introducción de la teoría *rigurosa* de límites (véase, por ejemplo, el libro de J. Grabiner, *The Origins of Cauchy Rigorous Calculus*, Dover, 1981,). Esta interpretación, sin embargo, no es totalmente satisfactoria.

Por ello, vale la pena recordar las palabras de A. Robinson en su libro *Non-Standard Analysis* (New Jersey, Princeton University Press, 1996, edición revisada), en el capítulo sobre la historia del cálculo. Robinson escribe estas líneas hacia 1965:

> Con frecuencia, la historia de cualquier tema se escribe a la luz de los acontecimientos posteriores. Durante más de medio siglo, la historia del cálculo se ha basado en la creencia de que aun cuando la idea de un sistema numérico que contiene infinitesimales pueda ser consistente, resulta inútil para el desarrollo del análisis matemático. En consecuencia, en los escritos de este periodo puede observarse un fuerte contraste entre la severidad con la que se tratan las ideas de Leibniz y sus seguidores y la manga ancha con la que se tratan los errores de quienes propusieron tempranamente una teoría de límites.

Para substanciar más esta tesis, veamos el primer tratamiento del Teorema del Valor Intermedio, dado por Cauchy:

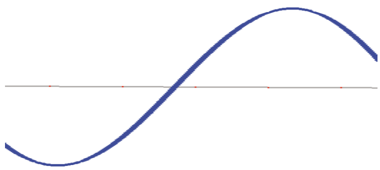
> *Si la función f(x) es continua con respecto a la variable x entre A y B, y si llamamos C a un valor intermedio entre f(A) y f(B), entonces se puede satisfacer la ecuación f(x) = C por al menos un valor de x entre A y B.*

¿Cómo prueba Cauchy este teorema? Veámoslo:

La curva que tiene por ecuación y = f(x) en el plano, y la línea y = C deben encontrarse para algún valor de x entre A y B. Esto es evidente si se satisfacen las hipótesis del teorema. QED.

El argumento es revelador pues de ninguna manera satisface el modelo de prueba rigurosa que la historia ha asociado con Cauchy. Hay que decir que Cauchy dio otras pruebas de este teorema, pero con respecto a la anterior, podría haber sugerido: "Mire la siguiente figura, interprétela y ésa es la prueba":

Figura 5



Hay que decir que la definición de función continua de Cauchy se refiere a una función continua entre A y B. Es decir, *continua en un intervalo*. Hay algo más importante que la prueba misma, y es lo que ella revela sobre la noción que Cauchy tiene de continuidad. La continuidad, para Cauchy, *es la continuidad geométrica que proporciona la intuición*. Si eso es lo que vive en la imagen conceptual de continuidad, entonces no cabe esperar algo radicalmente distinto a lo que Cauchy ofrece como prueba.

Vale la pena mencionar que para Gauss, esa prueba también era suficiente. Basta tomar la gráfica continua en el sentido de un *modelo de uso*: funciones continuas son aquellas cuyas gráficas sean continuas en el sentido que podemos trazar su gráfica sin levantar el lápiz de la hoja.

Más adelante, en un apéndice del *Cours d'Analyse*, Cauchy ofrece otra demostración que brevemente podemos describir como el método de la *bisección del intervalo* para ir produciendo dos sucesiones que van a converger al valor x tal que $f(x) = C$. Esta demostración se apoya en el hecho de que una sucesión creciente y acotada es convergente. Claro, ni Cauchy ni sus contemporáneos estaban en condiciones de demostrar este hecho, pues desde la intuición del continuo geométrico era evidente. La continuidad NO era un problema aritmético en ese entonces. Ahora bien, desde el punto de vista de un (futuro) continuo aritmético, requiere de la completez de los números reales. Citaremos a Dedekind a este respecto líneas adelante.

La labor de Cauchy puede describirse como un trabajo de sistematización basado en el *continuo euclidiano*. No se le puede atribuir "deficiencias" como las que frecuentemente se le atribuyen a Euclides cuando se le juzga *desde hoy*, es decir, desde un marco conceptual inexistente en su tiempo. Podemos cerrar esta sección afirmando que Cauchy es al cálculo, lo que Euclides es a la geometría: su sistematizador. Con ello, *objetivó* el cálculo como campo de exploración matemática. Es decir, no ya para emplearlo como una herramienta de exploración sino para explorarlo por sí mismo. Desde el punto de vista educativo, eso tendría, al día de hoy, consecuencias nefastas. No nos cabe duda de que ése es el sentido de las palabras de Luzin.

6. UNA RUPTURA EN EL SENO DE LAS MATEMÁTICAS

Durante el siglo XIX tuvieron lugar varios episodios, tanto matemáticos como epistemológicos (filosóficos), que cambiaron el rumbo de las matemáticas. Uno de esos episodios fue la creación de las geometrías no-euclidianas. Hasta ese momento, las matemáticas se fundamentaban casi exclusivamente en la convicción de que sus resultados se correspondían íntimamente con hechos del mundo físico. Era una tradición que venía desde los griegos, cuya geometría postulaba *verdades evidentes en sí mismas*. Por lo tanto, lo que se podía deducir de esos postulados eran *verdades* matemáticas. Los teoremas eran verdades sobre el mundo natural. Fourier mismo, en sus trabajos sobre las series que llevan su nombre, afirmaba que el mundo natural no solamente era una fuente de inspiración por excelencia para la creación matemática, sino que *legitimaba* sus hallazgos. Las geometrías no-euclidianas rompieron con esa convicción: los teoremas de la geometría euclidiana, ante la presencia de otros sistemas axiomáticos que parecían libres de inconsistencias –y que más tarde se demostró que, en efecto, eran tan consistentes como la propia geometría euclidiana–, fueron perdiendo esa aura de veracidad absoluta y terminaron constituyendo, como los teoremas de las otras geometrías, *modelos* del espacio. Hoy día resulta difícil imaginar el efecto tan perturbador que pudo tener una situación como ésta para los matemáticos de su momento. Por otra parte, los estudios sobre las series infinitas encendieron los focos rojos en el seno mismo del cálculo. Las series de Fourier ya habían llenado de perplejidad a muchos investigadores, quienes empezaban a ver un panorama con zonas de penumbra. Uno de ellos, N. Abel, escribía en 1826 al profesor C. Hansteen que muy pocos teoremas del análisis habían sido demostrados con apego a los principios lógicos. No hace falta añadir más testimonios para comprender que en el seno mismo de las matemáticas se había resquebrajado una convicción –que las matemáticas eran tan consistentes como la propia naturaleza– y empezaba a gestarse otra: la validez de los resultados la garantiza el rigor lógico.

Es en esa atmósfera donde adquiere naturalidad el recuento de Dedekind en la introducción de su obra *Ensayos sobre la teoría de números*, publicada en 1872 (publicado por Dover, 1963) pero cuya gestación venía de 1858, cuando Dedekind era profesor en Zurich. En ese entonces, a Dedekind le tocó impartir clases sobre cálculo, y en cierto momento tenía que emplear el hecho de que *una sucesión creciente y acotada es convergente*. Y escribe al respecto:

> Al discutir esta noción, me veía obligado a recurrir a la evidencia geométrica. Aún ahora, recurrir a la intuición geométrica en un primer curso de cálculo es muy útil desde el punto de vista didáctico, y aun indispensable si no se quiere perder mucho tiempo. Pero no se puede decir que esta presentación del cálculo sea científica, por lo que me propuse meditar en esta cuestión hasta alcanzar una solución puramente aritmética y perfectamente rigurosa para los principios del análisis infinitesimal.

En muy pocas líneas, Dedekind revela no sólo una nueva concepción de las matemáticas sino que, además, explicita que las matemáticas y su didáctica tienen necesidades diferentes. Sería de desear que hoy en día hubiese el mismo grado de sensibilidad por los problemas de la enseñanza. La didáctica de las matemáticas es una disciplina que no tiene que subordinar sus líneas de investigación a las líneas de las matemáticas.

Actualmente seguimos teniendo el mismo problema que describe Dedekind, sólo que las inercias que invaden el terreno de la enseñanza privilegian la presentación "científica" y se olvidan que para la enseñanza, como se encargó de evidenciar R. Thom en 1972, *más que el rigor es la construcción del sentido lo que debe privilegiarse en la enseñanza*.

Afortunadamente existen otros caminos que pueden conciliar las intuiciones fundamentales con una mayor precisión conceptual. Intentaremos, en lo que sigue, dar algunos atisbos del que pretendemos seguir.

7. UNA RESPUESTA DIGITAL

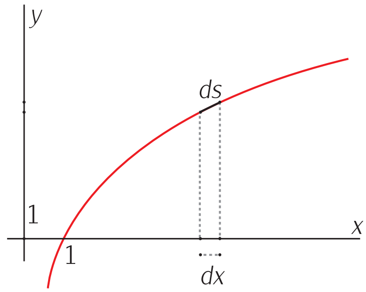
Como ya hemos advertido, las metáforas del movimiento *controlan* la notación básica del cálculo, que florece en la continuidad.

Las experiencias sensoriales sobre lo continuo son muy diversas, desde pasar la mano suavemente sobre una superficie pulida, hasta la estimación de la variación de temperatura de un líquido que se calienta al fuego lentamente. Si tuviésemos ante nosotros una cinta de video, veríamos una sucesión de fotografías casi idénticas una a la siguiente. Al activarla, las fotografías que aparecían estáticas, ahora adquieren movimiento. La persona que parecía de pie, ahora camina, y su movimiento fluye continuamente a lo largo de un camino. Así, al animar una secuencia discreta de fotografías, se produce la imagen continua de una persona que camina.

El medio digital permite conjugar lo discreto con el movimiento y, de ese modo, proporciona modelos adecuados de la variación que poseen los procesos temporales propios del cálculo. *Eso es algo nuevo*.

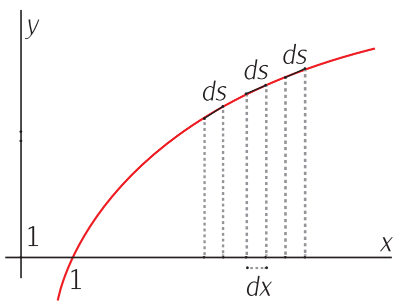
Una curva puede concebirse como un polígono cuyos lados son infinitesimales. El medio digital permite al estudiante ***ver*** una versión (metafórica) de esta afirmación:

Figura 6 Segmento infinitesimal



Uno puede deslizar el segmento *ds* (que forma parte de la recta tangente) y percibir cómo describe la curva. Desde luego, nada sustituye la experiencia de hacerlo frente a una pantalla digital. El hecho de que la versión que se experimenta sea metafórica no disminuye la sensación perceptiva de que, en efecto, la curva se construye con esos segmentos infinitesimales. No se trata del problema ontológico, sino del problema epistemológico, se trata de cómo podemos trabajar con los estudiantes (y profesores en servicio) para indicar una dirección de desarrollo más coherente con las experiencias e intuiciones primarias que se tienen sobre la variación y la acumulación. Activando la **traza** (*trace*), que es una prestación del medio digital, podemos arrastrar *ds* y observar cómo su trazo cubre la curva. El medio digital permite apreciar lo que es una *definición en acción* (figura 8).

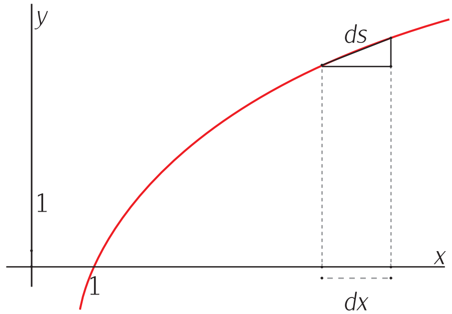
Figura 7 Curva como polígono



Desafortunadamente, la narrativa basada en imágenes estáticas, ya lo dijimos, es insuficiente para traducir al texto, la fuerza del proceso dinámico que se despliega ante nuestros ojos. De hecho, el movimiento es una dimensión que aquí está ausente pero que fluye a través de la imagen dinámica.

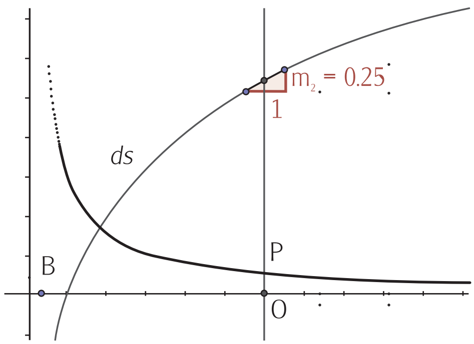
Ahora es casi inmediato completar la figura y obtener el triángulo de Leibniz para medir la pendiente de la curva en cualquier punto.

Figura 8 Pendiente de la curva



Una vez que el medio digital nos permite calcular la pendiente en cualquier punto de la curva, deslizando la abscisa correspondiente sobre el eje *x*, vemos aparecer ante nuestros ojos la gráfica de la función derivada (el trazo más grueso en la figura 9). Pero uno puede empezar con la curva de trazo grueso y re-interpretar la curva inicial como la integral de la primera. La figura, pues, contiene un diálogo entre la integral y la derivada, es decir, es un germen del teorema fundamental del cálculo.

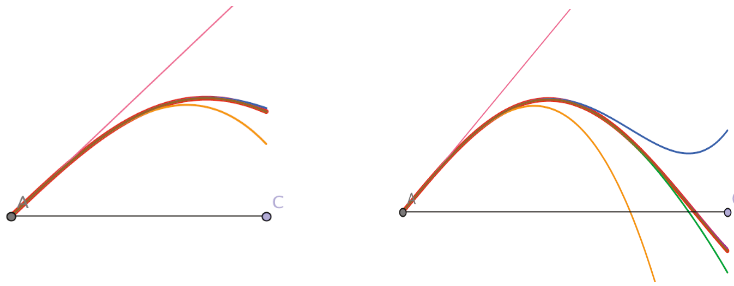
Figura 9 Gráfica de la derivada



El medio dinámico digital nos permite *recuperar*, a través del movimiento, una representación analítica de los objetos básicos del cálculo. De hecho, la infraestructura dinámica subsume en ella el movimiento y, con ello, acerca el cálculo a sus ideas fundacionales.

Finalmente, presentemos una secuencia didáctica que causa siempre un impacto mayúsculo. Se trata de las aproximaciones mediante los polinomios de Taylor de una función. De nueva cuenta, el medio dinámico ofrece una capacidad expresiva que está ausente en el medio tradicional. Se trata, por supuesto, del movimiento y la naturaleza ejecutable de las representaciones digitales.

Figura 10 Aproximaciones de Taylor

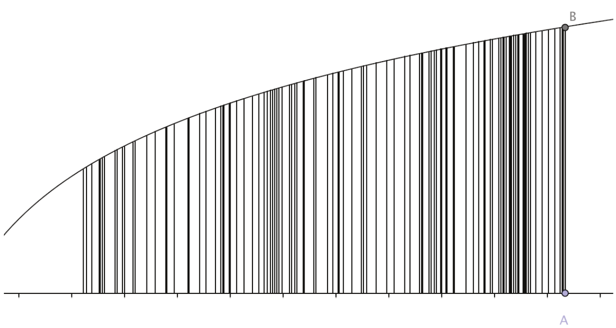


En esta exploración, los estudiantes eligen una función (en este ejemplo, es la función seno) y los primeros polinomios aproximadores. Partimos, en la experiencia viva, de una posición del punto C muy cerca de A. Entonces, arrastramos el punto C hacia la derecha y vemos cómo a medida que va fluyendo la gráfica de la función, van fluyendo sucesivamente los polinomios aproximadores. La experiencia tiene un valor estético considerable y pone de manifiesto que a medida que el grado del polinomio de Taylor es mayor, entonces permanecerá como representación de la función durante más tiempo.

La experiencia anterior es similar a una experiencia numérica que los estudiantes ya conocen: la aproximación de un número mediante su expresión decimal. En cuantos más dígitos empleemos, la aproximación será más precisa.

Hemos presentado tan sólo unos pocos ejemplos, pero desde luego es posible ir mucho más lejos, por ejemplo, para explorar cómo la integración no es algo distinto al movimiento, pues coincide con el área barrida por la función cuando la representamos mediante el segmento vertical que conecta su abscisa x con $(x, f(x))$, como se aprecia en la figura 11.

Figura 11 Área barrida



El medio dinámico empleado es un mediador semiótico. Como es el caso con cualquier artefacto de mediación, éste no es epistemológicamente neutro. Es decir, el conocimiento que se adquiere no es independiente del mediador. Aunque en este trabajo no abundemos en ello, esta idea tiene consecuencias profundas para la reconceptualización del conocimiento que intentamos desde la mediación digital.

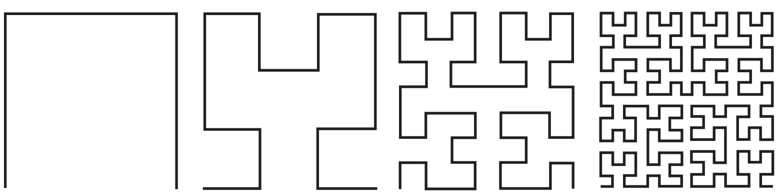
Los objetos matemáticos adquieren estabilidad mediante sus representaciones semióticas. Una vez que se añade una nueva representación, el objeto en cuestión se transforma y las posibilidades de intervención sobre él aumentan. Esto ocurre en especial mediante las representaciones digitales ejecutables. El objeto matemático siempre *está en construcción*, pues es inseparable de sus representaciones semióticas.

Hoy en día estamos presenciando la migración de los objetos matemáticos hacia los medios digitales y con ello se está produciendo, ante nuestros ojos, una transformación epistémica que afecta lo que ocurre y ocurrirá en las escuelas, en cada salón de clases. En el caso del cálculo, hemos intentado mostrar cómo el movimiento que se torna una dimensión del objeto es infraestructural al medio. Se pudo apreciar, por ejemplo, en la reacción del medio al arrastre del punto A en el ejemplo de la aproximación de Taylor.

El cálculo es un cuerpo heredado de conocimientos y durante su desarrollo se han empleado, casi siempre, sistemas de representación predigitales. Como ya se ha dicho, cada uno de estos sistemas de representación tiene un impacto epistémico definido. Como parte sustancial del proyecto de investigación que anima este escrito, consideramos los objetos que pueden representarse estática y dinámicamente como objetos *híbridos*. Esa naturaleza híbrida que permite apreciar su comportamiento en dos *atmósferas* distintas revela características del objeto que permanecían *calladas o que emergen gracias al nuevo sistema de representación*.

A medida que transcurre el nuevo siglo, los sistemas digitales de representación van adquiriendo una presencia más intensa. Ahora bien, así como hablamos de objetos híbridos también debemos hablar de *estrategias de transición*. Tomemos, por ejemplo, la curva descrita por Hilbert en 1891 (http://en.wikipedia.org/wiki/File:Hilbert_curve.gif). En su versión digital, la curva recupera su naturaleza dinámica.

Figura 12 Curva de Hilbert



En realidad se trata de un proceso iterativo que va construyendo la curva que llena el cuadrado. La idea de Hilbert requirió en su momento de una demostración analítica compleja que alejó una construcción muy intuitiva del alcance de los estudiantes. Hoy en día, empero, podemos recuperar la belleza profunda del ejemplo mediante su migración digital: *dada una resolución de la pantalla, existe un paso en el proceso iterativo que llena esa pantalla*. En la figura 12 hemos presentado los primeros cuatro pasos del proceso iterativo. Cuando vemos la dinámica del proceso en su encarnación digital, entendemos mejor lo que significa el teorema. El problema no es de rigor sino de significado matemático. La versión digital lo otorga.

Tal vez estemos ante una puerta que lleva al futuro del cálculo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Borovik, A. (2010), *Mathematics under the Microscope*, Providence, American Mathematical Society.

Bottazzini, U. (1986), *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Nueva York, Springer-Verlag.

Bradley, R. E. y C. E. Sandifer (2009), *Cauchy's Cours d'Analyse*: *An Annotated Translation*, Nueva York, Springer.

Demidov, S. S. y A. Shenitzer (2000), "Two letters by N. N. Luzin to M. Ya. Vygodskii", *The American Mathematical Monthly*, vol. 107, núm. 1, pp. 64-82.

Donald, M. (2001), *A Mind so Rare: The Evolution of Human Consciousness*, Nueva York, Norton.

Edwards, C. H. (1979), *The Historical Development of the Calculus*, Nueva York, Springer-Verlag.

Euler, L. (1988), *Introduction to Analysis of the Infinite*, trad. de J. D. Blanton, Nueva York, Springer-Verlag.

Gordon, E., A. G. Kusraev y S. S. Kutateladze (2002), *Infinitesimal Analysis*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Grabiner, J. (1983), "Who gave you the Epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus", *The American Mathematical Monthly*, vol. 90, núm. 3, pp. 185-194.

Ímaz, C. y L. Moreno (2010), *La génesis y la enseñanza del cálculo, las trampas del rigor,* México, Trillas.

Klein, F. (1896), "The arithmetizing of mathematics", *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 2, núm. 8, pp. 241-249.

——— (2004), *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis*, trad. de E. Hedrick y C. Noble, Nueva York, Dover Publications, Inc. (traducido de la 3a. ed. en alemán, 1932, Nueva, Macmillan).

Kleiner, I. (2001), "History of the infinitely small and the infinitely large in calculus", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 48, núm. 2-3, pp. 137-174.

Lakoff, G. y R. E. Núñez (2000), *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Nueva York, Basic Books.

Pierpont, J. (1899), “On the arithmetization of mathematics”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 5, núm. 8, pp. 394-406.
Poincaré, H. (2003), *Science and Method*, Nueva York, Dover Publications.
Robinson, A. (1966), *Non-Standard Analysis*, Amsterdam, North-Holland Publishing.
Roh, K. H. (2008), “Students’ images and their understanding of definitions of the limit of a sequence”, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 69, pp. 217-233.
Struik, D. J. (1987), *A Concise History of Mathematics*, Nueva York, Dover Publications.
Thom, R. (1973), “Modern mathematics: does it exist?”, en A. G. Howson (ed.), *Developments in Mathematical Education. Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education*, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 159-209.
Toeplitz, O. (2007), *The Calculus: A Genetic Approach*, Chicago, University of Chicago Press.

DATOS DEL AUTOR

Luis Moreno Armella
Departamento de Matemática Educativa,
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional, México
lmorenoarmella@gmail.com

Vínculo entre la modelación y el uso de representaciones en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y de solución

María Trigueros

Resumen: En este artículo se describirá el papel del uso de la modelación en el cambio en la comprensión, por parte de los estudiantes, del concepto de ecuación diferencial y del de solución. La descripción del diseño y de los resultados de la investigación se hará con base en la teoría APOE. En particular se describirán los resultados relacionados con el uso de distintas representaciones que desempeñan un papel importante en el desarrollo de los modelos de los estudiantes y aquellos conceptos que parecen desempeñar un papel importante en los cambios de comprensión de los estudiantes.

Palabras clave: modelación, ecuaciones diferenciales, teoría APOE, representaciones, comprensión.

Abstract: The goal of this paper is to describe how the use of modeling in a differential equations course contributes to foster a change in students' understanding of first order differential equation and solution set. The design and results of a research experience based on APOS theory are presented. The focus of the paper is the description of those results related with the use of different representations and others that seem to play an important role in the changes observed in students' understanding.

Keywords: modeling, differential equations, APOS theory, representations, understanding.

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales constituyen uno de los cursos con mayor número de aplicaciones tanto en las licenciaturas de matemáticas como en las de ingeniería o de economía. Es, además, un curso en el que los desarrollos recientes de la investigación en matemáticas y el desarrollo de la tecnología imponen, en principio, el diseño de nuevas estrategias didácticas. A pesar de los esfuerzos hechos por algunos autores de presentar una visión moderna de este importante tema de las matemáticas (por ejemplo, Blanchard, Devaney y Hall, 1998), muchos cursos de ecuaciones diferenciales siguen orientados a la enseñanza de las técnicas de solución, y las aplicaciones consisten en ejercicios cerrados cuyo objetivo es el uso de dichas técnicas. Este artículo se enmarca dentro de un proyecto de investigación que intenta contribuir a la reflexión sobre este

Fecha de recepción: 22 de agosto de 2013; fecha de aceptación: 7 de octubre de 2013.

problema tomando como marco teórico la teoría APOE. Aquí se presenta únicamente una parte de los resultados del proyecto: aquéllos obtenidos del análisis del trabajo en clase.

ANTECEDENTES

Sobre el uso de la modelación en la enseñanza

La comunidad de investigación en educación matemática ha mostrado que en los últimos 20 años ha habido un gran interés por el uso didáctico de los modelos (Lesh y Doerr, 2003; Zandieh y Rasmussen, 2010; Busse, 2011; Niss, 2012). Los resultados de algunos estudios sobre este tema refieren que la modelación puede ser enseñada a distintos niveles de escolaridad y que es una herramienta para motivar y favorecer el aprendizaje de las matemáticas cuando se trabajan problemas interesantes y actividades guiadas por el profesor para apoyar el aprendizaje (Maass, 2006; Blum et ál., 2007; Trigueros, 2008a; Trigueros y Possani, 2013). Otros estudios previenen que, si bien el conocimiento de las matemáticas es necesario para que los estudiantes puedan desarrollar y trabajar con modelos, no es suficiente para lograrlo (Stillman, 2002; Kaiser y Maass, 2007; Niss, 2012).

Sobre las ecuaciones diferenciales

La investigación acerca del aprendizaje y la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias ha estado presente en la investigación en educación matemática desde hace muchos años. Algunos autores trabajaron este tema desde el ámbito de la matemática en contexto. Por ejemplo, Camarena (1987) llevó a cabo el análisis y desarrollo de un curso relacionado con los circuitos eléctricos para favorecer el interés y la motivación de los estudiantes, y Artigue (1989) cuestionó los contenidos de los cursos tradicionales a la luz de los desarrollos en la propia matemática y de los soportes tecnológicos que facilitan herramientas poderosas para el trabajo con las ecuaciones diferenciales.

Las investigaciones más recientes ponen énfasis en la comprensión de las ecuaciones diferenciales ordinarias, las dificultades que se presentan a los estudiantes, la posibilidad de interpretación del conjunto solución de una ecuación diferencial a través del uso de diferentes representaciones, el papel de las condiciones iniciales y el papel de los parámetros que pueden aparecer en ellas (Trigueros, 2004; Kwon et ál., 2005; Dana-Picard y Kidron, 2007; Donovan, 2007).

En los últimos años, el interés por el uso de problemas reales en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias ha surgido con fuerza (Kwon et ál., 2005; Chaachoua y Saglam, 2006; Rowland, 2006; Rasmussen y Blumenfeld, 2007; Trigueros, 2008a). Los resultados de estas investigaciones señalan que, cuando se propone a los estudiantes trabajar en problemas abiertos y el profesor desempeña el papel de guía y sugiere actividades específicas surgidas del propio problema o en relación al problema, los estudiantes desarrollan métodos de análisis de las ecuaciones y plantean preguntas que pueden ser aprovechadas para superar las dificultades encontradas en la literatura, para desarrollar herramientas de análisis y para apoyar el desarrollo de su conocimiento sobre este tema de las matemáticas.

Este artículo intenta contribuir en esta dirección, enfocando las posibilidades del uso de modelos en la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en la construcción y evolución del conocimiento de los estudiantes. Se utiliza con este fin la teoría APOE (Arnon et ál., 2013), que ha mostrado ser de gran utilidad en investigaciones relacionadas con la construcción de conocimiento matemático en alumnos universitarios y se ilustra con el trabajo en clase de un modelo específico.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

¿Qué resultados se obtienen, en términos de aprendizaje, cuando se utilizan problemas de modelación en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales? En particular, ¿qué aspectos del conocimiento de los estudiantes pueden recuperarse cuando se utilizan modelos en la clase? ¿Es posible que los estudiantes desarrollen técnicas nuevas asociadas a las ecuaciones diferenciales ordinarias?

MARCO TEÓRICO

La teoría APOE (Arnon et ál., 2013) trata de la construcción del conocimiento matemático mediante el uso del mecanismo de *abstracción reflexiva*. En ella, la construcción del conocimiento inicia con la realización de acciones sobre objetos matemáticos conocidos. Una *acción* es una transformación de un objeto mental siguiendo una o varias reglas específicas que el estudiante considera como externas. Conforme el individuo reflexiona sobre sus acciones, éstas pueden ser interiorizadas en un *proceso*. En este caso, cada paso de la trasformación puede describirse sin necesidad de hacerla. Cuando el individuo reflexiona sobre el proceso, y en particular cuando tiene la necesidad de aplicar acciones sobre un proceso, toma conciencia de él y lo encapsula en un *objeto*. Un *esquema* se considera como una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que se sintetizan para formar estructuras matemáticas útiles en la solución de problemas. Estos esquemas pueden evolucionar conforme se construyen relaciones entre sus componentes, de manera que los esquemas cambian dinámicamente construyéndose y reconstruyéndose.

La evolución de los esquemas se describe mediante los niveles de la *triada:* el nivel Intra- se caracteriza por el enfoque en estructuras aisladas de otras estructuras de naturaleza similar. En el nivel Inter- se construyen relaciones y transformaciones entre los componentes del esquema, se agrupan y se pueden identificar con el mismo nombre. En el nivel Trans- se construyen síntesis entre los componentes del esquema que permiten entender las relaciones construidas con anterioridad y decidir cuándo el esquema es aplicable a una situación particular. Puede pensarse que la teoría APOE describe una progresión lineal de construcción de estructuras; sin embargo, lo que realmente sucede es que hay una progresión dialéctica en las construcciones en la que puede haber desarrollos parciales, transiciones y regresos de una a otra de ellas (Czarnocha, Dubinsky, Prabhu y Vidakovic, 1999). Lo que la teoría afirma es que la forma en que un estudiante trabaja con distintas tareas matemáticas relacionadas con un concepto, puede interpretarse mediante el tipo de estructuras que ha construido.

La aplicación de la teoría APOE requiere del diseño de un modelo teórico de análisis: la *descomposición genética*. Éste es un modelo hipotético de la forma en que los conceptos matemáticos en cuestión se construyen. En la descomposición genética se describen las construcciones mentales específicas que deben hacerse para desarrollar un determinado concepto matemático y sus relaciones. Este modelo no es único; varios modelos pueden coexistir. Aquí, lo importante es que, una vez propuesta, la descomposición genética sea puesta a prueba mediante la investigación con estudiantes que aprenden dicho concepto. Los resultados de las investigaciones pueden dar cuenta de construcciones que no se tomaron en cuenta en la descomposición genética, y de ser así, el modelo debe refinarse.

La descomposición genética se utiliza también como base de la metodología de la teoría APOE en la investigación y en la enseñanza. Con base en ella se construyen instrumentos que permiten al investigador determinar si las construcciones que predice se presentan en el trabajo de los estudiantes y, de acuerdo a ello, aceptarla, rechazarla o refinarla.

La teoría APOE cuenta, además, con un modelo de enseñanza conocido como el ciclo ACE (actividades, discusión en clase, ejercicios). Para utilizarlo, es necesario diseñar actividades a la luz de la descomposición genética para trabajar con los estudiantes.

La construcción de los conceptos en la teoría APOE inicia generalmente con la realización de acciones sobre objetos matemáticos previamente construidos. Pero, aunque no se ha hecho mucha investigación al respecto, es posible iniciar dicha construcción partiendo de acciones sobre otro tipo de objetos mentales, no directamente ligados a las matemáticas pero que pueden jugar un papel importante en la construcción de los conceptos de interés. Esta idea se ha utilizado recientemente en clases en las que se introducen problemas de modelación para iniciar y regular dicha construcción, conjuntamente con actividades diseñadas con la descomposición genética (por ejemplo, Trigueros y Possani, 2013). La mayor parte de los estudios realizados en esta línea han utilizado una propuesta teórica acerca de la modelación, la llamada modelos y modelación, para asegurar que los problemas utilizados satisfacen las condiciones necesarias para ser didácticamente efectivos (Lesh et ál., 2000). Sin embargo, a partir de una reflexión acerca de la posible descripción del proceso de modelación en la teoría APOE (Trigueros, 2008b), se ha prescindido del uso de otra teoría al considerar que la problemática presentada a los estudiantes favorezca su actividad y la posibilidad de poner en juego objetos extramatemáticos y matemáticos sobre los cuales sea posible ejercer acciones e iniciar un proceso que favorezca la evolución de su conocimiento.

En la investigación antes mencionada se hace un primer acercamiento a la respuesta de la siguiente pregunta: ¿Puede describirse el proceso de modelación utilizando la perspectiva de la teoría APOE? En este trabajo se refina de la siguiente manera: Cuando los estudiantes se enfrentan a una situación de modelación, utilizan sus esquemas matemáticos conjuntamente con los esquemas que han construido en otros dominios del conocimiento y que pueden ser útiles en la solución de los problemas que afrontan. Los estudiantes toman de estos esquemas las construcciones necesarias para abordar el problema, seleccionar las variables y formular implícita o explícitamente las primeras hipótesis acerca del comportamiento de la solución al problema y su posible simplificación en términos matemáticos. Aprovechando las hipótesis, es posible hacer acciones sobre las variables y establecer relaciones entre ellas. Estas acciones se interiorizan en procesos mediante los cuales las relaciones se manipulan y se transforman. Los procesos se coordinan con procesos contenidos en los esquemas matemáticos. El resultado de estas coordinaciones es un modelo emergente que puede ser encapsulado como un objeto sobre el cual es posible hacer nuevas acciones que permiten, cuando se interiorizan o encapsulan, analizarlo, determinar sus propiedades y plantear nuevas preguntas que podrían modificar el modelo. Durante el trabajo con el modelo, puede ser necesario construir nuevos procesos, objetos o esquemas para responder las preguntas que se han planteado. Este ciclo puede repetirse hasta que se encuentra un modelo que se considera apropiado en términos de la descripción de la situación original. El trabajo en el modelo permite, además, plantear otras preguntas que posibilitarían ampliar el dominio de aplicación del modelo y los esquemas construidos.

Cuando la modelación se utiliza como una estrategia docente, es necesario apoyar a los estudiantes en la construcción de nuevos conceptos útiles para profundizar en la solución de los problemas asociados con el modelo. Este apoyo puede lograrse mediante la introducción de actividades conceptuales basadas en la descomposición genética del concepto o tema relacionado con esa solución.

Acorde a la forma de trabajo que el uso de la teoría APOE impone para la investigación, en este proyecto se utilizó una descomposición genética para los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y conjunto solución de dicha ecuación. A continuación se presenta la descomposición genética que se utilizó como guía en este proyecto de investigación (Trigueros, 2008b). Es importante destacar que en esta investigación no se toman en consideración todas las construcciones que el modelo incluye, sino sólo aquellas relacionadas con la parte específica de interés en este reporte.

Descomposición genética de la solución de una ecuación diferencial

Para construir el esquema de "solución de una ecuación diferencial de primer orden" es necesario haber construido previamente los objetos: conjunto, variable, ecuación algebraica, derivada de una función real de variable real, integral de una función de variable real, así como el esquema de función.

Los procesos de variable real, de derivada y de ecuación se pueden coordinar para construir un proceso en el que es posible considerar como una ecuación una expresión que relaciona una función con su derivada y en la que la incógnita es la función. Este proceso se puede encapsular en el objeto "ecuación diferencial". Sobre este objeto pueden aplicarse acciones tales como clasificar distintas ecuaciones diferenciales de acuerdo a sus propiedades, por ejemplo, en autónomas o no autónomas, lineales, etc.

Para construir el objeto solución de la ecuación diferencial se necesita hacer acciones para verificar si una función dada es solución o no de una ecuación dada. Estas acciones se interiorizan en un proceso en el que se pueden considerar todas las posibles funciones que son solución de una ecuación diferencial dada de primer orden. Este proceso se coordina con el proceso de conjunto para construir todas las funciones que son solución de la ecuación diferencial, y este proceso se puede encapsular en el objeto "conjunto solución".

Con el fin de encontrar las soluciones de una ecuación diferencial es necesario hacer acciones sobre la ecuación diferencial. Estas acciones pueden consistir en iteraciones que utilizan como punto de partida la condición inicial, y en las que se utiliza la derivada como razón de cambio, como objeto, para aproximar un nuevo punto de la solución de la ecuación diferencial (acciones numéricas). Cuando los estudiantes repiten estas acciones tomando el punto resultante como punto de inicio, es posible construir una tabla en la que se muestran distintos puntos que pertenecen de manera aproximada a la función solución de la ecuación diferencial. Estas acciones se interiorizan en un proceso que permite la aproximación de la solución de la ecuación a partir de una condición inicial dada.

Por otra parte, es posible hacer la acción de tomar un punto del espacio y utilizar la ecuación diferencial para calcular la derivada en él, y también la acción de representarla como un segmento de recta en un plano cartesiano (acciones gráficas). Cuando estas acciones se repiten en distintos puntos del plano, se interiorizan en un proceso que permite considerar todos los segmentos de recta que se podrían construir de esta manera y construir así una representación del campo de tangentes de la ecuación. Este proceso se puede coordinar con el proceso de construcción de las curvas tangentes a estos segmentos y considerar estas curvas como una representación gráfica del conjunto solución de una ecuación diferencial dada.

Una tercera construcción a seguir consiste en las acciones que conducen a la integración de una ecuación diferencial, cuando es posible, para encontrar la familia de soluciones posibles o una curva específica en el caso de contar con las condiciones iniciales. Estas acciones se pueden interiorizar en un proceso para encontrar el conjunto solución de una ecuación diferencial dada.

Todos estos procesos se coordinan en otro proceso que permite considerar flexiblemente el conjunto solución de la ecuación diferencial en distintas representaciones, y se pueden encapsular en un objeto "conjunto solución de una ecuación diferencial", sobre el cual es posible aplicar acciones para considerar sus propiedades. Un ejemplo sería, en el caso de ecuaciones lineales, demostrar que la solución general puede descomponerse en la solución de la ecuación homogénea asociada y una solución particular.

Estos procesos pueden relacionarse entre ellos, con el objeto ecuación diferencial y con el objeto conjunto solución para formar un esquema "ecuación diferencial de primer orden".

METODOLOGÍA

La investigación se llevó a cabo en un curso de sistemas dinámicos (ecuaciones diferenciales) para estudiantes de matemáticas aplicadas y actuaría a nivel universitario. El problema planteado a los estudiantes fue el siguiente: una profesora, preocupada por la tendencia actual en la enseñanza y por el problema del manejo de información de los estudiantes, nos pide hacer un estudio sobre la memorización y el olvido a corto plazo. Le interesa, en particular, un reporte en el que quede claro el tiempo que una persona puede retener información aprendida, el tiempo que tarda en olvidarla y cuáles son los factores de los que esto depende.

A partir de la descomposición genética presentada anteriormente, el investigador, conjuntamente con dos profesores, diseñó las primeras actividades para guiar la intervención del profesor, las cuales pondría en práctica en el aula con el fin de promover la reflexión de los estudiantes. Nuevas actividades, con la misma finalidad, se diseñaron en el transcurso de la instrucción, conforme los estudiantes trabajaban en el modelo y de acuerdo a las necesidades conceptuales que surgían de su trabajo.

Los estudiantes trabajaron en grupos de tres participantes; todos los documentos producidos por ellos durante los distintos ciclos de modelación fueron copiados para su análisis. Se grabaron en audio las discusiones y se diseñó una herramienta de observación y evaluación que se utilizó a lo largo del trabajo en el modelo, incluyendo las fases de trabajo en equipo y la discusión en grupo con el profesor. Estos documentos fueron analizados por el investigador y discutidos con el profesor para negociar los resultados del análisis como método de triangulación.

El trabajo en el problema requirió de varios ciclos de modelación (incluidos en el ciclo de enseñanza ACE). Todos los datos provenientes de los instrumentos antes mencionados, utilizados en el transcurso de las clases en que se trabajó en el modelo, se usaron para estudiar la evolución de las construcciones de los alumnos en términos de la descomposición genética.

El trabajo sobre el problema original permite poner en juego un modelo matemático con el cual pueden hacerse dos tipos de actividad: una que da lugar a un modelo matemático y otra en la que las acciones sobre el modelo, libres o guiadas mediante actividades, hacen posible la actividad matemática que posteriormente permitirá regresar al modelo y trabajarlo aprovechando los nuevos conceptos matemáticos construidos.

El análisis del trabajo de los estudiantes es un componente importante del análisis de resultados. De esta manera se detecta lo que los estudiantes desarrollan en el contexto del problema y aquello que permite promover una reflexión más general que dé lugar a la evolución de su conocimiento matemático de acuerdo a la descomposición genética. Es claro que en un artículo como éste resulta imposible presentar un análisis exhaustivo, por lo que se presenta una descripción esquemática que pone énfasis en los ciclos de modelación y los resultados más importantes detectados en cada uno de ellos. Así, el artículo cumple el propósito de mostrar cómo surgen y evolucionan los modelos de los estudiantes, al tiempo que ilustra los aspectos relevantes de la construcción del conocimiento matemático por parte de los alumnos y la forma en que emergen ideas matemáticas relevantes en la construcción de ese conocimiento.

RESULTADOS OBTENIDOS DE LOS CICLOS DE LA MODELACIÓN

1) Exploración gráfica

Al enfrentar el problema, los estudiantes evocan un esquema relacionado con su experiencia sobre la memorización y el olvido, del que toman componentes como la rapidez con que la información se memoriza, la rapidez con la que se olvida, elementos que ponen en relación con un esquema de funciones, del cual usan principalmente la función como un proceso u objeto y la gráfica de la función como objeto. La coordinación de los elementos de estos esquemas da como resultado un proceso de graficación de una función que ilustra el comportamiento esperado del problema de memorización, como las gráficas que se muestran en la figura 1. La actividad de los alumnos se aboca a utilizar esas gráficas como representación de sus hipótesis implícitas para definir las variables que entran en la situación y como objeto de reflexión, exploración y de discusión.

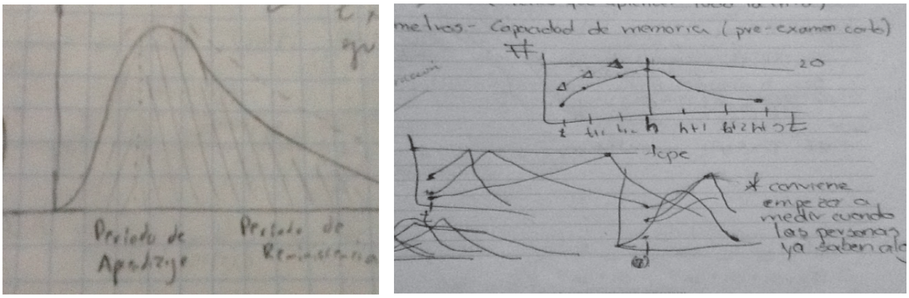
A partir de esta exploración, los estudiantes intentan coordinar el proceso de la representación algebraica de la función con el proceso de graficación, con el fin de encontrar una expresión algebraica para la función representada en la gráfica:

> P: *No recuerdo ninguna función que tenga esta forma* (refiriéndose a la gráfica de la derecha). *Pero distintas personas tienen distintas gráficas de la misma forma, aunque posiblemente tarden más o menos en aprender la información completa*

que es este máximo en h... pero esta expresión no se comporta así porque no va a tener esta asíntota cuando pasa el tiempo...

L: *Tal vez si pensamos en dos reglas, aunque lo difícil sería ver cómo se pegan en el máximo...*

Figura 1



La discusión en grupo, guiada por la maestra, gira en torno a la comparación de las gráficas propuestas, las hipótesis subyacentes y la dificultad de encontrar la expresión algebraica correspondiente. En ella, surgen preguntas como *"¿Es posible encontrar la función adecuada?"* o *"¿Se podría hacer algo distinto?"*, que conducen la discusión hacia ideas relacionadas con la descripción de las propiedades de la función. Los estudiantes evocan un esquema de derivada del cual se toma la derivada como proceso para analizar la gráfica de la función. Además, la maestra enfatiza la necesidad de hacer explícitas las hipótesis implícitas en relación al comportamiento de la función:

M: *De acuerdo, eso es lo que esperan del comportamiento, pero ¿pueden describirlo de otra manera?* (La maestra se dirige al grupo.)

A: *¿Cómo? ¿Decir que primero la función crece y luego decrece, por ejemplo?*

M: *Podría ser...*

R: *Se puede usar la derivada para especificar las propiedades que debe tener la función que proponemos en la gráfica, pero... no tenemos, nadie tiene la expresión analítica y yo no sé cómo obtenerla de las propiedades, más bien sé al revés, sacar las propiedades si sé la regla de la función.*

M: *¿Sería útil analizar su gráfica con la derivada? Podrían intentarlo si lo creen así.*

Los modelos propuestos por los estudiantes consisten en gráficas. Éstas describen el comportamiento esperado del problema, pero no permiten dar respuesta a las preguntas planteadas.

2) Introducción de la variación a la solución del problema

Al regresar al trabajo en equipos, los alumnos formulan algunas hipótesis que permiten justificar el comportamiento de la función propuesta. Al analizar su gráfica, en un equipo se discute la forma en que varía el comportamiento de la función en distintos intervalos de tiempo:

J: *...de aquí a acá debe de ser creciente hasta que se aprenden todo... pero primero debería crecer más rápido, y depende de qué tan buena memoria, qué tan rápido...*

F: *Si suponemos que cada persona tiene un coeficiente de memoria y... lo que han aprendido crece de aquí a acá, pero va creciendo menos rápido por pedazos* (dibuja una curva poligonal con segmentos de recta), *y luego empieza a decrecer también, primero rápido y luego no tanto, hasta que se le olvida todo, o casi todo...*

J: *Puede ser, pero así sería como aproximarla... pero... si esto es una recta* (señalando una parte de la función), *su pendiente m es positiva y... pero luego en otro pedazo también es positiva, pero cambia... no sé, es como si aquí* $y = mt$ (señala el primer segmento que dibujó su compañero), *pero acá* $y = n(t - t_0) + y_0$, *y así, y luego m sería negativa... pero no, ésa no es la función, sólo se parece.*

B: *¡Ya sé! Si* $y = m_t$, $y' = m$, *y la* m *va cambiando, y también está to, con* y_0*...*

F: *...¿*m *es* y'*?, ¡sí!, la tangente a la curva, pero* m *en cada pedazo... bueno, si suponemos cada pedazo de intervalo de tiempo de tamaño 1, para que sea más fácil* (se ríe), *entonces* m *o* y' *sólo depende de la diferencia de las* y, *que es la derivada... sería algo en un punto, como* y, *o sea, depende de lo que saben de información...*

J: *Debe de crecer más despacio acá, y si la persona tiene cierta capacidad de memoria, un coeficiente,* k, *para que primero crezca más y luego menos, podría ser algo como* $y' = k(T - y) + y_0$*... a ver...*

F: *Eso si crece como la gráfica, si* T *es el total de información... eso sería suponer que la rapidez con la que memoriza depende de su capacidad... proporcional a lo que todavía no aprende, más lo que sabía desde el principio... ahora, cuando olvidan podemos hacer algo similar... pero no sé, porque y es positiva... ¡ah, bueno!, pero* y' *es negativa si* y *le gana a* T.

B: *...parece estar bien cuando crece, pero ni modo que sepa más información que el total, eso no tendría sentido, no puede ser. No tiene que ver con el olvido...*

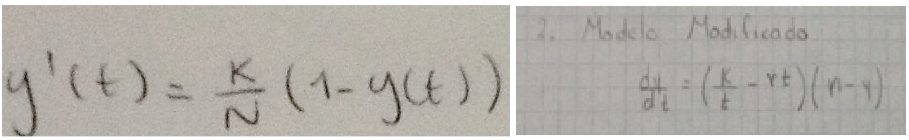
Estos alumnos usan los procesos que describen el crecimiento y el decrecimiento de la función y los coordinan con la derivada como razón de cambio, como proceso, para aproximar la función iterando por intervalos en su intento por analizar la gráfica de otra manera. Este análisis, conjuntamente con la explicitación de una hipótesis sobre la memorización en términos de la proporcionalidad, les permite relacionar los segmentos de la gráfica con expresiones analíticas que incluyen la variación mediante acciones sobre la variable dependiente para el caso de la memorización, aunque no logran representar la función completa.

Otros equipos hacen hipótesis distintas sobre la relación de la gráfica con la derivada, y proponen modelos distintos que incluyen la derivada de la función como se muestra en la figura 2. Estos alumnos coordinan los procesos de variable, derivada y ecuación para considerar una ecuación que contiene derivadas.

La discusión en grupo inicia con la presentación del trabajo del equipo que construyó la aproximación. El grupo comenta las ventajas de describir la variación en lugar de la función en sí y qué tipo de modelo es el que se propuso. La siguiente discusión se da en ese contexto:

E: *En esa ecuación,* y' *es función de* y *pero la función de memoria debe ser función de* t.
B: *Es que* y *es función de* t.
E: *¿Cómo?, t no aparece.*
B: *Pero no tiene que aparecer porque* y *es función de* t*, es la variable independiente, es... está implícita...*

Figura 2



En este diálogo se muestra un ejemplo de una dificultad que se manifestó en muchos equipos. Los estudiantes utilizan la derivada como proceso, pero su esquema de función y el de derivada no parecen contener las funciones implícitas. Ante las dudas y el desconcierto de una mayoría de alumnos, la maestra decide recordarles lo que deben saber de estas funciones. Después pregunta: *"¿Qué tipo de ecuación es la propuesta por sus compañeros?"* Al no haber respuesta, la nombra ecuación diferencial de primer orden, da una definición y hace la siguiente pregunta para terminar la sesión: *"¿Podrían usar una ecuación diferencial para responder las preguntas del problema?"* La maestra deja como ejercicio a los alumnos trabajar en actividades diseñadas con la descomposición genética para la construcción de ecuaciones diferenciales de primer orden y para introducir la noción de solución mediante la sugerencia de soluciones a sustituir en la ecuación diferencial.

En este ciclo, el modelo de la mayoría de los equipos sigue siendo el de función. Se observa, en aquellos modelos que incluyen la variación, el papel que desempeña la representación gráfica de la función como detonador de un cambio en la manera de abordar el problema, al considerar la derivada como pendiente de la tangente en un punto. Si bien la derivada aparece solamente en la propuesta de tres equipos, la discusión de su trabajo ofrece una alternativa a considerar por los demás. Se observa también la dificultad que se presenta con la aparición de la función implícita. La mayoría de los alumnos no han construido este concepto en sus cursos anteriores o lo han construido como acción y sin la derivada.

3) Emergencia de métodos cualitativos de análisis

La siguiente sesión inicia con la discusión de las actividades. Ésta se enfoca rápidamente en las funciones implícitas porque algunos estudiantes siguen considerando que, en ecuaciones como $y' = 3y - 2$, la variable independiente es y, y muchos enfrentaron dificultades como la siguiente:

> L: *Yo no pude verificar si la función de la 4* (se refiere a la actividad 4 que pregunta si la función $3y^2 - 2yt = 0$) *es solución de la ecuación diferencial* $y' = y/(3y - t)$.

En general, en esta discusión se encuentra evidencia de que una de las construcciones importantes en la construcción del conjunto solución, la posibilidad de verificar si una función es o no solución, no ha sido construida por todos los estudiantes. Esta dificultad se relaciona con la construcción de la función y la derivada implícitas. La no construcción de la función y la función derivada como objeto en el que se ha encapsulado el proceso de derivación implícita, dificulta entender la derivada como una función de la variable independiente cuando ésta no aparece explícitamente en la ecuación.

Cuando los estudiantes regresan a trabajar en el modelo, después de haber trabajado en la construcción de ecuaciones diferenciales en las actividades, todos los equipos proponen modelos en términos de la variación parecidos a los de la figura 2. Se observa en su trabajo que todos los equipos incluyen las condiciones iniciales como parte explícita del modelo propuesto. Para evaluar y comparar los modelos en términos del problema inicial, deben analizar o resolver la ecuación. Tres equipos utilizan el esquema de derivada para analizarla. El equipo que sugirió el método de aproximación continúa trabajando con esa idea, pero fija los valores de los parámetros del modelo para poder llevar a cabo el análisis:

> F: *Tenemos* $y' = k(y - T)$. *Si le ponemos valores para que sea más fácil,* $k = .5$ $T = 50$ *queda* $y' = .5(50 - y)$, *y si usamos lo de antes, para eso* $y' = y - y_o/t - t_o$, *entonces del* $t = 0$ *a* $t = 2$, *por ejemplo,* $y' = .5(50 - y) = y/2$, *entonces* $50 - y = y$. *Nos queda* $y = 25$, *o sea que en* $t = 2$ *se sabe 25 datos y la recta iría de 0 a 2 y de 0 a 25, con pendiente 12.5. Luego hacemos lo mismo pero ahora to es 2 y t es, por ejemplo, 4 y yo es 25, entonces* (hace cálculos, no audible) *sale y = 37.5 y así le seguimos...*
>
> B: *La aproximación tiene la forma que queremos para esta parte que crece, pero no es muy exacta... para mejorarla... ¿tomamos los cambios más chicos en la* t?...

J: *Pero ahora lo que nos interesa es si funciona bien... y sí funciona para aprender... Pero no tenemos lo del olvido... ¿Podemos usar dos ecuaciones? Así tenemos dos ecuaciones para una función con dos reglas: una para el aprendizaje y otra para el olvido con* k *negativa y eso sí funcionaría bien...*

El trabajo de este equipo muestra que su idea de aproximación funciona utilizando su conocimiento de la derivada como aproximación lineal y la posibilidad de usar la derivada como objeto equivalente a la razón de cambio.

Otro equipo que retomó el modelo sugerido por el primer equipo durante la primera discusión en grupo, no consideró *yo* como 0 y supuso el total de datos como 1 y la variable como porcentaje $y' = k(1 - y) + y_0$. Este equipo decidió dibujar una gráfica de y' contra y para analizar el comportamiento de los datos aprendidos.

N: *...Estoy pensando que si graficamos esa función de* y'... *pero como función de* y, *¿qué significaría?*

C: *¿Cómo vamos a interpretar eso? Porque lo que nos importa es la forma de la* y.

N: *A ver... esa gráfica* (figura 3) *es una recta, con pendiente positiva. Dice que* $y' = 0$ *si* $y_0/k + 1 = y$. *Pero no debe ser porque, ¿dónde queremos que haya un punto crítico? Yo creo que en el 1 porque es cuando se aprende todo y luego cuando olvida empieza a bajar, pero esto está más arriba.*

S: *Si queremos que haga eso, yo debería ser 0, pero ¿por qué?*

C: *Porque no sabe nada todavía.*

S: *Pero, ¿qué tal si sabe algo? Debería funcionar también, ¿no?...*

C: *Sí, de acuerdo, pero si esa recta tiene pendiente positiva,* y' *es positiva, dice que cuando sabe más lo que aprende que es el cambio en lo que sabe sería menor y eso si concuerda con lo que queremos.*

Este equipo trabaja sobre la ecuación y ha interiorizado el proceso de calcular la derivada y representarla en el plano. Muestra así una concepción objeto de la derivada, aunque consideran el caso $y' = 0$ como un punto crítico cuando representa una solución de equilibrio. Coordinan el proceso de derivada con el de función en un proceso de construcción de una gráfica y coordinan este proceso con el del problema que desean resolver. Su gráfica corresponde a un plano fase a pesar de que esta representación no había sido introducida ni en clase ni en las actividades previas.

Un tercer equipo que construyó un modelo de la forma $q' = k(N - q)(h/t - t/h)$, utilizó también el esquema de derivada en su análisis, sin emplear gráficas –como se muestra en la figura 4– y comentaron:

R: *Sí, eso está bien porque nos dice que hay un máximo en h que es el tiempo en que ya se aprendió todo y empieza a olvidar.*

Y: *¿Pero también* q = N *es un punto crítico? ¿Qué nos diría?*

Figura 3

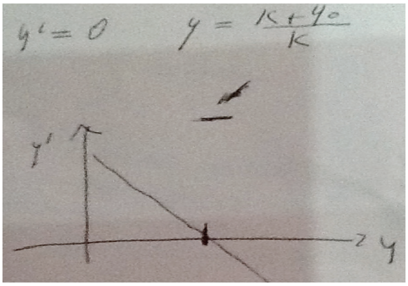
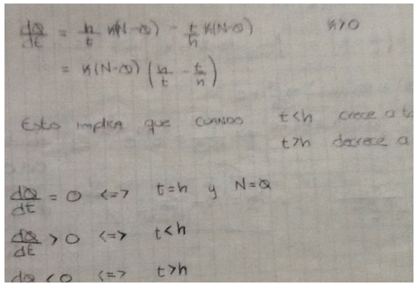


Figura 4



> *R: N es toda la información... Si ya se la aprendió toda, ya no tiene nada que aprender... si no olvidara, ¿cómo sería la gráfica de la función después de h? ¿Sería horizontal en N? ¿Eso nos dice...? No sé bien.*

Este equipo muestra que ha coordinado los procesos razón de cambio y de función derivada. Uno de los alumnos cuestiona lo que sería la posible diferencia entre un punto crítico y una solución de equilibrio, pero no concluyen esta discusión.

De los 11 equipos, únicamente cuatro lograron hacer un análisis de su ecuación diferencial en términos de la derivada. Los demás tuvieron dificultades. Algunos equipos intentaron seguir el método de la aproximación pero no pudieron implementarlo debido a que aparentemente no han coordinado el proceso razón de cambio con el de derivada. Otros equipos intentaron calcular cuándo la derivada sería mayor y menor que cero, pero tuvieron dificultades para interpretar el resultado obtenido por dificultades, nuevamente, con la derivada implícita.

En la discusión en grupo, la maestra pidió a cada uno de estos equipos explicar sus procedimientos. El segundo equipo expuso: *"Queríamos encontrar cómo podía ser la relación entre* y *e* y'*; la gráfica es una recta y eso dice que la* y' *es positiva y que decrece cuando aumenta* y*. Eso está bien, pero luego encontramos que* $y' = 0$ *en este punto, que sería un punto crítico, pero esperábamos que eso sucediera cuando* $y = 1$ *y no entendemos por qué".* Otro equipo comentó tener un problema semejante. Intervino entonces Andrea diciendo:

> *A: Nosotros también discutimos algo así antes, cuando estábamos viendo cómo plantear el modelo, y Luisa comentó que si pensábamos en la derivada como la aproximación lineal –como discutimos la clase anterior–, entonces* t_o *y* y_o *no deberían aparecer en la ecuación para la derivada porque ya están tomadas en cuenta en la diferencia que aparece en la pendiente para el primer intervalo de tiempo, y para el segundo ya no sería esa to ni esa* y_o *la que aparecería en la*

> *derivada, como lo hicieron ellos* (el primer equipo que presentó) *y nos convenció, así que quitamos ese dato de lo que sabe al principio, por esa razón.*

La maestra aprovechó la discusión para comentar cuál es el papel de la condición inicial en una ecuación diferencial, apoyándose en la explicación dada por la alumna; retomó la idea de la gráfica de y' contra y para explicar con mayor detalle las funciones implícitas y la utilidad del diagrama cuando la variable independiente no aparece explícitamente en la ecuación. Posteriormente preguntó: *"¿Cómo se compara el trabajo de los diferentes equipos que presentaron sus resultados?"* Algunos estudiantes consideraron que el método analítico era más general, pero en la discusión, Fernanda aclaró: *"Me parece que están relacionados porque nosotros calculamos* y, *también la pendiente de la recta en un intervalo; ellos supusieron el signo de la derivada en general y encontraron el valor de* t, *en el que hay un cambio. Nosotros supusimos una función con dos reglas porque nos pareció sensato y más simple"*. Roberto intervino: *"También puedes pensar que la derivada toma un valor, por ejemplo 2, y ver en qué valores de* t *eso sucede; en el caso de ellos* (el otro equipo), *encontrarían que* $y' = 2 = .5(50 - y)$ *y* $y = 46$, *o sea que cuando* y *es 46, la pendiente es 2, es lo mismo pero por puntos"*. Este comentario no fue claro para la mayoría de los alumnos. La maestra lo aprovechó para utilizarlo en varios de los modelos propuestos y construir la relación entre el campo de pendientes y las curvas solución para distintas condiciones iniciales. De esta manera, el análisis de la derivada se convirtió en una herramienta flexible para analizar el comportamiento de la función solución de ecuaciones diferenciales diversas.

Los alumnos de los equipos mencionados mostraron haber coordinado el esquema de derivada, el de función y el esquema para la memorización. Fueron capaces de hacer acciones sobre la función y la derivada, tanto para construir la ecuación diferencial, que se convirtió en su modelo para la situación, como para sugerir una forma de análisis gráfico o algebraico para encontrar una relación entre la derivada y la función solución. Estos instrumentos de análisis resultaron útiles para hacer acciones sobre la ecuación diferencial y para entender el significado y el posible comportamiento de las funciones solución. Nuevamente se hace patente, en este ciclo, el papel que desempeñan el análisis de la derivada, la comprensión de las funciones implícitas y sus derivadas y el uso de las gráficas como objeto de reflexión en la posibilidad de analizar si la ecuación diferencial predice el comportamiento de la solución a pesar de no poder resolver la ecuación diferencial.

La maestra propuso una actividad basada en la descomposición genética para trabajar, en clase y en casa, sobre análisis gráfico de funciones implícitas utilizando la derivada, análisis gráfico de la solución de ecuaciones diferenciales utilizando los métodos propuestos por estos tres equipos y el que ella propuso, además del papel de las condiciones iniciales.

4) Análisis, solución y búsqueda de parámetros

En los siguientes ciclos se discutieron los resultados obtenidos en las actividades y el uso de los métodos gráficos para analizar el comportamiento de las soluciones de la ecuación. Del análisis de los modelos surgieron modificaciones a los mismos. Se discutió también la solución analítica de las ecuaciones diferenciales. En este punto, únicamente dos estudiantes mostraron dificultades con la función implícita al proponer la integración de los dos lados de la igualdad de la ecuación, ignorando la variable independiente.

La maestra introdujo nuevas actividades basadas en la descomposición genética para construir dos métodos de solución, separación de variables y ecuaciones lineales, que podían emplearse con los modelos propuestos. Posteriormente se discutieron los resultados encontrados y la maestra pidió que los alumnos los utilizaran para resolver algunos ejercicios convencionales de tarea y las ecuaciones de sus modelos.

Más adelante, los estudiantes pusieron a prueba su modelo mediante la realización de un experimento y se enfrentaron al problema de calcular el valor de los parámetros. Los estudiantes utilizaron métodos conocidos –como mínimos cuadrados– o tecnología para encontrarlos con apoyo de la maestra, respondieron las preguntas del modelo y escribieron su reporte. La maestra concluyó esta parte del curso presentando a los estudiantes problemas para modelar con estructura similar al problema de la memoria. La mayoría de los estudiantes fue capaz de encontrar un modelo semejante para los distintos problemas.

DISCUSIÓN

Los resultados de esta investigación muestran que la descomposición genética de los conceptos a enseñar es un instrumento útil para guiar el diseño y uso efectivo de actividades que favorecen la construcción del conocimiento y que hacen evolucionar aquellos conceptos que son relevantes en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial y de conjunto solución de la misma. El trabajo en clase pone de manifiesto las construcciones de los alumnos durante el proceso de modelación y el trabajo en el modelo. Se observa que las únicas construcciones no explícitas en la descomposición genética que desempeñan un papel importante en la construcción de los conceptos de ecuación diferencial y conjunto solución, son los de función implícita y su derivada. Estas construcciones deben incluirse al refinar la descomposición genética.

A través del trabajo de los alumnos fue posible reconocer las construcciones que juegan un papel importante en el aprendizaje de la ecuación diferencial y su conjunto solución, esto es: el proceso de análisis de la derivada; la función implícita como objeto y su derivada; la distinción entre los puntos críticos de una función y las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial, íntimamente relacionada con la función implícita, y la construcción de los procesos de conversión flexible del conjunto solución de la ecuación entre representaciones que permiten el análisis cualitativo de la ecuación diferencial. Las dificultades enfrentadas por los estudiantes con esos conceptos indican que es conveniente que, en los cursos previos, se trabaje en asegurar su construcción. Es importante notar que el manejo de los parámetros no constituyó una dificultad, como podría esperarse.

El análisis del trabajo de modelación de los estudiantes indica que, además de motivarlos, permite que surjan, se discutan y se construyan conceptos que en la literatura se reportan como difíciles de superar. En ello, la discusión en clase desempeña un papel relevante. La posibilidad de utilizar el modelo matemático como objeto de reflexión y de poner en correspondencia los resultados de la modelación con lo que se espera del comportamiento del fenómeno, permite interiorizar las primeras acciones de exploración en procesos y, en algunos casos, la encapsulación de los objetos resultantes de la coordinación de dichos procesos. Es necesario enfatizar, sin embargo, que esta posible construcción del conocimiento no depende exclusivamente del trabajo con el modelo matemático. El maestro estimula y guía la discusión en clase hacia la construcción de nuevos conceptos o nuevas formas de trabajar con conceptos conocidos. Tal es el caso del uso de la derivada como objeto para plantear el problema en términos de la variación y para analizar los modelos que la incluyen. Otro apoyo fundamental es el de las actividades diseñadas con la descomposición genética y su uso en momentos clave del proceso de modelación. Es en términos de estas actividades que se detectan las dificultades de los alumnos frente a funciones y derivadas implícitas, conceptos que desempeñan un papel clave en la solución y análisis cualitativo de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Estas actividades favorecen la construcción de procesos y objetos de manera conjunta, y a la vez independiente, del modelo, que resultan indispensables en el aprendizaje. Esto se observa en la introducción de conceptos como campo de tangente a la discusión de los alumnos, y su relación con las conclusiones acerca del comportamiento de las posibles soluciones de la ecuación en distintas regiones del plano.

Otro hallazgo importante consiste en que el trabajo en el modelo favorece que los estudiantes desarrollen, de manera independiente, herramientas de análisis poderosas. Es claro que el desarrollo de una técnica similar al método de Euler, a partir de la aproximación lineal de la función solución y la gráfica del plano fase, surge de la necesidad de argumentar y validar el comportamiento esperado de la solución de la ecuación diferencial. Estas herramientas no fueron introducidas originalmente por el maestro ni mediante las actividades, aunque estaban contempladas en ellas para un momento posterior. El trabajo en el modelo recupera así conocimiento acerca de la derivada como función y como aproximación lineal de la función, y propicia la construcción de la relación entre la función solución y la función derivada que se hace patente en la representación del plano fase y que resulta poderosa en el análisis de las propiedades que las funciones del conjunto solución deben satisfacer. La emergencia de estas herramientas es una prueba clara de que la modelación promueve la construcción del conocimiento.

CONCLUSIONES

A partir de los resultados de este trabajo, puede concluirse que el uso del problema de modelación –y el proceso seguido en la misma– da sentido a la introducción de la variación en las consideraciones de los alumnos. La observación del trabajo de los alumnos permite identificar sus dificultades y orienta al profesor hacia la necesidad de reflexionar nuevamente sobre ellas.

El trabajo con la variación favorece la emergencia de ideas y herramientas útiles en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. Nuevamente, estas ideas permiten al maestro desarrollarlas en la discusión en clase y en las actividades para incorporarlas a la construcción de los conocimientos deseados y utilizarlas en la introducción de nuevos conceptos.

Esta experiencia muestra también que la discusión con el grupo favorece la reflexión sobre las dificultades presentadas por los alumnos, así como la institucionalización del conocimiento en cada uno de los ciclos de modelación.

Muchas investigaciones sobre el uso didáctico de la modelación insisten en la motivación que la solución de este tipo de problemas representa para el estudiante. En este artículo se muestra que cuando los estudiantes toman por su cuenta la situación y se implican en el proceso de solución, asumen responsabilidad sobre su propio aprendizaje, y que si ello se aprovecha para estimular la discusión y la reflexión, la modelación apoya la construcción de nuevos procesos, objetos y esquemas. Los nuevos esquemas construidos permiten "ver" el problema original y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde una perspectiva diferente.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue posible gracias al apoyo de la Asociación Mexicana de Cultura A. C. y al Instituto Tecnológico Autónomo de México.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnon, I., J. Cottrill, E. Dubinsky, A. Oktaç, S. Roa, M. Trigueros y K. Weller, (2013), *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*, Nueva York, Springer.

Artigue, M. (1989), "Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles en premier cycle universitaire", *Cahiers du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, París, IREM, Université Paris 7, núm. 107, pp. 284-309.

Blanchard, P., R. Devaney y R. Hall (1998), *Differential equations*, Boston, Brooks/Cole.

Blum, W., P.L. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (eds.) (2007), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*, New ICMI Study Series, vol. 10, Nueva York, Springer.
Busse, A. (2011), "Upper secondary students' handling of real-world contexts", en G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri y G. Stillman (eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. ICTMA 14*, Nueva York, Springer Science + Business Media, pp. 37-46.
Camarena, G. P. (1987), *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*, tesis de maestría, México, Cinvestav, IPN.
Chaachoua, H. y A. Saglam (2006), "Modelling by differential equations", *Teaching Mathematics and its Applications*, vol. 25, Oxford University Press, pp. 15-22.
Czarnocha, B., E. Dubinsky, V. Prabhu y D. Vidakovic (1999), "One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research", en O. Zaslavsky (ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of PME*, vol. 1, pp. 95-110.
Dana-Picard, T. y I. Kidron (2007), "Exploring the phase space of a system of differential equations: different mathematical registers", *International Journal of Science and Mathematics Education*, vol. 6, núm. 4, pp. 695-717.
Donovan, J. (2007), "The importance of the concept of function for developing understanding of first-order differential equations in multiple representations", *Proceedings for the X Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, recuperado en: http://sigmaa.maa.org/rume/crume2007/eproc.html.
Kaiser, G. y K. Maass (2007), "Modelling in lower secondary mathematics classroom – problems and opportunities", en W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*, Nueva York, Springer Science + Business Media, pp. 99-108.
Kwon, O. N., C. Rasmussen y K. Allen (2005), "Students' retention of mathematical knowledge and skills in differential equations", *School Science and Mathematics*, vol. 105, núm. 5, pp. 227-239.
Lesh, R. y H. M. Doerr (2003), "Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving", en R. Lesh y H. M. Doerr (eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*, Mahwah, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 3-33.
Lesh, R., M. Hoover, B. Hole, A. Kelly y T. Post (2000), "Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers", en A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Mahwah, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 591-645.
Maass, K. (2006), "What are modelling competencies?", *ZDM*, vol. 38, núm. 2, pp. 113-142.
Niss, M. (2012), "Models and modelling in mathematics education", *EMS Newsletter*, pp. 49-52.
Rasmussen, C. y H. Blumenfeld (2007), "Reinventing solutions to systems of linear diffe-

rential equations: A case of emergent models involving analytic expressions", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 26, pp. 195-210.

Rowland, D. R. (2006), "Student difficulties with units in differential equations in modeling contexts", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 37, núm. 5, pp. 553-558.

Trigueros, M. y E. Possani (2013), "Using an economics model for teaching linear algebra", *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 438, núm. 4, pp. 1779-1792.

Trigueros, M. (2004), "Understanding the meaning and representation of straight line solutions of systems of differential equations", en D. McDougall y J. Ross (eds.), *Proceedings of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Ontario, ERIC.

——— (2008a), "Modélisation de situations réelles et utilisation d'une théorie de construction de la connaissance dans l'enseignement des mathématiques universitaires", en C. Ouvrier-Buffet y M.-J. Perrin-Glorian (eds.), *Approches plurielles en didactique des mathématiques. Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur: quoi de neuf? Actes Colloque DIDIREM08*, París, pp. 83-101.

——— (2008b), "Modeling in a dynamical system course", en *Electronic Proceedings for the XI Conference on Undergraduate Mathematics Education*, recuperado en: http://mathed.asu.edu/crume2008/Proceedings/Proceedings.html.

Zandieh, M. y C. Rasmussen (2010), "Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 29, pp. 57-75.

DATOS DE LA AUTORA

María Trigueros
Departamento de Matemáticas,
Instituto Tecnológico Autónomo de México, México
trigue@itam.mx

División de fracciones como comparación multiplicativa a partir de los métodos de los alumnos

Alfinio Flores Peñafiel

Resumen: Presentamos varios métodos inventados por alumnos de 5º a 8º grados para resolver problemas de división de fracciones. Para cada método discutimos cómo el maestro puede ayudar a los alumnos a desarrollar su comprensión de la comparación multiplicativa de fracciones, enfatizando principios matemáticos fundamentales que les permitan extender, generalizar y relacionar sus métodos con otros métodos. Los métodos presentados son sustracción repetida e interpretación del residuo, uso de la identidad y los inversos multiplicativos, división como factor faltante, razonamiento proporcional inverso y directo, división de fracciones como composición de operaciones, y división de fracciones como una razón entre dos cantidades.

Palabras clave: fracciones, división, comparación multiplicativa, razonamiento proporcional, métodos de alumnos.

Abstract: We present several methods invented by students in grades 5^{th} through 8^{th} to solve division of fractions problems. For each method we discuss how the teacher can help students develop their understanding of multiplicative comparison of fractions, by emphasizing fundamental mathematical principles that allow students generalize, extend, and relate their methods with other methods. The methods presented are repeated subtraction and interpretation of the remainder; use of the multiplicative identity and inverses; division as missing factor; inverse and direct proportional thinking; division of fractions as composition of operations; and division of fractions as a ratio between two quantities.

Keywords: fractions, division, multiplicative comparison, proportional reasoning, students methods.

DOS METAS EN LA ENSEÑANZA DE LA DIVISIÓN ENTRE FRACCIONES

Hay dos metas importantes para los alumnos cuando aprenden a dividir fracciones. La primera meta es que los alumnos entiendan por sí mismos lo que significa dividir fracciones, mediante el trabajo individual y en grupos de cooperación, utilizando representaciones concretas o pictóricas, inventando sus propios procesos, y presentando y justificando sus respuestas y métodos unos a otros. La segunda meta es ayudar a los alumnos a desarrollar su comprensión de la división de fracciones como una

Fecha de recepción: 22 de julio de 2013; fecha de aceptación: 11 de octubre de 2013.

comparación multiplicativa, de modo que la experiencia contribuya a desarrollar su pensamiento proporcional. Para conseguir ambas metas, los maestros deben escoger actividades y problemas matemáticos que permitan a los alumnos entender la división de fracciones por sí mismos, y tareas que propicien comparaciones multiplicativas y el uso de razonamiento proporcional en el contexto de dividir fracciones. Además, los maestros deben anticipar qué métodos pueden usar los alumnos y pensar en la forma en la que pueden ayudarlos a extender o generalizar sus métodos. Los maestros deben tener la aptitud para observar y escuchar a los alumnos, una buena idea de cómo los alumnos están realmente viendo el problema, y la habilidad para hacer preguntas que tengan sentido para los alumnos (Duckworth, 2006, pp. 3-4). El maestro debe intervenir en momentos cruciales para dirigir el pensamiento de los alumnos hacia la comparación multiplicativa de las fracciones. Para desarrollar su razonamiento proporcional, los alumnos deben pasar del uso de estrategias con unidades compuestas, tales como sumas repetidas y particiones, a las comparaciones multiplicativas (Lobato y Ellis, 2010, p. 69).

LA COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA Y EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

Un componente central del razonamiento proporcional es la capacidad de comparar números multiplicativamente. Dos números o cantidades se pueden comparar aditivamente o multiplicativamente. Los niños desarrollan primero la capacidad de comparar números aditivamente. La comparación aditiva de dos cantidades, a y b, se puede expresar como una diferencia, $a - b = c$, o como una suma, $a = b + c$. Más adelante, los niños aprenden a comparar números multiplicativamente. Cuando comparamos multiplicativamente dos cantidades o números, creamos una razón (Thompson, 1994, p. 185). La comparación multiplicativa entre dos cantidades, a y b ($b \neq 0$), se puede expresar como un cociente, $a \div b = c$, o como una multiplicación, $a = b \times c$. Las comparaciones multiplicativas pueden surgir cuando los estudiantes multiplican o dividen números. Sin embargo, no todas las situaciones que involucran multiplicación y división de cantidades o números son vistas por los alumnos como comparaciones multiplicativas. Los estudiantes pueden pensar en términos de sumas repetidas o restas repetidas para tratar con los problemas de multiplicación o división. Las sumas y restas repetidas son esencialmente formas aditivas de comparar números. La investigación ha documentado que las concepciones de la multiplicación basadas únicamente en sumas repetidas pueden ser muy limitantes y problemáticas para los alumnos (Thompson y Saldanha, 2003, p. 104). Para propiciar que los alumnos comparen cantidades por medio de una razón, debemos ayudarlos a visualizar que una cantidad es n veces mayor que una segunda cantidad, en vez de pensar solamente que la segunda cantidad es una de n partes idénticas de la primera (Thompson y Saldanha, 2003, p. 105). Para que los alumnos desarrollen su habilidad para comparar números multiplicativamente necesitamos alentarlos a ir más allá de sumas o restas repetidas. Éste es también el caso cuando los estudiantes tratan con la división de fracciones.

DIFICULTADES CON LA DIVISIÓN DE FRACCIONES

Los problemas que requieren dividir entre una fracción son especialmente complicados para los alumnos de los grados intermedios. Cuando Barlow y Drake (2008) les pidieron a 45 alumnos de 6º grado que escribieran un problema que representara $6 \div {}^1/_2$, 16% de los estudiantes no pudieron escribir problema alguno, y 67% de ellos escribieron un problema incorrecto que representaba $6 \div 2$, $6 \times {}^1/_2$ o alguna otra relación entre los números que no era $6 \div {}^1/_2$. Las dificultades de entender lo que significa dividir entre una fracción no se limitan a los grados intermedios. Ball (1990) reportó dificultades entre los estudiantes universitarios cuando les pidió escribir problemas que pudieran proporcionar un contexto para $1\ {}^3/_4 \div {}^1/_2$. Simon (1993) también encontró que futuros maestros de primaria frecuentemente tenían dificultades para interpretar el residuo o la parte fraccionaria del cociente en el siguiente problema.

> Sergio tiene 35 tazas de harina. Hace galletas que requieren ${}^3/_8$ de una taza cada una. Si hace tantas galletas como le alcance con la harina, ¿cuánta harina va a sobrar? (Simon, 1993, p. 241)

LA IMPORTANCIA DE QUE LOS ALUMNOS ENTIENDAN POR SÍ MISMOS LA DIVISIÓN DE FRACCIONES

Según Behr, Harel, Post y Lesh (1993), el conocimiento intuitivo acerca de las fracciones puede ser desarrollado a través de contextos de enseñanza apropiados, diseñados para ilustrar principios de razonamiento para situaciones de números racionales. Las experiencias diseñadas por los maestros para formar el conocimiento deben tomar en cuenta los esquemas intuitivos de los alumnos. Estos esquemas permiten que los alumnos no tengan que depender de los algoritmos escolares, y les da la posibilidad de inventar procedimientos para resolver problemas nuevos y para construir conocimiento matemático por sí mismos. Al resolver problemas de división de fracciones por sí mismos y construir su propio conocimiento matemático, los alumnos desarrollan su competencia en este aspecto de los números racionales. Como Smith (1995, p. 4) señala, la competencia con números racionales involucra varios aspectos. Un signo de competencia es ser capaz de desempeñarse a través de un rango de problemas que involucren propiedades matemáticas centrales de los números racionales. Ser competente requiere de la habilidad para resolver problemas nuevos y conocidos, y manejar todas las fracciones que pudieran aparecer en la solución de los problemas. La competencia también requiere comprensión profunda de los principios matemáticos subyacentes de los números racionales y sus operaciones. Tal conocimiento medular permitirá a los alumnos corregir sus errores, generar nuevo conocimiento y recuperar lo que hayan olvidado.

CONECTAR LA DIVISIÓN CON LAS FRACCIONES

Un paso preliminar importante para la comprensión de la división de fracciones es que los alumnos consideren problemas de división entre números enteros e interpreten el resultado como una fracción. De este modo, los alumnos establecen una conexión importante que no está siempre presente. Clarke, Roche y Mitchell (2008) señalan que la noción de una fracción como división no es una idea común en la mente de la mayoría de las personas (p. 377). En algunos casos, los alumnos piensan que la división y las fracciones son temas separados, y algunos inclusive se resisten a usar fracciones para reportar un problema de división, como un alumno de 5º grado que dijo enfáticamente: "No estamos hablando de fracciones, estamos hablando de división" (Toluk, 1999, p. 182).

Algunos alumnos notan que los mismos números aparecen en un problema de división como $7 \div 4$ y en la respuesta $^7/_4$. Por ejemplo, una alumna de 5º grado, al tratar con el problema de repartir siete pays entre cuatro amigos, usó su propio método y una representación pictórica de siete círculos. Ella distribuyó primero círculos completos, luego mitades y luego cuartos. Primero escribió la respuesta como $1 + {}^1/_2 + {}^1/_4$. Luego convirtió todo a cuartos y encontró que cada persona había recibido $^7/_4$. Ella notó que el resultado tenía tanto el 7 como el 4 de la pregunta original, y exclamó: "Esto es interesante. Esto es sospechoso. Tengo que pensar más acerca de esto". Por sí mismos, o con la guía del maestro, los alumnos necesitan darse cuenta de que el hecho de que los mismos números aparezcan en el problema de división original y en la respuesta expresada como fracción ($7 \div 4 = {}^7/_4$) no es una coincidencia. El hecho de que la porción que recibe cada persona en una situación de reparto puede ser predicha por la relación multiplicativa entre objetos y participantes es un ejemplo de la estrecha relación entre proporciones y fracciones y de cómo los conceptos están entrelazados (Streefland, 1991, p. 130).

DIVISIÓN DE FRACCIONES COMO SUSTRACCIÓN REPETIDA Y ANÁLISIS DEL RESIDUO

En esta parte del artículo presentamos formas en las que cuatro alumnas de nivel medio pudieron entender la división de fracciones por sí mismas al resolver problemas de división de fracciones en el contexto de porciones y reparticiones. Los datos provienen de un estudio más amplio conducido por Melina Priewe, como parte de su trabajo de tesis doctoral (Day, 2010; Flores y Priewe, 2013). El propósito del estudio para la maestra/investigadora fue entender cómo los estudiantes justificaban por sí mismos sus estrategias y soluciones con sus propios condiscípulos. Por tanto, la maestra implementó en su salón la norma sociomatemática de que una explicación consiste en un argumento matemático y no en una simple descripción o resumen de un procedimiento. Para que los alumnos justificaran basándose en razonamientos, la maestra les dio tres principios guía:

1. convencerse a sí mismos encontrando soluciones que tuvieran sentido para ellos mismos;
2. convencer a otros mediante la comunicación de su comprensión por medio de representaciones gráficas, palabras (escritas y orales) y símbolos, y
3. entender las justificaciones de otros alumnos para cuestionarlos en caso de desacuerdo.

Los problemas en el contexto de encontrar cuántas porciones se pueden hacer con una cantidad dada, cuando se conoce el tamaño de la porción, se prestan para el uso de la interpretación de medición de la división y el uso de restas repetidas para encontrar la respuesta. Esta situación tiene la ventaja de permitir a los alumnos utilizar representaciones concretas o pictóricas y encontrar sus propias estrategias. Cuando se usa la interpretación de medida para la división, el caso más simple es cuando el tamaño de la porción cabe exactamente un número entero de veces en la cantidad a distribuir. Por ejemplo, si una porción es $^3/_4$ de una naranja, y hay 4 $^1/_2$ naranjas, habrá exactamente 6 porciones. Los alumnos frecuentemente encuentran esta respuesta al restar (o sumar) repetidamente $^3/_4$ de naranja y contar el número de porciones. Una situación más difícil es cuando el tamaño de la porción no cabe exactamente un número entero de veces en la cantidad a repartir, y hay un residuo fraccionario. Usualmente los alumnos que tratan de resolver problemas con un residuo fraccionario tienen dificultades para entender el residuo en términos de la unidad utilizada para medir (la porción), en vez de en términos de los objetos utilizados en los ejemplos (naranjas o panqués).

A continuación describimos las estrategias e interacciones de las cuatro estudiantes de 7º grado: Taylor, April, Rosalee y Rebecca (seudónimos). Ellas resolvieron primero el siguiente problema, tomado de Kribs-Zaleta (2008).

> Una porción es $^3/_4$ de una naranja. Hay dos naranjas y media. ¿Cuántas porciones (incluyendo fracciones de porción) se pueden hacer? (Ibíd., p. 454)

Taylor, April, Rosalee y Rebecca tuvieron primero la oportunidad de tratar de entender el problema cada una por sí misma. Luego, cada quien trató de convencer a sus compañeras acerca de su estrategia y solución. Las alumnas llegaron a resultados distintos porque estaban pensando en partes fraccionarias con respecto a distintas unidades. Al comunicar su pensamiento unas a otras, "el todo" no fue hecho explícito por las alumnas. Esto causó confusión y desacuerdo en la solución final del problema.

Taylor: *Dice, supón que tienes dos naranjas y media. Una... dos... tres. Hice esto porque se me hizo más fácil. Así que esto es una porción* [ella sombreó tres cuartos de naranja en su dibujo]... *ésta es otra porción* [sombreó tres cuartos de naranja]... *y ya. Así que esto, técnicamente, no está allí* [Taylor señaló la última mitad de una naranja]. *No debes de... Así, ahí mismo hay tres porciones. Hay uno que sobra, y hay de tres posibles... Así sabes que necesitas como tres cuartos...*

Rosalee: *Sí.*

Taylor: *...para tener una porción. Así es como 75 centavos, pero en vez de hacer eso tienes uno de tres posibles. Por eso puse tres y un tercio. Porque sobra un tercio.*

La unidad especificada en la pregunta era la de una porción. Las alumnas resolvieron correctamente cuántas porciones enteras había ahí, usando restas repetidas de porciones, pero tuvieron dificultades al interpretar el residuo. El residuo es $^1/_4$ de una naranja pero $^1/_3$ de una porción.

Taylor usó sus representaciones gráficas para mostrar la cantidad sobrante en los problemas de división de fracciones usando la interpretación de división, pero no siempre fue explícita al usar sus símbolos y palabras para comunicar lo que la parte sobrante representaba en relación a una unidad completa (tal como porción). Por tanto, a veces tuvo dificultad para comunicarse efectivamente con las otras alumnas al tratar de explicar su estrategia. La solución de Taylor de tres y un tercio es correcta, pero no especificó que eran tres y un tercio de porciones. Taylor dijo que sobraba uno. Con base en sus respuestas escritas al cuestionario preliminar y su entrevista oral con la maestra, fue evidente que Taylor comprendía que el sobrante representaba un cuarto de una naranja. Sin embargo, no fue explícita para decir que la parte sobrante representaba un cuarto de una naranja cuando se lo explicó a su grupo. Más tarde, durante la discusión, Taylor trató de convencer a su grupo de que la respuesta no era un cuarto, diciendo: "Pero no es un cuarto de una porción". Esta vez, Taylor fue explícita con que había que considerar el residuo en términos de una porción. Las alumnas habían mencionado porciones antes, pero ésta fue la primera vez que discutieron una fracción de una porción. Tal vez hubiera sido de ayuda para su grupo si ella hubiera dicho que era un cuarto de naranja y luego explicado que se necesitaban tres cuartos de naranja para una porción completa. Las alumnas utilizaron representaciones gráficas, así como símbolos y palabras, para mostrar el residuo. Sin embargo, iban a necesitar ser más explícitas al usar sus símbolos y palabras para explicar lo que el residuo representaba con respecto a la unidad como un todo. Esto era necesario a fin de que pudieran comunicarse, ya que se estaban refiriendo a dos "todos" diferentes.

Más tarde, en una entrevista con la maestra, Taylor declaró que necesitaba explicar su respuesta más claramente.

Taylor: *Como decía el problema, una debía fijarse en las porciones y no las naranjas. Bueno, yo nunca dije eso en mi respuesta. Y pienso que si hubiera explicado eso mejor, ellas hubieran podido entender cómo encontré mi respuesta.*

Aunque Taylor y su grupo se dieron cuenta de que necesitaban ser explícitas acerca de la unidad, esta dificultad fue persistente durante todo el estudio.

UN MOMENTO PROPICIO PARA LA ENSEÑANZA: DIVIDIR EL RESIDUO

Cuando Taylor y April estaban trabajando con el siguiente problema, por primera vez en el estudio hicieron explícita una forma de tratar con el residuo de manera multiplicativa.

Adán ha estado dando porciones de $^2/_3$ de vaso de limonada a cada alumno. Si él tiene todavía 1 $^1/_2$ vasos de limonada, ¿cuántos estudiantes pueden todavía recibir limonada? ¿Qué fracción de una porción recibirá el último estudiante? (Kribs-Zaleta, 2008, p. 454)

Taylor y April resolvieron que tendrían dos porciones y un residuo.

Taylor: *Eso sería vasos de limonada que sobran. Y luego tenemos que encontrar, si se necesitan... si se necesitan dos tercios y sobra un sexto. Entonces, si tienes un sexto y necesitamos encontrar cuántas veces cabe en dos tercios de vaso de limonada, ¿cómo le hacemos?*

La declaración de Taylor, "Eso sería vasos de limonada que sobran", indica que se dio cuenta de que el residuo $^1/_6$ representaba una fracción de un vaso, no de una porción. April sugirió cómo tratar con el residuo para expresarlo como parte de una porción.

April: *¿Un sexto dividido entre dos tercios?*

En este momento, las alumnas consideraron la idea de dividir el residuo por la cantidad de la porción, pero no pudieron recordar el procedimiento para dividir fracciones, así que no pudieron seguir este método. Esto es un ejemplo de cómo la falta de habilidad para calcular puede interferir con la exploración conceptual. Hay varias formas en las que el maestro puede intervenir en una situación como ésta. El maestro puede hacer una nota de la situación y pedir a los alumnos que guarden sus pensamientos por un momento. Los alumnos pueden aprovechar la disponibilidad de calculadoras. En la actualidad, afortunadamente, hay calculadoras muy baratas para fracciones. El contexto, junto con la guía del maestro, puede ayudar a los alumnos a interpretar el resultado que les muestra la calculadora. Después, el maestro puede asegurarse de que los alumnos sepan cómo dividir fracciones aunque no tengan una calculadora disponible; pero mientras tanto, la falta de fluidez con los procedimientos no debe impedir que los alumnos desarrollen su comprensión conceptual. Con la calculadora de fracciones, las alumnas podrían obtener $1/6 \div 2/3 = 1/4$. Lo importante en este punto es que los maestros ayuden a los alumnos a que continúen pensando acerca de la comparación de dos fracciones (el residuo y la porción, en este caso) de manera multiplicativa.

RECONECTAR LA SUSTRACCIÓN REPETIDA CON LA DIVISIÓN

La estrategia inicial de Taylor y sus compañeras fue usar la porción como unidad de medida y hacer restas repetidas para encontrar cuántas porciones se podían hacer. Los alumnos necesitan darse cuenta de que la sustracción repetida se puede hacer en un solo paso usando la división. Los alumnos pueden retomar el problema y dividir $2\ 1/2 \div 3/4$ con una calculadora de fracciones usando la tecla ÷. Después de simplificar, la calculadora muestra la respuesta, $3\ 1/3$, la misma que ellos obtuvieron con su propio método. Los alumnos deben recordar que $1/3$ se refiere a porciones. Algunas calculadoras también ofrecen la opción de dividir con residuo. Por ejemplo, usando la tecla ÷R en una calculadora Casio Fraction Mate, los alumnos pueden obtener la respuesta 3 R 0.25. Los alumnos pueden reconocer que $0.25 = 1/4$, y recordar que este residuo se refiere a naranjas. En el ejemplo de arriba, los alumnos necesitan relacionar las dos respuestas, $3\ 1/3$ y 3 R $1/4$, y hacer explícito lo que cada uno de los números (3, $1/3$, $1/4$) representa en términos de porciones y naranjas.

Para profundizar la comprensión de los alumnos del residuo como parte de una naranja o como fracción de una porción, el maestro puede dirigir la atención de los alumnos a la relación de la división con la multiplicación. Para obtener el dividendo original a partir de la respuesta, usando el divisor como un factor, los alumnos deben darse cuenta de que en un caso ellos pueden escribir $3\ 1/3 \times 3/4 = 2\ 1/2$, mientras que al usar el residuo tendrían que escribir $3 \times 3/4 + 1/4 = 2\ 1/2$.

RESIDUOS Y FRACCIONES

Una forma en la que los maestros pueden ayudar a los alumnos a entender el residuo en un problema de división de fracciones es dirigir su atención a problemas similares usando números enteros. En ese contexto, los alumnos pueden establecer conexiones entre las respuestas con residuos, por ejemplo, como cuando la respuesta para $7 \div 3$ se escribe como 2 R1, y respuestas expresadas como fracciones. Los alumnos pueden considerar el siguiente problema: "Una porción consiste de tres panquecitos. Hay 7 panquecitos. ¿Cuántas porciones hay?"

Una respuesta es 2 porciones y un panquecito sobrante. Los estudiantes deben interpretar el sobrante en términos de la porción. Los alumnos necesitan darse cuenta de que deben dividir el residuo entre la porción, esto es, necesitan dividir también el residuo entre el divisor. Si una porción son tres panquecitos, entonces un panquecito es $^1/_3$ de una porción. Por tanto, la respuesta es 2 y $^1/_3$ porciones. Por otra parte, cuando los alumnos escriben la respuesta para $7 \div 3$ como 2 R1, necesitan darse cuenta, para este problema, que el 2 se refiere a cuántas porciones, no panquecitos, pero el residuo 1 se refiere a panquecitos.

Después de tratar con problemas semejantes con números enteros, los estudiantes pueden volver al problema con 2 $^1/_2$ naranjas, donde las porciones eran de $^3/_4$ de una naranja. Los estudiantes pueden escribir su respuesta como 3 residuo $^1/_4$, pero necesitan darse cuenta de que el 3 se refiere a porciones y $^1/_4$ se refiere a naranjas. Para poder escribir la respuesta como porciones y fracción de una porción, necesitan comparar el residuo con la porción $^1/_4 \div {}^3/_4 = {}^1/_3$, y así obtener 3 y $^1/_3$ de porción, o sea, 3 $^1/_3$.

USO DE LA IDENTIDAD MULTIPLICATIVA Y DE LOS INVERSOS MULTIPLICATIVOS

Al tratar con problemas de división de fracciones, los estudiantes pueden usar estrategias alternativas basadas en ideas fundamentales como identidad multiplicativa e inversos, y la relación de la división con el factor faltante. Boaler y Humphreys (2005) presentan el método de Cheryl, una estudiante en el 7º grado que usó un método distinto al de medición para explicar por qué $1 \div {}^2/_3 = {}^3/_2$.

Cheryl: *Yo pensé el problema de otra manera, como en un enunciado numérico.*
Maestra: *¿Quieres pasar?*
Cheryl: *OK. Entonces, el problema es uno dividido entre dos tercios y eso es igual a espacio en blanco. Y luego también, ya saben, pueden ir al revés, así que puede ir para cualquier lado. Así que puedes tomar esto y multiplicado por dos tercios es igual a uno. Y así, eso va a ser tres sobre dos, que es también igual a uno y medio.*

$$1 \div {}^2/_3 = \square$$

$$\square \times {}^2/_3 = 1$$

$\square = {}^{3}/_{2}$

El maestro puede ayudar a los alumnos a construir una comprensión de la división de fracciones en general basándose en esta situación especial más accesible. Polya (1962, 1990) resalta la importancia de un caso especial conducente, ya que la solución del problema en el caso especial conducente involucra la solución del caso general (Polya 1990, p. 24). Hay otra ventaja de usar el método de Cheryl como un punto de partida en general. Ma (1999, p. 121) señala la importancia de usar conceptos centrales y las ideas conceptualmente más poderosas de matemáticas, tales como identidad multiplicativa, para conseguir profundidad en la comprensión. La alumna usa, en este caso especial, propiedades de la identidad multiplicativa, del inverso multiplicativo y la relación inversa entre multiplicación y división.

Una forma de ayudar a los alumnos a pasar del caso especial descrito arriba a la división de fracciones en general es enfocar la atención de los alumnos sobre la naturaleza proporcional de la división en una familia de problemas relacionados, en los que el divisor se mantiene constante. Así, por ejemplo, con números enteros los estudiantes pueden buscar patrones y predecir el término anterior y el siguiente de esta sucesión, y hacer explícita la relación entre los dividendos y las respuestas.

$6 \div 3 =$ $\qquad$ $12 \div 3 =$ $\qquad$ $24 \div 3 =$

Los alumnos pueden ver que cuando el divisor se mantiene constante, conforme el dividendo crece por un factor de 2, la respuesta también crece por un factor de 2. Pueden explorar si un patrón similar existe con problemas parecidos de división de fracciones. Los estudiantes pueden empezar con un problema como $1 \div {}^{3}/_{4}$, para el cual conocen la respuesta basándose en el método de Cheryl: $1 \div {}^{3}/_{4} = {}^{4}/_{3}$. Si se mantiene el mismo divisor, ¿qué pasa si el dividendo se multiplica por un factor de ${}^{1}/_{2}$? ${}^{1}/_{2} \div {}^{3}/_{4} = \square$. ¿Qué pasa cuando el dividendo se multiplica por ${}^{3}/_{2}$? ${}^{3}/_{2} \div {}^{3}/_{4} = \square$. De esta manera, los alumnos pueden observar un patrón y ver que en general la respuesta es igual a la repuesta del problema particular $1 \div {}^{3}/_{4}$ multiplicada por el dividendo. Así que la respuesta de ${}^{1}/_{2} \div {}^{3}/_{4}$ es ${}^{1}/_{2} \times {}^{4}/_{3}$. Esto es, la primera fracción por el inverso del divisor. Los alumnos pueden de este modo conectar el método de Cheryl con uno de los métodos enseñados en las escuelas.

Otro aspecto importante en la solución de Cheryl es que ella encontró una manera de tratar con el problema indicado de división como un objeto matemático en sí mismo. Al usar un cuadro vacío para representar el resultado, ella introdujo una notación que puede ser aprovechada por la maestra, de modo que ésta sea capaz de enfocar la atención de los alumnos en que una división como ${}^{4}/_{6} \div {}^{2}/_{6}$ puede ser pensada como un objeto matemático en sí mismo, y no sólo como un proceso o una división indicada. Más adelante, los estudiantes pueden usar una letra como x para indicar el resultado en un problema de división, por ejemplo, ${}^{4}/_{6} \div {}^{2}/_{6} = x$. Usando el método de Cheryl, los estudiantes pueden escribir $x \times {}^{2}/_{6} = {}^{4}/_{6}$ y luego encontrar x multiplicando ambos lados por ${}^{6}/_{2}$. El uso de una letra puede facilitar el tratar con una expresión tal como ${}^{4}/_{6} \div {}^{2}/_{6}$ como un solo objeto matemático. Es importante recordar que incluso la gente que tiene capacidad para tratar con expresiones algebraicas como $x \times {}^{2}/_{6} = {}^{4}/_{6}$ y encontrar x, puede que no vea ${}^{4}/_{6} \div {}^{2}/_{6}$ como un solo objeto (Flores, Turner y Bachman, 2005). Aprender a considerar cadenas de números y símbolos como objetos matemáticos, y no sólo como procesos para encontrar una respuesta no es automático y representa un paso importante en la transición de la aritmética al álgebra (Kieran y Chalouh, 1993).

LA DIVISIÓN COMO FACTOR FALTANTE

David, un alumno de 6º año, usó una estrategia multiplicativa para resolver el siguiente problema de división:

> Se necesita ${}^{4}/_{9}$ de frasco de pigmento azul para mezclar un galón de pintura que tiene el tono de azul celeste. ¿Cuántos galones de pintura se pueden hacer con 13 frascos de pigmento? (Empson y Levi, 2011, p. 200)

La solución de David fue como sigue:

$\_\_\_ \times {}^{4}/_{9} = 13$

$9 \times {}^{4}/_{9} = 4$

$\_\_\_ \times 4 = 13$

$3\ {}^{1}/_{4} \times 4 = 13$

$3\ {}^{1}/_{4} \times 9 \times {}^{4}/_{9} = 13$

$29\ {}^{1}/_{4} \times {}^{4}/_{9} = 13$

David replanteó el problema de dividir $13 \times {}^{4}/_{9}$ como un problema equivalente de factor faltante. Además de usar la conexión entre la división y la multiplicación, David utilizó el principio matemático de la asociatividad de la multiplicación. David descompone el problema original de multiplicación en dos pasos. Al multiplicar $9 \times {}^{4}/_{9}$ encuentra un número entero que le facilita la comparación multiplicativa con 13. El problema $\_\_\_ \times 4 = 13$ es más sencillo de resolver, y puede ser relacionado con el problema original como lo muestra David en los pasos que siguen. El maestro puede ayudar a los alumnos a ver cómo el método de David tiene validez general. Para encontrar la solución de $y \times {}^4/_9 = 13$, David resuelve primero $z \times 4 = 13$, de donde $z = 3\ {}^1/_4$. Como 4 es 9 veces más grande que ${}^4/_9$, la respuesta y debe ser 9 veces más grande que z. El método de David se puede relacionar también con el método –descrito más adelante– de ver la división entre una fracción como la composición de dos operaciones. Si escribimos los problemas como divisiones, el método de David es equivalente a resolver primero $13 \div 4$, y luego multiplicar el resultado por 9 para obtener la respuesta del problema original, $13 \div {}^4/_9$.

USO DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL INVERSO Y DIRECTO

Warrington (1997) reporta diferentes métodos para la división de fracciones usadas por sus alumnos en un grupo autocontenido de habilidad y edades mixtas (de 5º y 6º grado). Los alumnos primero utilizaron la interpretación de medición para encontrar que la respuesta de $1 \div {}^1/_3$ era 3, "ya que un tercio cabe tres veces en uno" (Ibíd., p. 392). Cuando se encontraron con un problema relacionado, $1 \div {}^2/_3$, varios alumnos usaron razonamiento proporcional inverso, diciendo que la respuesta debía ser la mitad de la repuesta del primer problema, ya que ${}^2/_3$ es dos veces más grande que ${}^1/_3$ (Ibíd., p. 392). Aquí, el maestro puede tratar de reforzar esta manera de pensar haciendo que los alumnos consideren problemas relacionados donde el dividendo se mantiene constante y el divisor cambia, y los estudiantes comparan las diferentes respuestas.

$2 \div {}^1/_3 \qquad 2 \div {}^2/_3 \qquad 2 \div {}^4/_3$

En el siguiente ejemplo, los estudiantes trabajaron con el problema:

> Yo compré 5 ${}^3/_4$ libras de cacahuates cubiertos de chocolate. Quiero empacar los dulces en bolsas de media libra, de manera que los pueda congelar y utilizar las porciones más pequeñas. ¿Cuántas bolsas de media libra puedo hacer? (Warrington, 1997, p. 392)

En la clase de Warrington, los alumnos eran alentados –y estaban acostumbrados– a estimar mentalmente la respuesta antes de tratar de obtener una respuesta exacta. Una respuesta estimada puede ayudar a los alumnos a ver la comparación multiplicativa entre las dos fracciones. Cuando los alumnos dan estimaciones rápidas que van de 10 a 12 bolsas (Ibíd., p. 392), pueden tener una mejor idea de cuántas veces es más grande 5 ${}^3/_4$ comparado con ${}^1/_2$.

Para obtener una respuesta exacta al problema de arriba, una alumna dijo que había duplicado cinco y tres cuartos y luego dividido entre uno (Ibíd., p. 393). Esto es, multiplicó tanto el dividendo como el divisor por 2. Cuando sus compañeros le preguntaron si podía hacer eso, ella explicó que no cambiaba el problema. Utilizó el hecho de que el cociente permanece constante cuando los dos términos de la división se multiplican por dos, como en $10 \div 5 = 2$ y $20 \div 10 = 2$. La alumna utilizó el principio de proporcionalidad sin haber recibido instrucción directa acerca de las proporciones.

DIVISIÓN ENTRE UNA FRACCIÓN COMO UNA COMPOSICIÓN DE OPERACIONES

En esta sección vemos cómo los alumnos recurren a la composición de dos operaciones, multiplicación y división con números enteros, para resolver un problema de división entre una fracción como el siguiente.

> Si $3/5$ de una bolsa de caramelo pesan $6\ 3/4$ libras, ¿cuánto pesa una bolsa de caramelo? (Empson y Levi, 2011, p. 204)

Keesha resolvió el problema dividiendo $6\ 3/4$ entre 3 y luego multiplicó por 5. Cuando le pidieron que explicara su pensamiento, ella dijo: "cuando divides entre $3/5$, primero divides entre 3 y sabes cuánto pesa $1/5$ de una bolsa. Luego multiplicas por 5 y eso te dice cuánto pesa la bolsa completa" (Ibíd., p. 205). Usando notación algebraica, podemos representar el método de Keesha de la siguiente manera: si a es cualquier número, b/c una fracción, entonces $a \div b/c = (a \div b) \times c$.

Caroline resolvió el siguiente problema de división de fracciones primero multiplicando y luego dividiendo.

> Sheila bebe $3/4$ de vaso de agua por cada milla que camina. A su botella le caben 5 vasos de agua. ¿Qué tan lejos puede llegar antes de que se le acabe el agua? (Ibíd., p. 205).

Primero encontró cuántos $1/4$ hay en 5, "hay 5 por 4 o 20" (p. 205). Pero como realmente tenía que encontrar cuántos $3/4$ hay en 5, ella se dio cuenta de que el número de $3/4$ que hay en 5 sería la tercera parte del número de $1/4$ que hay en 5. Así que dividió 20 entre 3 y obtuvo la respuesta, usando el hecho $5 \div 3/4 = (5 \times 4) \div 3$. El método de Caroline se puede representar algebraicamente como $a \div b/c = (a \times c) \div b$.

Vemos en estos dos ejemplos que un problema de dividir un número entre una fracción, digamos $3/4$, se puede resolver primero dividiendo entre 3 y luego multiplicando por 4, o primero multiplicando por 4 y luego dividiendo entre 3. A fin de que los alumnos tengan una mejor comprensión, pueden conectar este método con la multiplicación por el inverso multiplicativo y la asociatividad de la multiplicación. Dividir un número entre 4 es lo mismo que multiplicar el número por $1/4$. Así que dividir entre $3/4$, que es lo mismo que dividir primero entre 4 y luego multiplicar por 3, equivale a multiplicar por

$^1/_4$ primero y luego multiplicar por 3. Esto es lo mismo que multiplicar por 3 primero y luego multiplicar por $^1/_4$, que es lo mismo que primero multiplicar por 3 y luego dividir entre 4. En notación algebraica, de $a \times {}^1/_4 \times 3 = a \times 3 \times {}^1/_4$ se sigue que $(a \div 4) \times 3 = (a \times 3) \div 4$.

DIVISIÓN ENTRE UNA FRACCIÓN Y MULTIPLICACIÓN POR EL INVERSO MULTIPLICATIVO DEL DIVISOR

En algunos casos, los alumnos conectarán por sí mismos su forma de dividir fracciones con el procedimiento de multiplicar por el inverso de la segunda fracción. Por ejemplo, Pirie (1988) reporta acerca de un grupo de alumnos de 11 años quienes usaron la estrategia de composición de operaciones para dividir entre una fracción. Para resolver $2\ {}^1/_4 \div {}^2/_3$, su proceso fue primero "multiplicar por 3", lo que les dio $6\ {}^3/_4$, y luego tomar la mitad de eso. Una estudiante describió la estrategia con sus propias palabras:

> Oh, son fáciles. Sólo multiplicas el número de abajo y ves cuántos 2 o 4 o lo que sea caben. Como cuando divides entre $^4/_5$, entonces multiplicas por 5 y ves cuántos 4, o lo que sea, caben y si hay un poco de sobrante, lo divides en cuartos o algo. (Ibíd., p. 3)

El grupo no tuvo más instrucción sobre el tema. Ocho semanas después, la respuesta de la misma alumna para un problema de división entre una fracción fue: "sólo la volteas al revés y multiplicas" (Ibíd., p. 4).

En otros casos en los que los alumnos no establecen la conexión por sí mismos, el maestro puede poner actividades y hacer preguntas para ayudar a los alumnos a ver patrones y establecer la conexión. Una forma de ayudarlos a establecer la conexión es ver tanto la división como la multiplicación como composiciones de operaciones y compararlas.

Algunos alumnos piensan la multiplicación por una fracción también como una composición de operaciones. Bella, una alumna de 4º grado, resolvió el problema $12 \times {}^3/_4$ primero dividiendo $12 \div 4$, y luego multiplicando el resultado por 3 (Empson y Levi, 2011, p. 192). Podemos entonces escribir $12 \times {}^3/_4 = (12 \div 4) \times 3$. Bella usó la misma estrategia para multiplicar ${}^3/_4 \times 22 = (22 \div 4) \times 3$ (Ibíd., p. 193).

De este modo, podemos interpretar la composición de operaciones $(5 \div 3) \times 4$ como un problema de división entre una fracción, $5 \div {}^3/_4$, o como una multiplicación por una fracción, $5 \times {}^4/_3$. Desde luego, la composición equivalente de operaciones $(5 \times 4) \div 3$ da lugar a los mismos problemas de división y multiplicación de fracciones. Así, los alumnos pueden ver que $5 \div {}^3/_4 = 5 \times {}^4/_3$.

DIVISIÓN DE FRACCIONES COMO UNA RAZÓN ENTRE DOS CANTIDADES

Algunas veces los alumnos encuentran común denominador cuando se enfrentan con un problema de división, tal como $^2/_5 \div {}^1/_3$, y tratan de resolver, en su lugar, el problema equivalente $^6/_{15} \div {}^5/_{15}$ (Warrington, 1997). La alumna que cambió el problema explicó por qué había encontrado común denominador para las fracciones: "Porque es más fácil para mí dividirlas ahora y todavía son el mismo número" (Ibíd., p. 393).

Dividir fracciones con el mismo denominador es un contexto donde se puede enfatizar la razón entre dos fracciones. Los estudiantes pueden usar representaciones concretas de fracciones, tales como modelos de plástico en los que los valores son proporcionales a las áreas, para dividir fracciones en conjuntos de problemas, tales como $^5/_4 \div {}^3/_4$, $^5/_8 \div {}^3/_8$, $^5/_{10} \div {}^3/_{10}$, $^5/_{12} \div {}^3/_{12}$. Para cada problema de división de dos fracciones, tanto el dividendo como el divisor tienen el mismo denominador, y de un problema a otro del conjunto, los numeradores para los dividendos son iguales entre sí; y de un problema a otro, los numeradores para los divisores son iguales entre sí. Para todos los problemas, la relación entre el número de piezas del dividendo y el número de piezas del divisor es la misma, pero para cada problema se utilizan piezas de diferente tamaño. Al resolver tales conjuntos de problemas, los estudiantes se dan cuenta de que en situaciones en las que dos fracciones tienen el mismo denominador, el resultado de la división de una fracción por la otra sólo depende de la razón de los numeradores, no del tamaño de las piezas. La razón del número de piezas entre dividendo y divisor en los ejemplos de arriba es la misma que 5 a 3. Por tanto, todos los problemas tienen la misma respuesta: $5 \div 3 = {}^5/_3$. La conexión entre división y razón en el contexto de fracciones puede ayudar a los alumnos a desarrollar su pensamiento multiplicativo para comparar fracciones.

COMENTARIOS FINALES

Como Kieren (1992) señala, los conceptos de fracciones son inherentemente multifacéticos (p. 330). Los investigadores han identificado varios constructos relacionados con las fracciones y los números racionales (Behr, Lesh, Post y Silver, 1983; Kieren, 1976, 1988), tales como parte-todo, medida, cociente, razón y operador. Necesitamos dar a los estudiantes la oportunidad de desarrollar esas facetas distintas y hacer transiciones entre ellas. Desafortunadamente, muchos estudiantes que reciben instrucción limitada a fracciones en el contexto parte-todo tienen una comprensión empobrecida de número racional (Lamon, 1999, p. 4).

También existen distintos significados e interpretaciones para la división de fracciones, tales como medición, partición, factor faltante, razón y determinación de la razón unitaria (Flores, 2002; Sinicrope, Mick y Kolb, 2002). Los alumnos interactúan mentalmente con estos constructos, significados e interpretaciones en formas complejas y dependiendo del contexto o situación. En un principio, las situaciones más comunes para ilustrar el concepto de división implican un reparto o distribución, por ejemplo, repartir siete pays entre cuatro amigos. En este tipo de situaciones, una fracción puede ser, de manera natural, el dividendo (repartir $\frac{3}{4}$ de pay entre dos amigos) y el cociente, pero no es fácil dar una interpretación cuando el divisor es una fracción. Los ejemplos dados en el artículo también ilustran que diferentes situaciones pueden dar lugar a diferentes estrategias. Por ejemplo, en situaciones donde se utiliza el significado de medición (cuota) de la división, en las que el divisor es una fracción y el dividendo un número natural, una fracción mixta o una fracción, las estrategias más utilizadas por los alumnos son la sustracción repetida, razonamiento proporcional y composición de operaciones. Otro tipo de soluciones (identidad multiplicativa, inversos multiplicativos, factor faltante, razón entre dos cantidades) pueden emerger cuando los estudiantes enfrentan situaciones que se plantean de manera exclusivamente numérica ($1 \div {}^{2}/_{3}$).

En un dominio complejo, tal como las estructuras multiplicativas, es necesario ayudar a los estudiantes a formar una red dinámica de relaciones y conexiones entre los distintos constructos y las diferentes interpretaciones de las operaciones, de modo que los alumnos puedan cambiar con facilidad de una perspectiva a otra que pueda ser más adecuada para entender las relaciones matemáticas en la situación. Adicionalmente, al alternar las formas en las que los estudiantes examinan una situación, ellos pueden desarrollar una mejor comprensión desde distintas perspectivas. Por ejemplo, utilizar una perspectiva de razón puede proporcionar una comprensión matemática distinta que una perspectiva de operador.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D. L. (1990), "Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 21, núm. 2, pp. 132-144.

Barlow, A. T. y J. M. Drake (2008), "Assessing understanding through problem writing: Division by a fraction", *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol. 13, núm. 6, pp. 326-332.

Behr, M., G. Harel, T. Post y R. Lesh (1993), "Rational numbers: Towards a semantic analysis - emphasis on the operator construct", en T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 13-47.

Behr, M., R. Lesh, T. Post y E. Silver (1983), "Rational-number concepts", en R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Nueva York, Academic Press, pp. 91-126.

Boaler, J. y C. Humphreys (2005), *Connecting Mathematical Ideas: Middle School Video Cases to Support Teaching and Learning*, Portsmouth, Heinemann.

Clarke, D. M., A. Roche y A. Mitchell (2008), "10 practical tips for making fractions come alive and make sense", *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol. 13, núm. 7, pp. 373-380.

Day, M. M. (2010), *Middle school mathematics students' justification schemes for dividing fractions*, tesis de doctorado, Tempe, Arizona State University.

Duckworth, E. R. (2006),*"The Having of Wonderful Ideas" and Other Essays on Teaching and Learning"*, 3a edición, Nueva York, Teachers College Press.

Empson, S. B. y L. Levi (2011), *Extending Children's Mathematics: Fractions and Decimals*, Portsmouth, Heinemann.

Flores, A. (2002), "Profound understanding of division of fractions", en B. Litwiller y G. Bright (eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions, 2002 NCTM Yearbook*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 237-246.

Flores, A. y M. D. Priewe (2013), "Orange you glad I did say 'fraction division'?", *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol. 19, núm. 5, pp. 288-293.

Flores, A., E. E. Turner y R. C. Bachman (2005), "Posing problems to develop understanding: Two teachers make sense of division of fractions", *Teaching Children Mathematics*, vol. 12, pp. 117-121.

Harel, G. y J. Confrey (eds.) (1994), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, Albany, State University of New York Press.

Kieran, C. y L. Chalouh (1993), "Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra", en D. T. Owens (ed.), *Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 179-198.

Kieren, T. E. (1976), "On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers", en R. Lesh (ed.), *Number and Measurement: Papers from a Research Workshop*, Columbus, ERIC/SMEAC (Science, Mathematics, and Environmental Education Information Analysis Center), pp. 101-144.

——— (1988), "Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development", en J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 162-181.

——— (1992), "Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction", en G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*, Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 323-371.

Kribs-Zaleta, C. (2008), "Oranges, posters, ribbons, & lemonade: Concrete computational strategies for dividing fractions", *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol. 13, núm. 8, pp. 453-457.

Lamon, S. J. (1999), *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*, Mahwah, Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., T. Post y M. Behr (1988), "Proportional reasoning", en J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 93-118.

Lobato, J. y A. B. Ellis (2010), *Developing Essential Understanding of Ratios, Proportions & Proportional Reasoning*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics.

Ma, L. (1999), *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*, Mahwah, Lawrence Erlbaum Associates.

Pirie, S. E. B. (1988), "Understanding: Instrumental, relational, intuitive, constructed, formalised...? How can we know?", *For the Learning of Mathematics*, vol. 8, núm. 3, pp. 2-6.

Polya, G. (1962), *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*, vol. 1, Nueva York, John Wiley & Sons.

——— (1990), *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematics*, vol. 1, Princeton, Princeton University Press.

Simon, M. A. (1993), "Prospective elementary teachers' knowledge of division", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 24, núm. 3, pp. 233-254.

Sinicrope, R., H. W. Mick y J. R. Kolb (2002), "Interpretations of fraction division", en B. Litwiller y G. Bright (eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions, 2002 NCTM Yearbook*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 153-161.

Smith, J. P. (1995), "Competent reasoning with rational numbers", *Cognition and Instruction*, vol. 13, núm. 1, pp. 3-50.

Streefland, L. (1991), *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Thompson, P. W. (1994), "The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate", en G. Harel y J. Confrey (eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, Albany, State University of New York Press, pp. 179-234.

Thompson, P. W. y L. A. Saldanha (2003), "Fractions and multiplicative reasoning", en J. Kilpatrick, W. G. Martin y D. Schifter (eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 95-113.

Toluk, Z. (1999), *Children's Conceptualizations of the Quotient Subconstruct of Rational Numbers*, tesis de doctorado, Tempe, Arizona State University.

Warrington, M. A. (1997), "How children think about division with fractions", *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol. 2, núm. 6, pp. 390-394.

DATOS DEL AUTOR

Alfinio Flores Peñafiel
University of Delaware, Estados Unidos
alfinio@math.udel.edu

Afectos y diferencias de género en estudiantes de secundaria de bajo desempeño en matemáticas

Sonia Ursini

Resumen: Se estudian las actitudes, las creencias y la autoconfianza para trabajar en matemáticas de 192 estudiantes de 3º de secundaria (96 hombres y 96 mujeres), de bajo desempeño matemático, de la Ciudad de México. Se resalta el contexto sociocultural y económico en el que ocurren estas manifestaciones afectivas. A pesar de las carencias económicas y culturales, la falta de apoyo familiar e institucional, la violencia que viven dentro y fuera del aula de matemáticas y una enseñanza basada en la memorización, el estudiantado –sin diferencias de género– mostró tener un buen potencial para aprender matemáticas y la mayoría consideró que no hay diferencias de género en la capacidad para aprenderlas. Se encontraron diferencias de género en las actitudes hacia las matemáticas en general (más polarizadas, o positivas o negativas, entre las mujeres) y hacia áreas matemáticas específicas. La autoconfianza para trabajar en matemáticas resultó ser, en general, baja (más polarizadas entre las mujeres), si bien los varones mostraron, en general, más seguridad en sí mismos que las mujeres.

Palabras clave: actitudes, creencias, autoconfianza, desempeño matemático, bajo rendimiento en matemáticas, género y matemáticas.

Abstract: Attitudes, beliefs and self-confidence in mathematics regarding 192 ninth-grade low achievers (96 girls and 96 boys) were studied in Mexico City. The sociocultural and economic environment where these affects appear is stressed. In spite of economic hardships, cultural gaps, lack of familiar and institutional supports, violence inside and outside mathematics classroom, and traditional mathematics teaching, these students, without gender differences, showed a good potential for mathematics learning and the majority considered that there are no gender differences in the capability to learn this subject. Gender differences were found in attitudes towards mathematics in general (more polarized, or positive or negative, among women) and towards specific mathematics areas. In general, their self-confidence was low, although more polarized for women; however, men were more self-confident than women.

Keywords: attitudes, beliefs, self-confidence, mathematics achievement, low mathematics performance, gender and mathematics.

Fecha de recepción: 13 de septiembre de 2013; fecha de aceptación: 27 de diciembre de 2013.

INTRODUCCIÓN

Los resultados de pruebas estandarizadas aplicadas a gran escala (por ejemplo Pisa, Excale, Enlace) muestran que, en matemáticas, el alumnado de escuelas públicas de educación básica en México obtiene, en promedio, resultados que se ubican en los niveles de logro insuficiente o elemental. Estos resultados sugieren carencias graves en relación a esta asignatura, que se enfatizan aún más cuando se analizan los resultados que obtienen las mujeres (INEE, 2005).

Las investigaciones realizadas en las últimas décadas, desde distintos enfoques teóricos, han puesto en evidencia una multiplicidad de elementos que pueden estar interviniendo en el desempeño matemático y las diferencias de género y, entre éstos, ha sido resaltada, en particular, la importancia de los factores afectivos. El interés en los aspectos afectivos en relación a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas aparece desde la década de 1970, con los estudios sobre los obstáculos que enfrentan las mujeres en el aprendizaje de esta disciplina (Fennema y Sherman, 1976), y ha crecido al pasar de los años (por ejemplo, McLeod, 1992; Gómez-Chacón, 2003). En particular, se ha estudiado cómo influyen las creencias y concepciones (Andrews y Hatch, 2000); la motivación (Middleton y Spanias, 1999); las actitudes (Hernández y Gómez-Chacón, 1997; Morales et ál., 1998; Eudave, 1994; McGraw, Lubienski y Strutchens, 2006; Kaino, 2008; Chamdimba, 2008; Pierce, Stacey y Barkatsas, 2007; Ma, 2008; Ursini y Sánchez, 2008), y la autoconfianza para trabajar en matemáticas (Jacobs et ál., 2002; Watt, 2004; Chamdimba, 2008). Los estudios realizados en estos rubros han reportado, por ejemplo, la existencia de creencias generalizadas y muy arraigadas de que las mujeres son menos capaces que los hombres para aprender y trabajar en matemáticas (Eccles et ál., 1989), señalando que estas creencias se van instalando y fortaleciendo en el aula de matemáticas, sobre todo a partir del tercer grado de educación básica (Crawford et ál., 1989). Al estudiar las diferencias de género relativas a las actitudes hacia las matemáticas y la autoconfianza para trabajar en matemáticas, se ha encontrado de manera recurrente que las niñas suelen tener una actitud más negativa que los varones (Hernández y Gómez-Chacón, 1997; Morales et ál., 1998; Eudave, 1994; McGraw, Lubienski y Strutchens, 2006; Kaino, 2008; Chamdimba, 2008; Pierce, Stacey y Barkatsas, 2007; Ma, 2008; Ursini y Sánchez, 2008), y que si bien, en general, la autoconfianza va disminuyendo a lo largo de la adolescencia, es siempre más alta entre los varones (Eccles et ál., 1989; Jacobs et ál., 2002; Watt, 2004; Ursini y Sánchez, 2008).

Sin embargo, a pesar del rigor de los estudios, a menudo los resultados no coinciden y muestran inconsistencias. El porqué de estas discrepancias ya lo sugería Fennema (1996) al subrayar que los resultados variaban de acuerdo a distintos factores, como el estatus socioeconómico, la etnicidad, la escuela y el profesor. Se ponía, así, en evidencia que los logros matemáticos y las diferencias de género, así como los factores afectivos a ellos asociados, dependen fuertemente del contexto en el cual se trabaja, del entorno sociocultural y económico al que pertenece y en el que se va educando el estudiantado. La importancia de considerar el entorno en el que viven y se desarrollan los estudiantes en relación a los aspectos afectivos ha sido reiterada en años más recientes. Por ejemplo, Gómez-Chacón (2000) ha señalado la importancia de no restringir el estudio de la reacción afectiva de los estudiantes hacia las matemáticas y la motivación por el aprendizaje de las mismas, a situaciones de laboratorio o de aula, y la necesidad de tener en cuenta la realidad social que produce estas reacciones y el contexto sociocultural de los alumnos.

A pesar de ello, son pocos todavía los estudios que tratan de contextualizar estos elementos en la realidad social en que ocurren, indagando su origen y relacionándolos con las convenciones culturales, las creencias y las representaciones sociales que dominan en cierto grupo, dado que ello demanda una base amplia de comprensión del contexto sociocultural, dentro y fuera del ámbito escolar que influye en los estudiantes.

El estudio,[1] del cual se analizan algunos resultados en este artículo, parte de estas premisas. Su propósito fue profundizar en el conocimiento de los factores que pueden estar incidiendo en el desempeño de alumnas y alumnos de secundaria de bajo rendimiento en matemáticas, prestando particular atención a las diferencias de género. Considerando que los afectos que el estudiantado desarrolla en relación a la matemática escolar juegan un papel importante en su desempeño en esta disciplina, decidimos indagar, en primera instancia, las actitudes, las creencias y la autoconfianza que desarrollan hacia las matemáticas, resaltando el entorno sociocultural en el que se desenvuelven. El estudio se realizó a partir de los siguientes supuestos teóricos:

- Las creencias y la actitud hacia las matemáticas, al igual que la autoconfianza para trabajar en esta disciplina, son factores que influyen en el desempeño matemático, y dependen del grupo social de pertenencia y el ambiente que se crea en el salón de clase.
- Las creencias y la actitud hacia las matemáticas, al igual que la autoconfianza para trabajar en esta disciplina, son constructos socioculturales que reflejan la concepción de género dominante en una sociedad en un dado momento histórico y, por lo tanto, pueden ser distintos para hombres y mujeres.
- El género es una construcción sociocultural que, a partir de la diferencia sexual, determina formas específicas de conducta diferenciadas por sexo. Por lo tanto, las diferencias que se encuentran entre varones y mujeres en relación a distintos aspectos, y en particular los relacionados con las matemáticas, son productos culturales y no atribuibles al sexo biológico de la persona.
- Conocer las creencias y la actitud hacia las matemáticas, así como la autoconfianza para trabajar en esta disciplina, de los y las estudiantes puede proporcionar elementos útiles para la elaboración de estrategias de enseñanza que pretendan propiciar una mayor equidad de género (en el salón de clase, en los

[1] Este estudio se realizó en el marco del Convenio INMUJERES-Cinvestav, 2009. Para el reporte completo, véase "Género y desempeño en matemáticas en el tercer grado de secundaria", en *Género y desarrollo. Investigación para la igualdad sustantiva de las mujeres*, INMUJERES, 2010, pp. 54-99. www.inmujeres.gob.mx

libros de texto, en el diseño de exámenes) y, en consecuencia, propiciar una mayor equidad en el aprovechamiento escolar.

METODOLOGÍA

El estudio fue de tipo exploratorio, transversal y se realizó en el medio natural en que se desenvolvían los participantes. Se trata de una investigación empírica mixta, en la que se utilizó una combinación de métodos cuantitativos y cualitativos con el propósito de obtener un primer panorama del conocimiento matemático del alumnado participante, sus actitudes hacia las matemáticas y el ambiente sociocultural en el que se desarrollan. En este artículo se revisan y discuten los resultados de la parte cualitativa del estudio. Se invita al lector interesado en el análisis cuantitativo detallado de los datos, consultar la publicación *Género y desarrollo. Investigación para la igualdad sustantiva de las mujeres* (INMUJERES, 2010, pp. 54-99).

Escenario

A partir de la base de datos relativa a las escuelas secundarias del Distrito Federal,[2] se procedió a escoger una muestra de la siguiente manera: de las 105 escuelas públicas donde se presentaron diferencias de género significativas en la media de respuestas correctas a las preguntas de la Prueba Enlace 2008, se descartaron, para este primer estudio exploratorio, aquéllas cuya población era menor a 30 alumnos. Quedaron, así, 56 escuelas (generales y técnicas) que figuran entre las que tienen mayor rezago en desempeño matemático y desigualdad por sexo. A partir de éstas, se determinó el tamaño de muestra adecuado para este estudio exploratorio, 16 escuelas, que se eligieron de manera aleatoria entre las 56, resultando cuatro secundarias técnicas y 12 generales.

Participantes

En cada una de estas 16 escuelas se seleccionaron 12 estudiantes (6 mujeres y 6 hombres) de 3º de secundaria de manera aleatoria, usando el registro de asistencia del día de la toma de datos. La gran mayoría de estos 192 estudiantes tenía 14 años cumplidos al momento del estudio. En el estudio participaron también 14 directivos y 15 profesores de matemáticas de las mismas escuelas, así como 121 padres/madres/tutores.

[2] Fuente: http://enlace2008.sep.gob.mx

Procedimiento

Los resultados de la Prueba Enlace 2008 proporcionaban evidencias del bajo desempeño matemático del estudiantado de las escuelas participantes; sin embargo, se consideró pertinente aplicar un examen de matemáticas con el propósito de contar con información más precisa acerca de la población con la que se iba a trabajar. Se diseñó un examen de 30 reactivos, considerando los conocimientos y las habilidades que señala el programa oficial de matemáticas vigente, en relación a los tres ejes programáticos (Díaz, 2004). Diez reactivos correspondían al eje *Sentido numérico y pensamiento algebraico*; 14 al eje *Forma, espacio y medida*; seis al eje *Manejo de la información*. El examen se piloteó con 12 estudiantes (6 mujeres y 6 hombres) de 3º de secundaria de una escuela pública y se incorporaron los ajustes pertinentes. Los contenidos evaluados fueron los del primer bloque del programa de matemáticas de tercer grado de secundaria y algunos contenidos de grados anteriores. Los resultados se analizaron por escuela, sexo, turno y edad. Se contabilizó el número de aciertos por alumno y se calculó la media aritmética de todos los alumnos en cada variable. También se realizó un análisis según el número de aciertos por reactivo, diferenciando estos resultados por sexo.

Para recabar información relativa al contexto sociocultural y económico del alumnado participante, se diseñó un cuestionario de 69 preguntas (cada una con varios incisos) de opción múltiple para padres/madres/tutores, con base en el cuestionario de contexto aplicado en la Prueba Enlace 2008. Las preguntas indagaban acerca del capital cultural (escolaridad de los padres, recursos de apoyo para los alumnos en la casa, participación de los padres/madres/tutores en la escuela, expectativas de estudio para sus hijos, ayuda en matemáticas que recibe el estudiante en la casa y en la escuela) que rodeaba al estudiante y el nivel económico de su familia. La aplicación del cuestionario fue indirecta, solicitando a cada alumna/alumno que lo llevara a su casa para que sus padres/madres/tutores lo contestaran y que lo regresaran al día siguiente.

Con el propósito de tener un panorama acerca del ambiente escolar en el que se desarrolla la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, se elaboraron dos guías para entrevista semiestructurada, una dirigida a directivos (ejemplo de preguntas: *En las pruebas nacionales, al parecer, les va mejor a los hombres, ¿usted qué piensa al respecto?; ¿Qué opinan las mamás/papás/tutores de sus estudiantes, sobre el aprovechamiento en matemáticas? ¿Qué estrategias ha implementado para mejorar estos resultados?*) y otra a profesores de matemáticas (ejemplo de preguntas: *¿Cómo se siente al impartir la clase de matemáticas? ¿Qué características tienen las personas a las que les va bien en matemáticas? ¿Quiénes participan más en su clase, las mujeres o los hombres, por qué? ¿Sus estudiantes saben lo que usted espera de ellas/ellos, se los dice?*) de las escuelas participantes. El piloteo se realizó con el director y la profesora de matemáticas de la escuela en la que se probó el examen de matemáticas. Las entrevistas se realizaron de forma individual dentro de los planteles educativos y fueron grabadas.

Con el fin de recolectar datos relativos a las actitudes, las creencias y la autoconfianza para trabajar en matemáticas del estudiantado, se usaron los siguientes instrumentos:

- La *escala* AMMEC, de Ursini, Sánchez y Orendain (2004). Se trata de una escala tipo Likert, de cinco puntos, diseñada para medir las actitudes hacia las matemáticas y las matemáticas enseñadas con computadora. Fue diseñada siguiendo el modelo tripartita propuesto por Smith (1947), esquematizado por Rosemberg y Hovland (1960) y trabajado por Breckler (1984), que consideró que las actitudes están formadas por tres elementos: el afectivo, el cognitivo y el conductual. Si bien la *escala* AMMEC consta de 29 reactivos organizados en tres subescalas: AM (Actitud hacia las Matemáticas), 11 reactivos; AMC (Actitud hacia las Matemáticas enseñada con Computadora), 11 reactivos; CM (auto-Confianza para trabajar en Matemáticas), siete reactivos; para este estudio se emplearon sólo dos: las subescalas AM y CM (Alpha de Cronbach: AM = 0.81; CM = 0.68; carga factorial por reactivo muy próxima o mayor a 0.5). Para más detalles sobre la validez y confiabilidad de esta escala, véase Ursini, Sánchez y Orendain (2004).
- Para detectar eventuales diferencias de género, se agruparon las respuestas diferenciándolas por el sexo del alumnado. Los datos se analizaron aplicando procedimientos de estadística descriptiva, medidas de tendencia central, de dispersión y análisis de frecuencia.
- A continuación se presentan las 17 afirmaciones que conformaron el instrumento que se aplicó en esta fase del estudio, distinguiendo las dos subescalas:

<table>
<tr><td>1</td><td rowspan="11">Subescala AM</td><td>Me gusta la clase de matemáticas.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>La clase de matemáticas es aburrida.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Las matemáticas son difíciles.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Matemáticas es la materia que me gusta más.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Las matemáticas son divertidas.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Me gustan las matemáticas.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Es importante aprender matemáticas.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Me gustaría usar las matemáticas cuando vaya a trabajar.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Me gusta aprender matemáticas con computadora.</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Tengo dificultad para entender lo que me piden en los ejercicios de clase o las tareas.</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Puedo resolver los problemas planteados en los ejercicios de clase o las tareas.</td></tr>
</table>

12	Subescala CM	Me gusta proponer la solución a problemas antes que los demás.
13		Me gusta ser líder de mi equipo.
14		Si un problema no sale a la primera, le busco hasta resolverlo.
15		Me gusta resolver problemas de matemáticas algo difíciles.
16		Me gusta cuando en el equipo discutimos cómo resolver un problema de matemáticas.
17		En el equipo defiendo mis ideas.

- Se diseñó un *inventario de matemáticas* integrado por 14 reactivos seleccionados para detonar factores afectivos en relación a esta disciplina. Su propósito era explorar más a fondo las creencias, actitudes y autoconfianza para trabajar en matemáticas del estudiantado participante. Los reactivos se escogieron entre los que componen la Prueba Enlace 2008 y para los cuales se habían reportado diferencias significativas o a favor de los varones o a favor de las mujeres. Los 14 reactivos cubren temas de las seis áreas sobre las que indaga la prueba mencionada: aritmética (números naturales, números fraccionarios y decimales, números con signo); análisis de información (variación proporcional); álgebra (cálculo algebraico, solución de ecuaciones); geometría (medición y cálculo geométrico); estadística (manejo de la información), y probabilidad (experimentos aleatorios). Para la aplicación de este instrumento se usó la técnica de asociación libre que permite acceder a elementos implícitos o latentes que pueden quedar enmascarados en las producciones discursivas (Abric, 1994), y proporciona información referente a emociones y sentimientos en relación al texto que se presenta. En una hoja de papel se presenta el reactivo y a su lado aparecen tres celdas vacías en las que el estudiante escribe, en diferentes momentos y a petición del investigador, las palabras que le evoca el reactivo. Todas las sesiones fueron grabadas.
- Para profundizar en las opiniones, creencias y actitudes del estudiantado participante, se usó la técnica de *grupos focales*. En cada una de las 16 escuelas se formaron dos grupos de seis estudiantes, uno de mujeres y otro de hombres. Esta división entre hombres y mujeres se hizo con el propósito de facilitar la libre expresión de los participantes y detectar eventuales diferencias de género (ejemplo de preguntas guía: *¿Cómo se sienten en la clase de matemáticas? ¿Qué les resulta fácil/difícil en matemáticas? ¿Para qué sirven las matemáticas? Hay quien piensa que a los hombres les va mejor en matemáticas, ¿ustedes qué piensan de eso y por qué? ¿Cómo les gustaría que fuera la clase de matemáticas? ¿Qué creen que espera su maestra/o de ustedes en su asignatura?*). Todas las sesiones fueron videograbadas. Para un primer acercamiento al análisis del discurso de los *grupos focales* se usó el programa Alceste (Reinert, 1986). Los datos obtenidos en los grupos focales, con el inventario de matemática, así como con el cuestionario

dirigido padres/madres/tutores, fueron analizados con la técnica de análisis de contenido (Bardin, 1977).

Estos instrumentos fueron sometidos a una evaluación interjueces con especialistas en el ramo, y se pilotearon con 12 (6 mujeres y 6 hombres) de los estudiantes de 3º de secundaria con los que se había piloteado el examen de matemáticas.

RESULTADOS[3]

Contexto sociocultural y económico que rodea al alumnado

Para empezar a esbozar un cuadro del contexto socioeconómico y cultural en el que vive y se desarrolla el alumnado de bajo desempeño matemático, se consideraron las respuestas que 121 madres/padres/tutores dieron al cuestionario de contexto, así como lo expresado en las entrevistas por los 14 directivos y 15 profesores de matemáticas que aceptaron participar.

Las respuestas al cuestionario de contexto indican que los ingresos económicos mensuales por familia oscilaban, para el 75% de los encuestados, entre 1 500 y 8 000 pesos, lo que permite ubicar a los estudiantes participantes como pertenecientes a una clase económicamente baja o media baja. Más de la mitad de las madres de familia trabajan fuera del hogar como obreras, trabajadoras de limpieza, meseras, cocineras, vendedoras, oficinistas, secretarias; en jornadas de ocho o más horas diarias (36.4%), o entre cuatro y ocho horas (18.6%). Las demás se dedican a labores del hogar. Casi la totalidad de los padres trabaja fuera del hogar como obreros, albañiles, jardineros, empleados; en jornadas de ocho horas diarias y pasan poco tiempo con los hijos. Si bien todos afirmaron que sus hijos no trabajan fuera del hogar, en los grupos focales emergió que había alumnos que trabajaban como empacadores en los supermercados. El grado escolar de la mayoría de los padres y madres fue de secundaria o bachillerato. La mayoría reportó que en la casa viven cuatro personas, ocupan dos cuartos para dormir y cuentan con los servicios básicos. Todos tienen televisión y poco más de la mitad tiene computadora e internet. La gran mayoría de los padres/madres/tutores lee muy poco, sólo el 27% manifestó leer un par de veces por semana, sobre todo revistas de entretenimiento e informativas. Sus hijos tampoco leen, pero consultan enciclopedias para poder hacer las tareas. De lo anterior se desprende que el capital cultural (Bourdieu, 1979) de estos estudiantes y sus familias es muy pobre. La gran mayoría de los padres/madres/tutores tienen la ambición de que sus hijos estudien, si bien manifiestan que a éstos no les agrada mucho ir a la escuela. La mayoría manifestó no recibir nunca

[3] Al reportar los diálogos textuales de los y las participantes, se asignó un número a cada quien (por ejemplo, Alumna 1, Alumna 2, etc.) con el propósito de diferenciarlos; sin embargo, esta numeración no identifica al mismo sujeto a lo largo de todos los diálogos que se incluyen.

recomendaciones por parte de los profesores con el propósito de apoyar a sus hijos, aunque, al mismo tiempo, reconocieron que no acuden con frecuencia a la escuela por falta de tiempo, y que sólo de vez en cuando revisan las tareas de sus hijos y están al pendiente de sus obligaciones escolares. A pesar de las bajas calificaciones de sus hijos, la gran mayoría consideró que van bien (44%) o regular (44%) en matemáticas. En relación a las matemáticas y su aprendizaje, quedó en evidencia que los padres/madres/tutores de estos estudiantes no tienen una opinión razonada y fundamentada al respecto, dado que en sus respuestas manifestaron sólo creencias estereotipadas, considerando que es una materia difícil, para la que se necesita inteligencia, creatividad y disciplina, y que es importante que sus hijos/hijas las aprendan y pasen los cursos, a pesar de que no siempre resultan tan necesarias. Esta visión fue parcialmente corroborada por los y las alumnas en los grupos focales, cuando señalaron que para sus padres es muy importante que aprendan matemáticas, y que los presionan para que obtengan buenas calificaciones.

Las entrevistas hechas a directivos y profesores proporcionaron información adicional acerca del ambiente sociocultural en el que vive y se desarrolla el estudiantado. Atribuyeron el bajo rendimiento a la situación familiar de los educandos (bajo nivel económico, social, cultural y violencia intrafamiliar). Por ejemplo, algunos profesores comentaron lo siguiente:

Profesor 1: *Aquí hay muchos factores que intervienen en el de que los jóvenes no tengan, este, interés [por aprender]. Uno de ellos es, este, el ámbito familiar: no ayuda mucho. Yo no sé cuánto conozcan [ustedes] la zona, pero estamos alrededor de zonas bastante conflictivas en los núcleos familiares. Generalmente, esta zona que está en la parte de las barrancas, este, hay muchos papás que se drogan, que se dedican a robar, que no trabajan. Entonces, todo eso los jóvenes lo viven todos los días. Y para ellos, no es más importante la escuela, que vivir mejor. Esto afecta demasiado.*

Profesora 1: *Sí, hay muchas cosas, no nada más son los alumnos, o el medio social en que se desenvuelven [...] la falta de cultura de sus padres, la falta de interés de que ellos estén mejor que ellos mismos, [...] vive el papá y la mamá, el hijo casado, en la misma casa, y la cuñada, la abuelita, o sea, todo el mundo, así acostumbran hacer, así acostumbra la mayoría de la gente o en un solo terreno varias casitas chiquitas,...*

Profesora 2: *Me atrevo a decir que más o menos la mitad de mis niños son de padres divorciados o están separados, únicamente tienen al papá o solamente tienen a la mamá. Entonces, las condiciones sociales son muy marcadas, no tienen, o sea, las aspiraciones que tienen aquí en la escuela son muy pocas, ¿no?*

Los directivos y profesores señalaron, además, como muy problemática la situación de los turnos vespertinos:

Director: *...en turno vespertino hay chicos ya muy crecidos, chicos con muchos problemas económicos, problemas ya sociales, problemas de adicción...*

Las respuestas dadas al cuestionario de contexto, junto con las entrevistas hechas a los directivos y docentes, proporcionan información que permite tener un primer panorama acerca del ambiente sociocultural y económico en el que viven y se desarrollan muchos de los estudiantes de bajo desempeño matemático de la Ciudad de México, sin necesariamente considerar que éste sea la única causa de su bajo desempeño. Sería muy necesario realizar más estudios indagando, por ejemplo, las condiciones en las que vive el estudiantado con un desempeño mejor y profundizar sobre los factores comunes que caracterizan a los estudiantes de bajo, medio o alto desempeño.

El examen de matemáticas

Los resultados del examen de matemáticas confirmaron el muy bajo desempeño del estudiantado participante. El promedio general en el examen de 30 reactivos fue de 6.6 aciertos. Hubo alumnos que tuvieron cero aciertos y el máximo fue 16. Si bien hubo mujeres con mejores resultados que los hombres (el rango de aciertos osciló entre 0 y 16, y el de los hombres entre 1 y 11), la diferencia no fue significativa. En cuanto a los ejes programáticos, el mejor desempeño se obtuvo en *Manejo de la información*, y el más bajo en *Forma, espacio y medida*. Las diferencias entre hombres y mujeres no fueron significativas, a pesar de que en los tres ejes las mujeres tuvieron, en promedio, un mejor desempeño. No se encontró que el turno, sexo, edad, eje y tipo de tareas incidieran de manera significativa en el desempeño de los estudiantes que, evidentemente, no cumplían con las expectativas de los planes y programas de estudio.

A pesar de estos resultados tanto los padres/madres/tutores como los directivos y profesores aseguraron que existen diferencias de género en favor de los varones, que son más aptos para las matemáticas, a pesar de que las mujeres pueden ser mejores alumnas. Los directivos y profesores explicaron que esta convicción proviene de su propia experiencia y atribuyeron las diferencias a factores biológicos y sociales. En relación al aprendizaje de las matemáticas, caracterizaron a los varones como: hábiles para captar, confiados, analíticos, críticos, abiertos, de gran capacidad intelectual, prácticos, directos, capaces de poner atención y llegar a la abstracción, seguros pero descuidados. Por lo contrario, caracterizaron a las mujeres como: participativas, dedicadas, responsables, dinámicas, estudiosas, comprometidas, ansiosas, nerviosas, creativas e inquietas, disciplinadas, puntuales, limpias y obedientes, lo que finalmente las hace mejores alumnas (por ser obedientes, disciplinadas, etc., pero no necesariamente por su capacidad intelectual). Un profesor defendió su punto de vista esgrimiendo los siguientes argumentos:

Profesor: *Yo he analizado el comportamiento del cerebro humano al analizar esta situación. Ahora, yo sé que el cerebro de los hombres trabaja con el cerebro derecho, las mujeres trabajan con el cerebro izquierdo. Su cerebro izquierdo de las mujeres es, este, trabajan mucho los sentimientos. El hombre, el cerebro derecho, con él trabajan más, es más analítico. Eso les ayuda mucho. Obvio que también he entendido que lo mejor que puede suceder es cuando ambos cerebros trabajan por igual, los resultados son maravillosos. Eh, eso lo, lo he buscado y lo he encontrado. Entonces, puedo entender por qué los jóvenes no necesitan estudiar tanto. Ellos, les explico, pero ellos ven, aprenden y se dan la vuelta, y ya, ya. A veces ni trabajan. Pero si les aplico un examen a una semana, ellos lo hacen muy bien. Las mujeres no, son muy atentas, son muy cuidadosas, pero...*

Dos profesoras hicieron los siguientes comentarios resaltando los diferentes rasgos que, según ellas, caracterizan a hombres y mujeres:

Profesora 1: *Pues mira, en general, ahí no podría haber mucha diferencia, siempre he sido de la idea que tanto niñas como niños son iguales, pero son más, vamos a decir, más detallistas las mujeres en la, en algunas actividades, las mujeres. Los hombres son "malhechotes", pero rápidos para hacer las cosas, entonces, por ejemplo, puedo tener a alguien que es muy hábil para resolver mentalmente, y generalmente son niños los que sí lo hacen y niñas que son más meticulosas, pero más exactas cuando terminan el trabajo...*

Profesora 2: *...que las mujeres, este, son muy, o sea, agarran las cosas rápido y o le entienden y le entienden rápido y, y son más metódicas, son más limpias, son, este, más ordenadas. Sí, me llegué a encontrar con casos de niños que trabajan así también, pero digamos que en proporción de 10 niñas, dos niños, este, trabajan igual que ellas. Tal vez será porque los muchachos a esa edad todavía no, no adquieren esas metodologías, no, pero las niñas sí, este, e inclusive les va mejor en sus exámenes, en calificaciones de exámenes y en trabajo que entregan...*

Estas profesoras en ningún momento se percataron de que esta manera estereotipada de atribuir características diferenciadas a niños y niñas en relación a las matemáticas contribuye fuertemente a la creación y fortalecimiento de las diferencias de género y de la inequidad. Ya anteriormente habíamos reportado que la creencia de que los varones son más aptos para las matemáticas es muy arraigada, a pesar de que no tenga sustento alguno, también en el alumnado mismo (Ursini, 2010).

El ambiente que se vive en la clase de matemáticas

En los *grupos focales* los y las estudiantes se refirieron al ambiente hostil (agresiones verbales, burlas) que generan en el aula de matemáticas sus compañeras y compañeros, poniendo en evidencia diferencias de género en el modo de enfrentar y convivir con estas situaciones. Por ejemplo, en un grupo de alumnas se hicieron los siguientes comentarios:

Alumna 1: *A mí, nomás me gustaría que cambiara algo de la clase, de los maestros no, sino del grupo. Porque, por ejemplo, si usted tiene una duda en matemáticas y alza la mano y pregunta la duda, todos...*
Alumna 2: *Se burlan.*
Alumna 1: *...se burlan y así.*
Alumna 3: *Por eso, la mayoría no quiere alzar la mano. El que no le entendió, tiene miedo que se vayan a burlar de él.*
Alumna 2: *O pena.*
Alumna 3: *O pena de que se vayan a burlar de él.*
Alumna 1: *Y ya mejor se quedan callados y a veces no entienden el tema.*

Éstos y otros comentarios similares pusieron de manifiesto que muchas de las estudiantes se sienten vulnerables en este tipo de ambientes, lo que las lleva a buscar estrategias, como limitar su participación, para evitar el maltrato. Señalaron también que, por esa misma razón, prefieren el trabajo en equipo, dado que allí se genera más compañerismo, intercambio de ideas y pueden expresar sus ideas con más tranquilidad y sin temor a las agresiones verbales. Añadieron que al trabajar en equipo se buscan consensos y se puede recibir apoyo:

Alumna 1: *Más compañerismo, porque así, todos te ayudaban. Así, no te salió un paso y todos te ayudaban en los ejercicios. Los compañeros que sí, que buscaban la respuesta y todo, todos los inteligentes te ayudaban. Si tú no le entendías, si no le entendías al maestro, a la clase, ellos te podían ayudar. Y como que motivaba más al compañerismo.*
Alumna 2: *Así es mejor, en equipo. Ajá, es mejor que individual. Porque en lo individual nada más te quedas así, pensando si estaré bien o no. Luego te volteas y estás preguntándoles a los demás, y te dicen los profes: "¿Por qué estás volteando?", "Es que no entendí", y te quedas con la duda.*

En contraste, la mayoría de los varones no mencionaron sentirse intimidados por el ambiente hostil que se genera en la clase de matemáticas. Al ser cuestionados por el entrevistador acerca de su baja participación, aclararon que si participan poco y no preguntan, no es por las posibles burlas de las que pueden ser objeto por parte de los demás, inclusive del profesor, sino porque no creen necesario preguntar en clase, ya que lo más probable es que ya sepan la respuesta. Comentaron que es "normal" que los hombres no hablen mucho, mientras que las mujeres preguntan porque ellas siempre hablan más:

Alumno: *...los hombres no hablamos y las mujeres siempre hablan mucho, por eso preguntan mucho...*

En otro grupo, los alumnos se refirieron al trato que reciben del profesor, percibido como un maltrato:

Alumno 1: *Se los explico así porque de otra manera no me entienden* [refiriéndose a lo que les dice el profesor].
Alumno 2: *Nos hace menos, de un modo.*
Alumno 3: *Es como si estuviera burlándose de nosotros.*
Alumno 4: *Como una agresión.*

Un aspecto muy interesante que surgió en las discusiones llevadas a cabo en los grupos focales, se relaciona con las diferencias de género en relación al aprendizaje de las matemáticas. La mayoría del estudiantado consideró que no hay diferencias de género en la capacidad para aprender matemáticas, lo que deja entrever la posibilidad de un cambio de actitud y creencias muy interesante, más proclive a la equidad, si se compara con lo que externaron sus docentes y padres/madres/tutores:

Alumna: *Yo, es que yo opino que todos somos buenos para las mismas cosas, no sé, por ejemplo, hay hombres muy buenos en matemáticas, igualmente que mujeres.*
Alumno: *Pues yo diría que sería lo mismo, ¿no? Que las mujeres también, no así como el que inventó las matemáticas, pero también han destacado, son también inteligentes en matemáticas.*

Sin embargo, estas ideas acerca de la equidad de género conviven con creencias estereotipadas, todavía muy presentes en nuestra sociedad, que afloraron en varios momentos, sobre todo en el discurso de los varones. Así, al mismo tiempo que afirmaban que no hay diferencias de género en la capacidad para aprender matemáticas, marcaban ciertas diferencias entre varones y mujeres, señalando la superioridad de los primeros. Por ejemplo, con cierto orgullo de género, argumentaron que las matemáticas, históricamente, han sido desarrolladas por hombres:

Alumno 1: *...¿quién inventó las matemáticas? Fue un hombre, ¿no?... Después, los que lo fueron siguiendo también lo fueron desarrollando, bueno, hasta* *ahorita no he escuchado que una mujer haya intervenido... no sé, pero he escuchado, Pascal, todos ellos fueron los que inventaron las multiplicaciones, la división, fueron ellos.*

Alumno 2: ...en la historia de las matemáticas quienes han destacado son los hombres...

Señalaron que ellos tienen ventaja sobre las niñas porque ellas sienten pena y tienen miedo de equivocarse, más que ellos:

Alumno 3: ...los hombres pueden ser mejor que una mujer, porque las mujeres sí saben, pero son penosas y tienen miedo de que la rieguen...

Justificaron las mejores calificaciones que obtienen las niñas argumentando que los profesores califican la participación en la clase y, como ellos no hablan, su calificación es más baja.

La práctica docente

Durante las entrevistas, los directivos identificaron otra posible causa del bajo desempeño en matemáticas: la preparación pedagógica del profesorado. Señalaron que muchos profesores carecen de este tipo de formación:

Directivo 1: ...nosotros tenemos en esta escuela [...] un, pero muy fuerte problema, con una maestra de matemáticas [...] problemas, tanto personales como de cuestiones didácticas, técnica y de conocimientos. [...] Tiene problemas de control de grupo, de planeación, de estrategias, no se capacita, no tiene cursos, ni relación pedagógica tampoco, que yo sepa.

Directivo 2: ...la SEP *nos manda maestros que no sé quién autorizó alguna vez, que muchas veces no cubren ni los requisitos.*

Comentaron que este tipo de carencias lleva a muchos profesores a seguir acercamientos didácticos muy tradicionales (reproduciendo lo que ellos mismos vivieron como estudiantes), con énfasis en la memorización, repetición y mecanizaciones, y atribuyeron a estas prácticas la falta de interés y el gusto por las matemáticas del alumnado y que no logren apreciar su utilidad. Si bien estas prácticas fueron confirmadas por los docentes mismos, ellos no las relacionaron con el bajo desempeño del alumnado, considerando que éste se debe, más bien, a la baja preparación con la que llegan a tercer grado de secundaria y con la falta de apoyo e interés por parte de los padres/madres/tutores. Explicaron que el alumnado, en general, tiene fuertes carencias en aritmética, no tiene un buen dominio de los algoritmos (conocimiento que consideraron fundamental), lo que los obliga a dedicar buena parte del tiempo a "regularizarlos" y, en consecuencia, a posponer el inicio del programa oficial que cubren con dificultad:

Profesor: *No, yo de hecho tuve que hacer un repaso, todo el primer periodo un repaso. Porque después de hacerles el examen diagnóstico, me doy cuenta que no saben sumar, no saben multiplicar, no saben dividir. O sea, las operaciones básicas, no las dominan. Eh, es una falta de conocimientos bárbara, que les hace falta tener, como conocimientos ya preestablecidos, y no es así.*

Profesora: *Yo, ¿cómo les voy a enseñar fracciones algebraicas si los muchachos no saben ni siquiera fracciones comunes?, lo que llamaban en nuestra generación los famosos quebrados, que son desde tercer año de primaria. Llegan a tercero [de secundaria] y no saben, no saben cómo sumar, multiplicar y dividir en fracciones comunes. Les digo: "¿Qué es una fracción?", ¡no saben ni siquiera qué es! Entonces, imagínese, a esos numeritos les pongo letras, pos los hago trizas. Entonces, tendría yo que regresarme a tercer año de primaria, a poner dos cifritas de fracciones y empezar de nuevo.*

Las prácticas tradicionales mencionadas por los directivos fueron confirmadas, indirectamente, también por los y las estudiantes. Al preguntarles acerca de sus profesores de matemáticas, algunas estudiantes comentaron:

Alumna 1: *¡Que nos explique más a fondo! Que lo explique, pero que también nos deje entenderlo. Porque luego, por ejemplo, nada más lo explica, y ya luego, luego, se pasa al siguiente tema, lo explica, nos deja ejercicios y ya pasa al siguiente tema.*

Alumna 2: *Pero no sé, como que esta clase es muy así, no sé, pero te pone muy nerviosa, y pues, muchos no comprendemos las matemáticas y se hace como más, más pesado, siempre terminamos enojadas.*

Alumna 3: *Como que da sólo la respuesta, ¡ajá!, y no la explica, nada más, este, da el resultado de lo que es, ¿no?, no lo vuelve a explicar. Si no le entendemos, pues ni modo. Nosotros tenemos que o irle a preguntar, ¡ajá!, o ir nada más anotando, a la hora da las respuestas, nada más hay que ir anotando lo que dice y ya, pero me siento mal de no saber.*

Estos comentarios dejan ver que las prácticas que siguen muchos profesores tienden a provocarles enojo, inseguridad y frustración. De los 16 grupos focales que se realizaron con las mujeres, sólo en dos las estudiantes manifestaron agrado por sus docentes, argumentando que se preocupan por resolver las dudas que surgen durante la clase y las inducen a razonar. Las emociones que producían en ellas estas maneras de trabajar, en las que se sentían escuchadas y tomadas en cuenta, eran de confianza y seguridad. En consecuencia, las actitudes hacia estas clases eran de interés y disposición al trabajo:

Alumna 1: *...al profesor de hace un año, pues te podías acercar y decirle no, no le entiendo. Y ya te explicaba, así, a tu gusto. Me sentía más tranquila, sabía que contaba con él.*

Alumna 2: *...porque ves que el maestro de hace un año nos daba dos métodos, dos métodos diferentes, y elegías el que se te hacía más fácil, con ése trabajabas, o si no te ponía un método, decía "ahora ustedes busquen el otro método", eso nos ayudaba a pensar.*

En estos comentarios de las mujeres se puede apreciar el interés por entender y aprender a razonar ante los problemas matemáticos.

Los varones también se quejaron de sus profesores, pero su malestar no estaba dirigido hacia la necesidad y el interés por aprender más y mejor, sino por lograr pasar los exámenes. Sus quejas resaltaron la falta de concordancia entre los ejercicios de los exámenes y lo visto en clase:

Alumno 1: *...pone el examen siempre difícil...*
Alumno 2: *...pone en el examen temas que no se vieron...*
Alumno 3: *...pone ejercicios que no explicó...*

Estas quejas ponen en evidencia también que, para resolver los problemas, el alumnado tiende a apoyarse fuertemente en la memoria y la repetición, y no está acostumbrado a comprender y aplicar los conceptos matemáticos, lo cual es una consecuencia de la enseñanza tradicional que reciben los alumnos, con énfasis en la memorización, las mecanizaciones y la aplicación de algoritmos.

La mayoría de hombres y mujeres coincidieron en que no se aburren en su clase de matemáticas, pero que les gustaría mucho más aprender matemáticas a través de juegos. También en este caso aparecieron marcadas diferencias de género en los argumentos que usaron. Ellos resaltaron lo divertidas que podrían resultar las matemáticas a través de los juegos; ellas argumentaron que los juegos permitirían acercarse a los conocimientos matemáticos a través de la interacción con los demás compañeros.

Los incisos anteriores proporcionan una visión, si bien muy general, del entorno sociocultural y económico en el que vive y se desarrolla el estudiantado que participó en este estudio, de los estereotipos de género que dominan en estos entornos y del ambiente escolar en el que se espera aprendan matemáticas.

A continuación se presentan los resultados obtenidos al analizar los datos concernientes a las actitudes, las creencias y la autoconfianza de estos estudiantes en relación a las matemáticas.

Actitudes, creencias y autoconfianza para trabajar en matemáticas de los y las estudiantes

En promedio, la actitud hacia las matemáticas del estudiantado participante resultó ser neutra con ligera tendencia a lo positivo, como lo sugiere el promedio global de 2.14 que se obtuvo al analizar las respuestas dadas a la subescala AM de la escala AMMEC (el puntaje por ítem va de 0 a 4: un promedio cercano a 4 indica una actitud positiva; un promedio igual a 2, una actitud neutra; un promedio cercano a 0, una actitud negativa). No se encontraron diferencias de género significativas en los puntajes promedio. Estos resultados concuerdan con los obtenidos en otros estudios realizados con alumnos de secundaria mexicanos (Ursini, Sánchez y Orendain, 2004; Ursini y Sánchez, 2008). La mayoría de los y las estudiantes consideraron que la clase de matemáticas no era aburrida y las matemáticas no eran muy difíciles de aprender, pero también señalaron que no les gustaba esta asignatura ni les gustaría tener un trabajo en el que se usen las matemáticas. En este aspecto, las mujeres fueron mucho más contundentes y, en mayor número que los varones, afirmaron que las matemáticas ni son divertidas ni les gustaría usarlas en su trabajo. Sin embargo, fieles a las creencias dominantes, la gran mayoría (96%), sin diferencia de género, afirmó que es muy importante aprender matemáticas. En los grupos focales aclararon que consideran importantes las matemáticas, y para sostener esta afirmación recurrieron a distintos argumentos, sobre todo relacionados a posibles transacciones comerciales y perspectivas de trabajo futuro:

Alumna 1: *Por si tenemos un negocio o algo así, poderlo sacar adelante, ¿no? No sé, o sea, para dar bien el cambio.*

Alumna 2: *Porque, por ejemplo, te metes a un trabajo y también te piden matemáticas.*

Alumno 1: *Para los trabajos; aquí en el Superama [un supermercado] estoy de empacador y pues a mí me sirve porque está el espacio de las bolsas con todo el material que se necesita, porque en las Cajas no nos permiten poner en una bolsa normal toda la mercancía, tenemos que ir por cajas, tenemos que ver la mercancía para ir por el tamaño de la caja, que ocupe menos espacio.*

Alumno 2: *Para todo, yo diría* [se refiere a la utilidad de las matemáticas]. *Cualquier tipo de carrera. Porque, por decir, a nosotros que se nos dificultan las matemáticas, y alguien de nosotros se dedicará a contador o a cualquier otro trabajo, pues para eso, yo creo que pide un porcentaje de matemáticas, ¿no?*

Sin embargo, hubo quienes consideraron que son útiles sólo para pasar los exámenes, y hubo también quienes cuestionaron su utilidad:

Alumno 1: *Nada más para sumar y restar, lo básico. Para lo demás no la he usado.*
Alumno 2: *Deberían, en la secundaria, dar matemáticas básicas, ya las ecuaciones separarlas para aquellos que quieran ser ingenieros o algo así.*
Alumna 1: *Pues sí, es lo único, sumar, multiplicar, restar y ya, pero lo demás, lo de equis (x), eso no nos sirve.*
Alumna 2: *Bueno, pues, es que yo no le veo sentido a las ecuaciones. Por ejemplo, yo que quiero estudiar psicología, de nada me van a servir las ecuaciones.*

En relación a la utilidad de las matemáticas, al igual que el estudiantado, también algunos profesores se refirieron esencialmente a su uso en transacciones comerciales:

Profesor: *Pues las matemáticas siempre las estamos aplicando desde que los niños están pequeños, desde el momento en que ellos van a comprar algo en la escuela o van a comprar algo en la tienda, en eso de que pagan y les tienen que dar el cambio, pues tienen que saber y están haciendo operaciones, están haciendo operaciones.*
Profesora: *No, pues yo les digo a ellos, este, pues, a lo que se dediquen van a ver las matemáticas siempre, sea lo que sea que hagan, lo que hagan, siempre van a utilizar matemáticas, así sea en el puesto de verduras, van a usar mínimo sumas para cobrar y restas para dar cambio, y si ellos no, no ven esa, esa utilidad pues no van a saber ni qué, y sí es importante, porque, porque toda la vida se ve.*

La autoconfianza para trabajar en matemáticas se midió, en primera instancia, con la subescala CM. El promedio global obtenido en esta escala fue de 1.96, lo que indica una ligera tendencia a lo negativo. Tampoco en esta ocasión se encontraron diferencias de género significativas en los puntajes promedio. La mayoría de los estudiantes se autopercibió capaz y persistente al momento de resolver un problema algo difícil, a pesar de afirmar que no les agradan ese tipo de problemas. Si bien señalaron que les gusta trabajar y discutir en equipo y defender su punto de vista, la gran mayoría manifestó que no les gusta tomar la iniciativa para proponer soluciones a los problemas que se les plantean, ni ser líderes en el equipo. Este tipo de respuestas sugiere que la preparación que reciben no propicia que vayan desarrollando la capacidad de razonar ante un problema matemático, formular hipótesis y tomar la iniciativa para proponer posibles acercamientos. La enseñanza tradicional, que pone énfasis en la memorización y no en la comprensión de los conceptos matemáticos, los va llevando, más bien, a la apatía junto con la necesidad de ser guiados.

En promedio, en ambas subescalas, tanto mujeres como hombres obtuvieron resultados similares. Para ambos, el promedio denota una actitud prácticamente neutra: ligeramente positiva en relación a las matemáticas y ligeramente negativa en relación a la autoconfianza para trabajar en matemáticas. Pero también se pudo observar menor indecisión y una mayor polarización entre las mujeres en su percepción de las matemáticas que entre los varones. Hubo estudiantes mujeres con una actitud muy positiva hacia las matemáticas, y otras con una actitud muy negativa; algunas con autoconfianza alta para trabajar en matemáticas, y otras con autoconfianza muy baja. Es interesante notar también que muchas más mujeres que hombres decididamente afirmaron que no les gusta resolver problemas de matemáticas difíciles.

Los datos obtenidos con el *inventario de matemáticas* confirmaron estos resultados y, además, permitieron apreciar que la actitud se va matizando dependiendo del tema matemático que se aborda. Por ejemplo, entre los varones, el tema que provocó más rechazo y ansiedad fue el de geometría (visualización espacial, sólidos y sus propiedades, medición y cálculo geométrico). Por el contrario, para las mujeres, los problemas de geometría fueron los que activaron una actitud más positiva con manifestaciones de más seguridad, agrado y mucha menos ansiedad que cualquiera de los otros temas, en un porcentaje mucho mayor que los varones. Estas diferencias entre hombres y mujeres en lo que concierne a la geometría y, en particular, la visualización espacial, resultan ser muy interesantes si recordamos que, en investigaciones hechas en otros países, se han encontrado reiteradamente diferencias de género a favor de los varones en relación a la visualización espacial (Ben-Haim, Lappan y Houang, 1985; Leder, 1992). En México, este tema no ha sido todavía muy estudiado y algunos de los resultados obtenidos no siempre coinciden. Mientras que González (2003), por ejemplo, al estudiar el desempeño matemático de estudiantes de secundaria a partir del análisis de tres bases de datos distintas, encontró diferencias de género significativas a favor de los varones, en las preguntas que implicaban habilidades visoespaciales, Rivera (2004), al analizar las respuestas que dieron 231 estudiantes de tercer grado de secundaria de la Ciudad de México a problemas de visualización espacial, no encontró diferencias de género significativas, si bien observó que había diferencias entre alumnos y alumnas en el tipo de respuestas erróneas.

Las diferencias de género en las actitudes hacia la geometría, aunado al bajo desempeño en este tema, así como los resultados reportados en los estudios arriba señalados, apuntan a la necesidad de profundizar sobre la relación entre actitudes, desempeño y diferencias de género. Hemos podido observar, por ejemplo, que a pesar del bajo desempeño, las mujeres tenían una actitud bastante positiva hacia la geometría, pero negativa hacia el álgebra. Esta combinación se invirtió en el caso de los varones, quienes mostraron una actitud más positiva hacia el álgebra y negativa hacia la geometría, a pesar del bajo desempeño en ambos temas.

Entre los varones, los temas que provocaron más rechazo y ansiedad, después de geometría, fueron: probabilidad (experimentos aleatorios), análisis de la información (el problema implicaba variación proporcional), álgebra (resolución de ecuaciones y manipulación algebraica), aritmética (números fraccionarios y decimales, variación proporcional, números con signos) y estadística (manejo de la información). En el caso de las mujeres, excepto por aritmética –para la que mostraron, igual que para geometría, menos ansiedad y desagrado que los varones–, para todos los otros temas, en particular álgebra y estadística, exteriorizaron mucha más ansiedad, inseguridad y desagrado que sus compañeros.

Otro resultado interesante, al trabajar la asociación libre, fue que al presentarles un problema, los varones, en un porcentaje mucho más alto que las mujeres, tendían a buscar una posible estrategia de solución. Esto sucedió con la mayoría de los temas propuestos y sugiere una mayor autoconfianza en su capacidad para tratar de resolver los problemas. Por el contrario, las mujeres, de manera recurrente, se enfocaban en el contexto del problema, lo que desviaba su atención hacia problemáticas no matemáticas. Esto sucedió para todos los problemas del *inventario de matemáticas*, con excepción de los problemas de geometría, cuando esta tendencia se revirtió.

CONCLUSIONES

El estudio se realizó con 192 estudiantes de 16 escuelas ubicadas en la Ciudad de México, las cuales, a partir de los resultados obtenidos con la aplicación de la Prueba Enlace 2008, habían sido catalogadas como escuelas con rendimiento matemático muy bajo y marcadas diferencias de género. El propósito era estudiar sus reacciones afectivas en relación a las matemáticas, resaltando el entorno sociocultural en el que viven y se desenvuelven, así como las diferencias de género. El análisis de los datos recabados muestra que el ambiente sociocultural y económico en el que viven y se desarrollan estos estudiantes de bajo desempeño matemático, está caracterizado por:

- Bajos recursos económicos de las familias
- Entornos familiares violentos
- Carencia de apoyo familiar e institucional
- Profesorado de matemáticas con escasa preparación didáctica y/o académica
- La prevalencia, en los adultos que los rodean, de los estereotipos de género que dominan en nuestra sociedad en relación a las matemáticas y su aprendizaje

De los datos se desprende que ninguna de las partes involucradas en el proceso educativo asume un verdadero compromiso con el aprendizaje de estos estudiantes; más bien, cada parte tiende a responsabilizar de ello a las demás: los padres/madres/tutores responsabilizaron principalmente a la escuela; los directivos al profesorado y a los padres/madres/tutores; el profesorado al alumnado y a los padres/madres/tutores. En consecuencia, este tipo de alumnado recibe muy pocos apoyos en el aspecto académico y difícilmente encuentra un ambiente donde sea escuchado, donde pueda externar sus dudas, opiniones, preocupaciones y miedos.

Si bien los directivos y los docentes tenían una imagen ideal del alumno de matemáticas (ordenado, disciplinado, atento en clase, persistente en la búsqueda de resultados y con disposición y deseo de aprender), no propiciaban el desarrollo de cada una de estas facetas –ya sea por falta de recursos, apoyos institucionales y/o conocimientos adecuados para enfrentar las condiciones socioculturales y económicas que rodean a estos estudiantes– y encauzaban sus principales esfuerzos a mantener el orden, la disciplina y tratar de cumplir con los planes de estudio. Durante las entrevistas dejaron entrever que, dada la realidad en la cual laboran, no aspiran a mucho más que lograr que el estudiantado aprenda algoritmos y procedimientos, los memoricen y puedan aplicarlos cuando se les indique y logren pasar los exámenes. Pero este acercamiento no despierta el interés del alumnado hacia las matemáticas, en particular el de las mujeres, quienes en reiteradas ocasiones se quejaron de la carencia de explicaciones que les ayuden a entender las matemáticas y "aprender a razonar". En contraste, los varones estaban, al parecer, más adaptados al enfoque y su preocupación principal era, esencialmente, lograr pasar los exámenes.

A pesar de las carencias económicas y culturales, la falta de apoyo familiar e institucional, la violencia que viven dentro y fuera del aula de matemáticas y el tipo de enseñanza que reciben, la participación activa e inteligente del estudiantado durante los grupos focales puso en evidencia que la gran mayoría, de hombres como de mujeres, tenía un buen potencial para aprender matemáticas. Esto permite afirmar que su bajo desempeño depende fuertemente de las condiciones económicas y sociales en las que viven, así como de la carencia de apoyos institucionales adecuados.

Las actitudes de estos estudiantes hacia las matemáticas estaban bastante polarizadas, sobre todo en el caso de las mujeres. Es posible que si tuvieran acceso a otro tipo de experiencias, más estudiantes podrían desarrollar una actitud positiva y/o más crítica hacia las matemáticas, lo que, aun cuando no garantiza un mejor desempeño, podría propiciar una mayor disposición y motivación para su estudio.

La autoconfianza para trabajar en matemáticas resultó, en general, baja, si bien la de los varones fue, en promedio, más alta que la de las mujeres. Este resultado confirma lo encontrado en otros estudios realizados con estudiantes mexicanos (Ursini y Sánchez, 2008), y una de sus posibles causas podría ser también la edad de los participantes, dado que, como ya lo señalaban Eccles et ál. (1989), Jacobs et ál. (2002) y Watt (2004), la autoconfianza tiende a declinar en la adolescencia, sin perder de vista que la de los varones es siempre más alta que la de las mujeres. Para confirmarlo, sería necesaria una investigación de tipo longitudinal que permitiera estudiar cómo va cambiando la autoconfianza del estudiantado de bajo rendimiento a lo largo de la secundaria.

Llama también la atención que, a pesar del desempeño muy bajo, tanto hombres como mujeres manifestaron, en general, sentirse capaces de resolver los problemas que se plantean en la clase de matemáticas, mostrándose los varones más seguros al respecto. Si bien esta autopercepción podría contribuir a la autoconfianza para trabajar en matemáticas, también resalta cierta dificultad para reconocer sus propias debilidades en relación a los conocimientos que requiere esta disciplina y, en consecuencia, para asumir la responsabilidad de superarlas.

A pesar del bajo desempeño generalizado, tanto directivos y profesorado como padres/madres/tutores manifestaron la firme convicción de que existen diferencias de género, y éstas son a favor de los varones. Los directivos y los docentes estaban, al parecer, convencidos de que los hombres cuentan con características intelectuales que los hacen más aptos para aprender matemáticas, y atribuyeron el bajo desempeño de los varones al descuido y a que no dedican el tiempo necesario al estudio. Aunque consideraron que las mujeres suelen ser mejores estudiantes y obtienen mejores calificaciones, lo atribuyeron más a sus características conductuales que a sus capacidades intelectuales. Este discurso pone en evidencia, una vez más, lo arraigadas que son en nuestra sociedad ciertas creencias discriminatorias en relación al género –justificadas por la diferencia sexual– y a partir de las cuales cuando se hace referencia, por ejemplo, al éxito de los varones, se tiende a resaltar sus capacidades intelectuales, mientras que se atribuye el éxito de las mujeres sobre todo a su conducta, empeño y constancia. Creencias similares fueron encontradas por Ursini y Sánchez (2008) al entrevistar estudiantes mexicanos de 3º de secundaria de otros estados de México. Llama la atención, sin embargo, que estas creencias y convicciones no se reflejaron todavía en el discurso del estudiantado de este estudio, que en múltiples ocasiones afirmó que, según ellos, no existen diferencias entre hombres y mujeres en su capacidad para aprender matemáticas. Ulteriores investigaciones permitirían profundizar e identificar los elementos que pueden estar propiciando estos cambios positivos en las creencias de los y las jóvenes de la Ciudad de México.

Finalmente, otro resultado interesante de esta investigación, y que amerita estudios ulteriores, es haber proporcionado evidencias de que la actitud que tiene un estudiante hacia las matemáticas no es homogénea y puede cambiar dependiendo del área con la que está trabajando. Se encontró, por ejemplo, que la mayoría de las mujeres tenía una actitud positiva hacia la geometría y negativa hacia el álgebra, mientras que esta tendencia se invirtió en la mayoría de los varones. Sería necesario indagar más a fondo, buscando posibles explicaciones a las actitudes diferenciadas por temas de matemáticas y por género.

AGRADECIMIENTOS

Mis agradecimientos para el Dr. Gabriel Sánchez Ruiz, las M.C. Martha P. Ramírez, Claudia Rodríguez, Yolanda Chávez, C. Gisela Espinosa, Delia Montes y la maestra Silvia García, cuyas colaboraciones fueron fundamentales para la realización de este estudio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abric, J. C. (1994), *Prácticas sociales y representaciones*, México, Ediciones Coyoacán.

Andrews, P. y G. Hatch (2000), "A comparison of Hungarian and English teachers' conceptions of mathematics and its teaching", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 43, núm. 1, pp. 31-64.

Bardin, L. (1977), *El análisis de contenido*, Madrid, Ed. Akal Universitaria.

Ben-Haim, D., G. Lappan y R. T. Houang (1985), "Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting students' performance", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 16, núm. 4, pp. 389-409.

Bourdieu, P. (1979), "Les trois états du capital culturel", *Actes de la recherche en sciences sociales*, vol. 30, L'institution scolaire, pp. 3-6.

Chamdimba, P. (2008), "Students' attitude towards mathematics in Malawi: Can they be improved?", *11th International Congress on Mathematical Education, TSG 32: Gender and Mathematics Education*, recuperado en http://tsg.icme11.org/document/get/156, julio de 2008.

Crawford, M., D. J. Herrmann, M. Holdsworth, E. Randall y D. Robbins (1989), "Gender and beliefs about memory", *British Journal of Psychology*, vol. 80, pp. 391-401.

Eccles, J. S., A. Wigfield, C. A. Flanagan, C. Miller, D. A. Reuman y D. Yee (1989), "Self-concepts, domain values and self-esteem: relations and changes at early adolescence", *Journal of Personality*, vol. 57, núm. 2, pp. 283-310.

Eudave, D. (1994), "Las actitudes hacia las matemáticas de los maestros y alumnos de bachillerato", *Educación Matemática*, vol. 6, núm. 1, pp. 46-58.

Fennema, E. (1996), "Scholarship, gender and mathematics", en P. Murphy y C. Gipps (eds.), *Equity in the Classroom: Towards Effective Pedagogy for Girls and Boys*, Londres, Falmer Press.

Fennema, E. y J. Sherman (1976), "Fennema-Sherman Mathematics Attitude Scales", *Catalogue of Selected Documents in Psychology*, vol. 6.

Gómez-Chacón, I. M. (2000), *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*, Madrid, Narcea.

——— (2003), "La tarea intelectual en matemáticas. Afecto, meta-afecto y los sistemas de creencias", *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, vol. X, núm. 2, recuperado en http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/igomez.pdf, agosto de 2009.

González, R. M. (2003), "Diferencias de género en el desempeño matemático de estudiantes de secundaria", *Educación Matemática*, vol. 15, núm. 2, pp. 129-161.

Hernández, R. P. y I. M. Gómez-Chacón (1997), "Las actitudes en educación matemática. Estrategias para el cambio", *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*, núm. 13, pp. 41-61.

INEE (2005), "La calidad de la educación básica en México", *Informe anual.*

INMUJERES (2010), "Género y desempeño en matemáticas en el tercer grado de secundaria", *Género y desarrollo. Investigación para la igualdad sustantiva de las mujeres*, publicación electrónica del Instituto Nacional de la Mujer, pp. 54-99, recuperado en http://www.inmujeres.gob.mx, diciembre de 2013.

Jacobs, J. E., S. Lanza, D. Osgood, J. Eccles y A. Wigfield (2002), "Changes in children's self-competence and values: gender and domain differences across grades one through twelve", *Child Development,* vol. 73, pp. 509-527.

Kaino, L. (2008), "Computers in learning: narrowing the gender gap?", *11th International Congress on Mathematical Education, TSG 32: Gender and Mathematics Education*, recuperado en http://tsg.icme11.org/document/get/159, julio de 2008.

Leder, G. C. (1992), "Mathematics and gender: changing perspectives", en D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Nueva York, Macmillan, NCTM, pp. 597-622.

Ma, X. (2008), "Gender differences in mathematics achievement: Evidence from latest regional and international student assessments", *11th International Congress on Mathematical Education, TSG 32: Gender and Mathematics Education*, recuperado en http://tsg.icme11.org/document/get/160, julio de 2008.

McGraw, R., S. Lubienski y M. Strutchens (2006), "A closer look at gender in NAEP mathematics achievement and affect data: Intersections with achievement, race/ethnicity, and socioeconomic status", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 37, núm. 2, pp. 129-150.

McLeod, D. B. (1992), "Research on affect in mathematics education: A reconceptualization", en D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Nueva York, Macmillan, NCTM, pp. 575-596.

Middleton, J. A. y P. A. Spanias (1999), "Motivation for achievement in mathematics: Findings, generalizations and criticism of the research", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 30, pp. 65-88.

Morales, C., V. Turcott, A. Campos y L. Lignan (1998), "Actitudes de los escolares hacia la computadora y los medios para el aprendizaje", *Tecnología y comunicaciones educativas*, México, ILCE.

Pierce, R., K. Stacey y A. Barkatsas (2007), "A scale for monitoring students' attitudes to learning mathematics with technology", *Computers & Education*, vol. 48, pp. 285-300.

Reinert, M. (1986), "Un logiciel d'analyse lexicale: Alceste", *Le Cahiers de l'Analyse des Données*, núm. 4, pp. 471-484.

Schiefele, U. y M. Csikszentmihalyi (1995), "Motivation and ability as factors in mathematics experience and achievement", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 26, núm. 2, pp. 163-181.

Ursini, S., G. Sánchez y M. Orendain (2004), "Validación y confiabilidad de una escala de actitudes hacia las matemáticas y las matemáticas enseñadas con computadora", *Educación Matemática*, vol. 16, núm. 3, pp. 59-78.

Ursini, S. y G. Sánchez (2008), "Gender, technology and attitudes towards mathematics: A comparative longitudinal study with Mexican students", *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, vol. 40, pp. 559-577.

Ursini, S. (2010), "Diferencias de género en la representación social de las matemáticas:

un estudio con alumnos de secundaria", en N. Blázquez, F. Flores y M. Ríos (eds.), *Investigación feminista. Epistemología, metodología y representaciones sociales*, México, UNAM, en coedición con CEIICH, CRIM y Facultad de Psicología, Colección Debate y reflexión, pp. 379-398.

Watt, H. M. G. (2004), "Development of adolescents' self-perceptions, values, and task perceptions according to gender and domain in 7TH -througH 11TH -grade Australian students", *Child Development*, vol. 75, núm. 5, pp. 1556-1574.

DATOS DE LA AUTORA

Sonia Ursini
Departamento de Matemática Educativa,
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional, México
soniaul2002@yahoo.com.mx

Investigar las fracciones: experiencias inspiradas en la metodología de los experimentos de diseño

José Luis Cortina

Resumen: Se discuten las aportaciones a la didáctica de las fracciones de cuatro investigaciones que el autor y sus colegas han realizado, retomando algunos aspectos de la metodología de los experimentos de diseño. Estas aportaciones conciernen a la puntualización de los objetivos de aprendizaje de las fracciones, la identificación de puntos de partida para la enseñanza y el desarrollo de propuestas alternativas para apoyar el aprendizaje de este concepto.

Palabras clave: fracciones, experimentos de diseño, razonamiento proporcional.

Abstract: We discuss the contributions to the field of fractions of four research projects, conducted by the author and his colleagues. Several aspects of the design research methodology were central to the implementation of these projects. The contributions include specifying the big ideas of learning fractions, identifying viable starting points, and developing instructional innovations to support students' understanding of this concept.

Keywords: fractions, design experiments, proportional reasoning.

INTRODUCCIÓN

En este artículo describo las aportaciones de cuatro investigaciones que, junto con mis colegas, he realizado en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. Una característica importante de estas investigaciones ha sido la de retomar algunos aspectos de la metodología de los experimentos de diseño, en la forma en que Cobb y Gravemeijer (Gravemeijer y Cobb, 2006; Stephan et ál., 2003; Cobb et ál., 1997) la han desarrollado.

Comienzo el capítulo con una breve revisión de la investigación en el campo de las fracciones, señalando cuatro preocupaciones que la han motivado. Después describo la metodología de los experimentos de diseño, destacando los aspectos teóricos y metodológicos que han influenciado nuestras investigaciones. Finalmente describo las aportaciones de nuestro propio trabajo de investigación, relacionándolas con tres metas centrales de los experimentos de diseño: *1)* la puntualización de los objetivos de aprendizaje, *2)* la identificación de puntos de partida para la enseñanza y *3)* el desarrollo de propuestas alternativas para apoyar el aprendizaje.

Fecha de recepción: 5 de septiembre de 2013; fecha de aceptación: 27 de noviembre de 2013.

EL CAMPO DE LAS FRACCIONES

La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones es uno de los temas más investigados en la educación matemática. Autores de gran renombre han incursionado en él; entre ellos destacan Guy Brousseau (Brousseau et ál., 2004), Deborah Ball (1993), Vasily V. Davydov (1969/1991) y Hans Freudenthal (1983).

En la literatura pueden identificarse cuatro preocupaciones principales que han motivado la realización de estudios en el campo (Lamon, 2007). La primera ha consistido en puntualizar la naturaleza didáctica del concepto. Los autores que han trabajado en ello se han preocupado por especificar las nociones matemáticas que entran en juego, o que deberían de hacerlo, al aprender y al enseñar fracciones (Kieren, 1980; Behr et ál., 1983; Freudenthal, 1983; Thompson y Saldanha, 2003). Estos trabajos han sido de naturaleza teórica. De dos de ellos (Kieren, 1980 y Behr et ál., 1983) surgió la ampliamente aceptada suposición de que las fracciones tienen al menos cuatro significados: parte-todo, medida, razón y operador.

La segunda preocupación se deriva de la teoría psicológica del constructivismo y ha implicado identificar y describir los esquemas mentales que resultan del aprendizaje de las fracciones, así como los procesos que llevan a que estos esquemas se desarrollen (Steffe y Olive, 2010; Saenz-Ludlow, 1994; Norton, 2008). Estos trabajos, de naturaleza empírica, han sido realizados a través de la conducción de entrevistas clínicas y de experimentos de enseñanza (Steffe y Thompson, 2000). En ellos se ha identificado y descrito la relativa complejidad conceptual, primero, de concebir a las fracciones como números que cuantifican el tamaño de una magnitud continua. Esto es, se ha descrito la complejidad intrínseca de entender una expresión como "tres cuartos del pastel", como aludiendo a una sola masa cuyo tamaño corresponde a lo triple de la cuarta parte del pastel, en lugar de a un subconjunto de tres elementos discretos (pedazos de pastel) de un conjunto de cuatro.

En estos trabajos también se ha identificado y descrito la complejidad conceptual propia de concebir a la magnitud que una fracción cuantifica como susceptible de ser iterada sin restricción. Estas concepciones son necesarias para entender las fracciones como números que pueden cuantificar legítimamente el tamaño de algo que es mayor al tamaño del entero; por ejemplo, son necesarias para darle sentido a una expresión como ésta: "once cuartos de pulgada".

Una tercera preocupación, más vinculada a la didáctica, ha sido la de generar propuestas de enseñanza que favorezcan el aprendizaje del concepto. La investigación que ha atendido esta preocupación ha implicado la conducción de intervenciones en las aulas. Entre las propuestas que han sido investigadas están: *1)* el uso de situaciones problemáticas que implican la repartición de múltiples enteros, como medio para apoyar el aprendizaje de las fracciones mixtas e impropias (Streefland, 1991); *2)* el uso de la medición como eje central en la enseñanza de las fracciones (Lamon, 2007); *3)* el abordar la enseñanza de las fracciones desde el concepto de razón (Brousseau et ál., 2004), y *4)* el focalizar la enseñanza de las fracciones en la idea de magnitud continua (Davydov, 1969/1991).

La cuarta preocupación se vincula al campo de la evaluación y ha implicado documentar los niveles de comprensión de las fracciones que estudiantes de diferentes edades logran (Hart, 1989; Gould, 2005; Hannula, 2003; Saxe et ál., 2005). Estos estudios, de naturaleza cuantitativa, han utilizado muestras de alumnos relativamente grandes. En general, han encontrado que sólo una minoría de estudiantes alcanza niveles aceptables en la comprensión del concepto.

Dada la gran cantidad de estudios realizados en torno a estas cuatro preocupaciones, puede parecer que quedan pocas cuestiones de importancia por aclarar o descubrir en el campo de las fracciones. Sin embargo, éste no es el caso. No sólo continúa habiendo entre los expertos gran insatisfacción sobre los niveles típicos de comprensión de las fracciones logrados por los estudiantes, sino que también la hay sobre lo que se sabe de qué debe hacerse para mejorar el aprendizaje de este concepto (Lamon, 2007; Tzur, 2007).

En este artículo se describen las aportaciones de la investigación que, junto con mis colegas, he realizado en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. Las investigaciones realizadas han sido influenciadas, de manera significativa, por la metodología de los experimentos de diseño. A continuación se destacan los aspectos teóricos y metodológicos de esta metodología que han orientado nuestras investigaciones.

EXPERIMENTOS DE DISEÑO

Los experimentos de diseño son una metodología de la educación matemática cuyo fin principal es el desarrollo de recursos educativos, tanto de naturaleza teórica como práctica, que contribuyan al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el ámbito escolar (Cobb, 2007). La conducción de uno de estos experimentos implica el diseño y puesta a prueba de secuencias de enseñanza para apoyar el aprendizaje de conceptos matemáticos (como las fracciones), en formas específicas. Además, implica el estudio sistemático de esas formas de aprendizaje, dentro del contexto sociopedagógico en el que emergen.

En esta metodología se adopta una forma particular de entender el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la escuela. En lo que respecta al aprendizaje matemático, esta metodología adopta una perspectiva que, por una parte, es consistente con el constructivismo. Se considera que el aprendizaje matemático es el resultado de la actividad cognitiva del sujeto y que conlleva siempre la reorganización de conocimientos previos. Por otra parte, se considera a este aprendizaje como necesariamente situado en un contexto social y cultural (Cobb y Bowers, 1999).

En la metodología de los experimentos de diseño, se parte de que el pensamiento individual y el contexto sociocultural están estrechamente ligados, sin que ninguno predomine sobre el otro. Así, se concibe al *aprendizaje matemático* como un fenómeno esencialmente social, y al *contexto sociocultural* como un fenómeno esencialmente cognitivo (Cobb et ál., 1997).

La forma de aproximarse al aprendizaje matemático que se asume en la metodología de los experimentos de diseño impacta profundamente en la manera en la que se aborda la enseñanza. Dada la fuerte influencia que se reconoce que tiene el contexto sociocultural en la cognición, se le considera a éste como la vía principal para promover la emergencia de formas específicas de aprendizaje matemático. Aspectos del contexto sociocultural del aula, en los que un maestro puede intervenir, son considerados como los medios a través de los cuales es posible apoyar el aprendizaje matemático. Entre estos aspectos se encuentran: *a)* las tareas y situaciones problemáticas en las que se involucra la comunidad del aula; *b)* los sistemas simbólicos con los que se representan ideas matemáticas, ya sean materiales manipulables o representaciones gráficas; *c)* la organización de las actividades del aula, y *d)* las normas que pautan las formas en que los miembros del grupo interactúan, hablan y debaten (Cobb et ál., 2008).

Por lo general, un experimento de diseño implica la puesta a prueba de una *trayectoria hipotética de aprendizaje* (THA). Ésta consiste en un conjunto de conjeturas sobre cómo ha de desarrollarse el aprendizaje de un concepto matemático específico, junto con los medios que habrán de apoyar el proceso. La formulación de una THA inicia con un ejercicio de revisión y análisis de la literatura existente en el campo, que se utiliza para puntualizar los objetivos principales de aprendizaje (Cobb et ál., 2003a).

Como segundo paso, se define el punto de partida. Ello implica identificar nociones matemáticas que los alumnos ya han desarrollado –como resultado de experiencias escolares y extraescolares previas– con el potencial de servir de base inicial para el desarrollo de formas cada vez más complejas de entender un concepto.

El tercer paso en la elaboración de una THA consiste en formular conjeturas sobre los principales cambios que se espera que ocurran en el aprendizaje de los estudiantes, y sobre los medios que habrán de soportarlos. El diseño de estos medios se materializa en una *secuencia de enseñanza*, la cual consiste en las situaciones problemáticas, así como en los materiales didácticos manipulables y las formas de representar ideas matemáticas que secuencialmente se espera usar en el aula. El fundamento pedagógico de esta secuencia es siempre la THA, por lo que un ajuste en la THA implica siempre una modificación de la secuencia de enseñanza.

Un aspecto central en el análisis de un experimento de enseñanza implica la reformulación de la THA, a la luz de los resultados obtenidos. De manera retrospectiva, la viabilidad de cada una de las conjeturas es revisada, permitiéndose incluso la total reformulación de la THA, a fin de que se dé cuenta, de mejor manera, del proceso de aprendizaje estudiado. Se espera, además, que la revisión y ajuste de la THA continúe conforme sea utilizada por más y más educadores, en contextos y circunstancias distintas a las que originalmente llevaron a su formulación. Una vez que se logra tener una

THA cuya utilidad ha sido ampliamente probada, pasa a ser considerada ya no una THA sino una *teoría local de enseñanza* (Gravemeijer y Cobb, 2006).

La conducción de un experimento de enseñanza se da en tres fases: preparación, instrumentación y análisis retrospectivo (Gravemeijer y Cobb, 2006). En ocasiones, la primera de estas fases puede implicar un proceso relativamente largo, particularmente cuando la literatura existente es insuficiente para formular una primera versión de la THA. En estos casos, se vuelve necesario realizar estudios exploratorios, de los cuales se pueden derivar aportaciones a la investigación en algún campo, valiosas por sí mismas (e.g., McGatha et ál., 2002).

Los estudios exploratorios se realizan cuando el tipo de conocimiento matemático que se busca cultivar ha sido insuficientemente explorado (Confrey y Lachance, 2000; Cobb et ál., 2003a). También, cuando se sabe poco sobre cómo impactan las experiencias educativas previas, de los estudiantes con los que se espera trabajar, en el desarrollo de nociones matemáticas específicas (Gravemeijer y Cobb, 2006). Por ejemplo, la gran mayoría de las investigaciones enfocadas al estudio del desarrollo de nociones fraccionarias ha sido realizada en contextos que coinciden con lo que Skovsmose (2005) llama el *aula matemática prototípica*; esto es, han sido realizadas en contextos escolares bien equipados, con niños de familias más o menos bien acomodadas y maestros relativamente bien formados. En contraste, son muy pocos los estudios realizados en el tipo de aula que es muy común encontrar en los países en desarrollo, es decir, un aula insuficientemente equipada, con alumnos cuyas familias viven en condiciones de marginación y exclusión, y un maestro con carencias importantes en su formación.

En el resto del artículo describo las aportaciones de cuatro estudios realizados en el campo de las fracciones. Lo hago relacionándolas con tres metas centrales de los experimentos de diseño. Es importante aclarar que de los cuatro estudios, sólo uno implicó la instrumentación de un experimento de diseño completo (Cortina et ál., en prensa). Los otros tres fueron realizados con la intención de ser estudios exploratorios que aportaran datos útiles para la posible instrumentación de este tipo de experimentos, en el futuro.

PUNTUALIZAR LOS OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES

Como ya se mencionó, el primer paso en la formulación de una THA consiste en puntualizar los objetivos de aprendizaje. Ello implica realizar una revisión crítica de la literatura relevante en el campo. Por ejemplo, en el caso de las fracciones, en esta revisión se deben incluir los trabajos que se han preocupado por especificar la naturaleza didáctica del concepto (ver arriba). También pueden revisarse trabajos centrados en conceptos matemáticos distintos al de las fracciones, pero relacionados. Por ejemplo, se pueden incluir trabajos que se centren en la proporcionalidad, en las razones o en los números decimales.

En la revisión de la literatura se procura dar respuesta a preguntas como las siguientes: ¿Cuáles son las ideas centrales en este dominio? ¿Qué relación tiene el concepto con otros que forman el currículo? ¿Qué forma de entender el concepto beneficiaría más a los educandos, en el sentido de acceder a otras ideas del currículo de matemáticas, y de poder participar competentemente en prácticas científicas, económicas y de la vida cotidiana?

La puntualización de los objetivos de aprendizaje es un paso necesario en la formulación de una THA ya que, como lo explican Gravemeijer y Cobb (2006), los objetivos predominantes en la enseñanza de un concepto no deben ser adoptados de manera directa. Lo común es que éstos estén fuertemente influenciados por la historia y tradición en la enseñanza del concepto, así como por las formas en que éste ha sido evaluado. Es, entonces, necesario juzgar la pertinencia de esos objetivos de manera crítica y a la luz de lo que muestra la investigación en el campo.

En la definición de objetivos de aprendizaje en fracciones, ha predominado una perspectiva consistente con lo que Steen (2001) llama *la alfabetización matemática*. Por lo general, se ha visto al aprendizaje de este concepto como un medio para que los estudiantes comiencen a conocer el campo de los números racionales. De esta manera, se le ha dado en la definición de objetivos de enseñanza gran importancia a que los alumnos entiendan cuestiones relacionadas con la naturaleza numérica de las fracciones, tales como: su orden, su densidad y sus equivalencias (Steffe y Olive, 2010; Davydov, 1969/1991; Lamon, 2007), además de cómo y por qué estos números pueden ser sumados, restados, multiplicados y divididos (Brousseau et ál., 2004).

En nuestras investigaciones, hemos procurado responder a preocupaciones más relacionadas con lo que Steen (2001) llama *la alfabetización cuantitativa.* Al centro de estas preocupaciones está el encontrar formas de proveer a los estudiantes con recursos conceptuales que les permitan ser competentes en los ámbitos cotidiano, laboral, científico, económico y político del mundo actual; en los que la generación, comprensión, interpretación y comunicación de información cuantitativa son de gran importancia (NCTM, 2000; OECD, 2010). Esto nos ha llevado a proponer objetivos de aprendizaje de las fracciones, distintos a los que han predominado en la literatura especializada (cf., Cortina et ál., 2013; Cortina et ál., en prensa).

Interesados en el papel que tienen las fracciones en la cuantificación de fenómenos ecológicos, financieros, demográficos y de la administración de recursos públicos –al revisar la literatura que se enfoca a especificar la naturaleza didáctica del concepto–, reconocimos gran valor en la reflexión de Thompson y Saldanha (2003) sobre qué implica entender bien las fracciones. Según estos autores, el razonar de manera compleja sobre las fracciones implica "concebir que dos cantidades se encuentran en una relación recíproca de tamaño relativo" (p. 107).

En términos de puntualizar los objetivos de aprendizaje para formular una THA, la reflexión de estos autores nos pareció valiosa ya que presenta a las fracciones como una idea única, aunque multifacética, en torno a la cual organizar los esfuerzos educativos (Cobb, 1999). Además, le reconoce a las fracciones una función cuantitativa específica, estrechamente vinculada a la proporcionalidad, lo que permite conectar la enseñanza del concepto con el uso que se hace de los números racionales en diversas disciplinas, particularmente para medir y evaluar fenómenos (Maya, 2011).

El puntualizar los grandes objetivos de aprendizaje de las fracciones con base en la reflexión de Thompson y Saldanha nos ha llevado a reconsiderar la forma y el orden en que distintas nociones relacionadas con el estudio del concepto deben ser abordadas en la enseñanza. Así, nos ha llevado a considerar que las fracciones unitarias deben ser directamente abordadas como un recurso para cuantificar la relación recíproca de multiplicar una magnitud por un número entero (Cortina et ál., en prensa); por ejemplo, para cuantificar la relación recíproca de un enunciado como éste: "La distancia entre Guadalajara y la Ciudad de México es seis veces la distancia entre Cuernavaca y la Ciudad de México". Dicho de manera recíproca: "La distancia entre Cuernavaca y la Ciudad de México es un sexto de la distancia entre Guadalajara y la Ciudad de México".

Otra consecuencia importante de asumir las ideas de Thompson y Saldanha en la puntualización de objetivos de aprendizaje en fracciones ha sido la de considerar que las fracciones impropias deben ser introducidas de manera temprana en la enseñanza, toda vez que éstas son siempre el recíproco de una fracción propia (por ejemplo, el recíproco de 3/5 es 5/3). Esto, a su vez, nos ha llevado a procurar encontrar formas de introducir el concepto de fracción sin utilizar el modelo general de la equipartición, sea de uno o varios enteros, ya que este modelo involucra múltiples inconsistencias respecto a la idea de fracción impropia (cf. Freudenthal, 1983; Cortina et ál., 2013).

IDENTIFICACIÓN DE LOS PUNTOS DE PARTIDA PARA APOYAR EL APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES

El segundo paso en la formulación de una trayectoria de aprendizaje implica identificar nociones matemáticas que los alumnos han desarrollado como resultado de experiencias escolares y extraescolares previas, y que tienen el potencial de servir de base inicial para el desarrollo de formas cada vez más complejas de entender un concepto. La puntualización que se hace de los grandes objetivos de aprendizaje ayuda a determinar cuáles nociones tendrían el mayor potencial. Por ejemplo, en la literatura en fracciones, varios autores han reconocido que los alumnos, desde edades tempranas, pueden involucrarse de manera significativa en actividades que implican la partición y repartición equitativa de un objeto divisible (e.g., una galleta; Charles y Nason, 2000). Las nociones que los alumnos ponen en juego al involucrarse en estas actividades han sido consideradas por varios autores como una base adecuada para el aprendizaje del concepto (e.g., Lamon, 2007; Steffe y Olive, 2010). Esto lo han hecho partiendo del supuesto de que la partición y distribución de un entero es un contexto propicio para modelar las propiedades numéricas de los racionales, como su equivalencia y densidad.

Sin embargo, si lo que ha de priorizarse en la enseñanza de las fracciones es la idea de las relaciones recíprocas de tamaño relativo entre cantidades, las nociones previas de los estudiantes sobre la equipartición pueden ser consideradas como de poca relevancia para el aprendizaje del concepto (Freudenthal, 1983).

La identificación de los puntos de partida de una THA frecuentemente requiere de la conducción de un estudio exploratorio, del que puede resultar un producto de investigación valioso en sí mismo (cf., McGatha et ál., 2002). Mis colegas y yo hemos realizado tres de estos estudios. En ellos, utilizando diferentes estrategias, hemos procurado identificar las nociones previamente desarrolladas por estudiantes provenientes de contextos socioculturales que han estado, si no ausentes, marginalmente representados en los estudios realizados en el campo de las fracciones, y del razonamiento multiplicativo en general. Cabe recalcar que, aunque estos estudios no consistieron en la instrumentación de un experimento de diseño, entre otras cosas, fueron realizados con la intención de poder ser útiles en la fase de planeación de uno de estos experimentos, en el futuro.

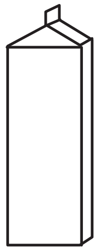
Antes de describir los estudios y sus hallazgos, es importante aclarar que éstos tienen cierta similitud con aquellas investigaciones que se han realizado con la finalidad de documentar los niveles de comprensión de las fracciones que estudiantes de diferentes edades logran (ver arriba). Sin embargo, una diferencia importante entre nuestros estudios y esas investigaciones es que, en concordancia con la metodología de los experimentos de diseño (Cobb et ál., 2003b), para nosotros ha sido más importante documentar lo que los estudiantes ya saben y entienden, que aquello sobre lo que tienen concepciones erróneas, o simplemente desconocen.

Primer estudio

En el primero de los estudios que realizamos para identificar un punto de partida (Cortina y Zúñiga, 2008), documentamos las nociones matemáticas que estudiantes de 4º grado de primaria, provenientes de comunidades social y económicamente excluidas, traerían a juego al resolver problemas que implicasen el concebir y comparar el tamaño de una magnitud, que es definida como el recíproco de multiplicar por un número entero. El estudio consistió en entrevistar de manera individual a 14 estudiantes de una escuela urbana marginada, en Chiapas, México. La situación principal que se utilizó implicó comparar el tamaño de diferentes tipos de vasos en relación a cuántos vasos de cada tipo podían ser llenados con la leche contenida en un cartón de leche (véase figura 1). Vale la pena aclarar que los estudiantes nunca vieron los vasos, sólo se los imaginaron.

Los estudiantes primero compararon vasos de un tamaño tal que el cartón de leche alcanzaría exactamente para llenar tres de ellos (1/3), con vasos de un tamaño tal que el cartón de leche alcanzaría exactamente para llenar cuatro de ellos (i.e., 1/3 vs. 1/4).

Figura 1 Dibujo del cartón de leche (de un litro) que se usó en las entrevistas



Con base en explicaciones similares, los estudiantes después compararon vasos de las siguientes capacidades: 1/3 vs. 1/5, 1/10 vs. 1/3 y 1/10 vs. 1/5.

Entre los resultados obtenidos estuvo el que todos los estudiantes compararan correctamente la capacidad relativa de los vasos, en todos los casos arriba mencionados. La siguiente transcripción ejemplifica las explicaciones que dieron los niños al comparar el tamaño de los vasos de plástico (1/3) con los de vidrio (1/5):

Vicky: *Indica que los vasos de plástico son más grandes.*
Entrevistadora: *¿Por qué?*
Vicky: *Porque eran 3* [de plástico] *y los de vidrio son 5.*
Entrevistadora: *¿Y eso qué quiere decir?*
Vicky: *Le sirven a cada quien un vaso* [de plástico], *pero si sirven 5* [vasos de vidrio] *va a tener más poco [de leche un vaso de vidrio].*

En general, los resultados de este estudio mostraron que alumnos, provenientes de comunidades social y económicamente excluidas y que se inician en el estudio de las fracciones, cuentan con nociones y conocimientos previos que les permiten imaginar, de manera correcta, el tamaño de una magnitud cuantificada por una fracción unitaria, cuando ésta es definida como el inverso de una multiplicación por un número entero. Con ello, documentamos que las relaciones recíprocas de tamaño relativo pueden servir de base para la enseñanza de las fracciones, desde que ésta inicia, y que la equipartición no es la única vía para ayudar a los estudiantes a imaginar el tamaño de una magnitud cuantificada por una fracción unitaria.

Los resultados de este estudio fueron claves para la instrumentación del experimento que se describe más adelante en este capítulo.

Segundo estudio

El segundo estudio que realizamos fue de corte cuantitativo (Cortina et ál., 2012a). Nos interesó indagar, de manera exploratoria, hasta qué punto una THA que partiera de nociones básicas de proporcionalidad, como las descritas en el apartado anterior, sería viable con estudiantes de grados más avanzados. Un antecedente importante de nuestro estudio fueron los resultados obtenidos por Backhoff et ál. (2006) sobre el dominio que tienen los estudiantes mexicanos de secundaria de los conocimientos matemáticos del currículum de primaria. Con base en una muestra representativa, estos autores encontraron que si bien el desempeño de los estudiantes de secundaria era, en términos estadísticos, significativamente mejor a los de primaria, la diferencia real era muy poca. En general, estos resultados mostraron que el progreso que logran los estudiantes mexicanos en su comprensión de nociones matemáticas básicas, durante los tres años de enseñanza secundaria, es considerablemente limitado.

Tomando en cuenta los principios teóricos de los experimentos de diseño, supusimos que estos resultados pobres se debían, al menos en parte, a que el nivel de comprensión de las matemáticas con el que llega la mayoría de los estudiantes mexicanos a la secundaria no les permite acceder fácilmente a los conocimientos del currículum y, en general, beneficiarse de la enseñanza recibida en ese nivel educativo. Por ello, consideramos que sería importante determinar si el desarrollo de propuestas de enseñanza de las fracciones que se orientaran hacia nociones básicas sería apropiado para el nivel de secundaria.

Es así que realizamos un estudio exploratorio para indagar sobre el nivel de comprensión que los estudiantes mexicanos logran, al terminar la primaria, de las fracciones como números que cuantifican el tamaño de una magnitud. El estudio consistió en aplicar 297 cuestionarios a alumnos de 6º grado de 13 escuelas primarias, seis ubicadas en Chiapas y siete en el Distrito Federal. Se procuró tener estudiantes que provinieran de contextos muy diversos, por lo que en la muestra se incluyeron escuelas indígenas, rurales, urbanas públicas, matutinas y vespertinas, así como escuelas privadas.

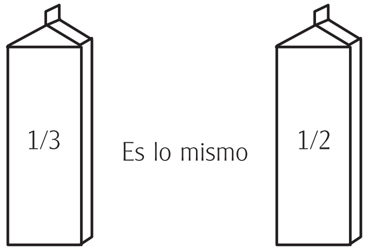
El instrumento incluyó seis reactivos que requerían comparar la cantidad de leche contenida en dos cartones. En cada reactivo se mostraron dos cartones de leche dibujados, con una fracción escrita al pie que indicaba la cantidad de leche contenida (figura 2).

Se les pidió a los alumnos que marcaran el nivel de leche en cada cartón, de acuerdo con lo indicado en la fracción, y que señalaran cuál de los dos cartones estaba más lleno, o si ambos contenían la misma cantidad de leche. Las fracciones a comparar fueron: 1/3 vs. 1/2, 3/4 vs. 1/4, 1/3 vs. 2/3, 2/4 vs. 1/2, 4/9 vs. 3/4 y 5/10 vs. 1/2. Como puede notarse, se tenían que comparar pares de fracciones relativamente comunes y todas las comparaciones podían realizarse con base en evaluar si las diferentes fracciones representaban cantidades mayores, menores o iguales a 1/2.

También se incluyó un reactivo en el que los estudiantes tenían que indicar cuál de las siguientes cifras indicaba la mayor cantidad de leche: 5/4 de litro, 8/9 de litro, 1 litro.

Los resultados de este estudio sugirieron que hay un gran número de alumnos que egresan de la primaria con un conocimiento muy precario de las fracciones como números que cuantifican tamaños relativos, particularmente en las escuelas indígenas, rurales y urbanas vespertinas. El 30.4% del total de los alumnos participantes ni siquiera asoció de manera consistente la inscripción “1/2” con la noción de *mitad*. Del otro lado

Figura 2 Ejemplo de los reactivos



de la escala, solamente el 19.9% de los estudiantes pareció haber desarrollado las concepciones fraccionarias necesarias para reconocer que una fracción puede cuantificar legítimamente a una magnitud mayor a uno.

En general, este estudio confirmó nuestra conjetura sobre la necesidad de desarrollar propuestas de enseñanza para 1º de secundaria que partan del supuesto de que, al llegar a este nivel, los alumnos aún no han desarrollado conocimientos que les permitan interpretar las fracciones como números que cuantifican tamaños relativos.

TERCER ESTUDIO

El tercer estudio exploratorio fue realizado por Francisco Maya (2011), un alumno del Doctorado en Educación de la Universidad Pedagógica Nacional, quien realizó su tesis bajo mi dirección. Parte de la investigación que realizó se enfocó en determinar el tipo de concepciones sobre las relaciones multiplicativas con las que cuentan los estudiantes de las carreras económico-administrativas, al inicio de la licenciatura. El estudio implicó tres ciclos de recolección de datos, en los que el investigador se preocupó por puntualizar el tipo de relaciones sobre las que los alumnos podrían razonar con facilidad. Esto es, se preocupó por identificar las concepciones de los alumnos que un maestro de matemáticas de nivel superior podría esperar que la gran mayoría de sus estudiantes hubieran desarrollado como resultado de sus experiencias educativas en los niveles previos (primaria, secundaria y bachillerato).

Maya (2011) identificó una serie de conceptos multiplicativos que los profesionales de las carreras económico-administrativas deberían de dominar, y los ordenó tomando en cuenta que comprender unos requeriría de antes haber comprendido otros. Los conceptos que consideró, yendo del más al menos complejo, fueron los siguientes: *1)* tasas de cambio definidas para un intervalo; *2)* razones y medidas de intensidad; *3)* fracciones como comparadores; *4)* fracciones, expresiones decimales, porcentajes y elasticidades, y *5)* medición.

Utilizando encuestas y entrevistas, Maya (2011) fue indagando sobre el nivel de comprensión que diferentes cohortes de estudiantes tenían de estos conceptos, comenzando por las tasas de cambio definidas para un intervalo. El criterio que utilizó para considerar que un estudiante tenía un nivel de comprensión suficiente de un concepto para ser aprovechado en el aprendizaje de uno más complejo fue que, al resolver un problema que lo implicaba, el educando pudiera: *1)* resolverlo correctamente, *2)* explicar y justificar su respuesta aludiendo a las cantidades involucradas (y no sólo a las mecanizaciones), y *3)* crear una representación gráfica que apoyara sus explicaciones.

Maya (2011) encontró que el nivel sólido de comprensión de las relaciones multiplicativas, con el que la gran mayoría de los estudiantes de las carreras económico-administrativas llega a la universidad, implica a los números enteros y a su recíproco; esto es, las fracciones unitarias. Así, la mayoría de los alumnos investigados podían resolver correctamente, explicar y graficar su respuesta a problemas como éste: "¿Si el valor de un dólar es 13 veces el valor de un peso, cuál es el valor de un peso respecto a un dólar?"

En contraste, un problema como el siguiente les resultaba mucho más difícil: "Si el sueldo de Juan cuando ingresó a la compañía equivale a tres cuartas partes de su sueldo actual, ¿cuánto gana hoy Juan respecto a lo que ganaba cuando ingresó?" Varios estudiantes podían producir respuestas correctas a este segundo tipo de problemas, ya sea despejando una ecuación o realizando una regla de tres. Sin embargo, muy pocos pudieron justificar sus respuestas articulando explicaciones que aludieran a las cantidades en cuestión[1] y produciendo una representación gráfica que respaldara sus explicaciones.

Como resultado de su exploración, Maya (2011) formuló una primera versión de una THA de conceptos multiplicativos como las tasas de cambio definidas para un intervalo. En ésta, tomó como punto de partida las relaciones multiplicativas que implican a un número entero como escalar, y su recíproco, una fracción unitaria. No instrumentó un experimento de diseño, propiamente, pero sí realizó otras exploraciones sobre la viabilidad de esta trayectoria. En general, en estas exploraciones encontró que cuando se toma este punto de partida, los estudiantes de las licenciaturas económico-administrativas "son capaces de desarrollar conceptos multiplicativos cada vez más complejos y útiles para sus profesiones" (Ibíd., p. 302).

DESARROLLO DE ALTERNATIVAS DE ENSEÑANZA

En el contexto de la investigación diseño, las propuestas de enseñanza se diseñan utilizando como fundamento una THA, en la cual se puntualizan los grandes objetivos de aprendizaje y se identifica un posible punto de partida. Parte del trabajo que mis colegas

[1] Un ejemplo sería: "Juan ganaba tres veces un cuarto (3/4) de lo que gana hoy. Así que hay una cantidad que corresponde a un cuarto de lo que hoy gana Juan y a un tercio de lo que ganaba cuando ingresó. Entonces, Juan gana hoy cuatro veces un tercio (4/3) de lo que ganaba cuando llegó a la compañía".

y yo hemos realizado en el campo de las fracciones ha consistido en formular una de estas trayectorias e investigar sobre su viabilidad, a través de la instrumentación de un experimento de diseño con alumnos de 4º grado de primaria.[2] En este esfuerzo, se diseñó una propuesta de enseñanza que busca favorecer el aprendizaje de las fracciones como números que cuantifican magnitudes.

La propuesta que diseñamos se fundamenta en una THA que define como *gran objetivo de aprendizaje* a las ideas de Thompson y Saldanha (2003) sobre las relaciones recíprocas de tamaño relativo, previamente discutidas. Además, retoma las ideas de Freudenthal (1983) sobre *la fracción como comparador*, así como en el punto de partida, ya descrito (Cortina y Zúñiga, 2008), en el que las fracciones unitarias son abordadas como un recurso para cuantificar la relación recíproca de multiplicar una magnitud por un número entero.

En la THA en la que se fundamenta la propuesta, se busca cultivar en los alumnos, desde temprano, la imagen de una fracción unitaria como un número que da cuenta del tamaño de cierto atributo, en algo que está separando de la unidad de referencia. Para cultivar dicha imagen, se diseñaron una serie de actividades con las que se procura que los niños experimenten la "reinvención" de la medición lineal. En éstas se utiliza una narrativa sobre las formas en que un grupo legendario de antiguos mayas (los acajay) medía. Primero se explora la medición utilizando partes del cuerpo (pies, cuartas, pasos, etc.). Posteriormente se explora la medición utilizando una vara (de 24 cm aprox.) como medida estandarizada.

A partir de la experiencia de medir con la vara, se introduce el problema de cómo crear unidades de medida más pequeñas, para dar cuenta de manera precisa y sistemática de la longitud de los espacios que la vara no cubre exactamente. La solución que se le presenta a los alumnos, como la desarrollada por los acajay, consiste en crear varas más pequeñas, llamadas *pequeños*, que tienen la característica de cumplir con un criterio iterativo respecto de la vara (véase figura 3). Utilizando popotes de plástico[3] y tijeras, los estudiantes crean estos pequeños.

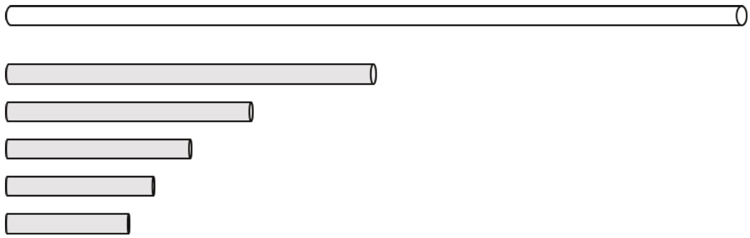
Se le pide primero a los estudiantes que produzcan un *pequeño de a dos* (i.e., un popote cuya longitud corresponde a un medio de la vara). Se les explica que sería un popote de un tamaño tal que dos iteraciones de su longitud cubrirían exactamente la longitud de la vara. Los estudiantes entonces manipulan la longitud de un popote que al principio es ligeramente más corto que la vara. Cuando lo iteran y notan que la segunda iteración rebasa la longitud de la vara, el popote es cortado con las tijeras (véase figura 4). Cuando la segunda iteración resulta ser más corta que la vara, los estudiantes desechan el popote y comienzan el proceso con uno nuevo. Después de varias pruebas, los estudiantes finalmente obtienen un popote que cumple con la condición acordada.

---

[2] Las descripciones detalladas de la THA y del experimento de diseño en la que fue utilizada se encuentra en Cortina, Visnovska y Zúñiga (en prensa). Desafortunadamente, por cuestiones de espacio, no fue posible incluirlas aquí.

[3] Popote es el nombre utilizado en México para las pajillas para sorber líquidos.

Figura 3 La vara y los pequeños de a dos (1/2), de a tres (1/3), de a cuatro (1/4), de a cinco (1/5) y de a seis (1/6).



A continuación, utilizando este método, los estudiantes producen otros pequeños (e.g., 1/3, 1/4, 1/5 y 1/6). Los pequeños producidos son utilizados, primeramente, para apoyar formas de razonamiento consistentes con *la relación de orden inverso* (Tzur, 2007), presente en las fracciones unitarias. Por ejemplo, se utilizan para reflexionar sobre qué sería más largo, un pequeño de a ocho o un pequeño de a nueve (1/8 vs. 1/9).

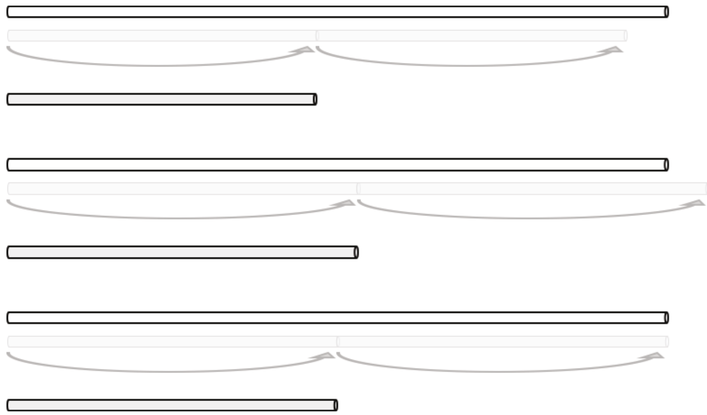
Posteriormente, los pequeños son utilizados para crear tiras de papel de una longitud específica. Por ejemplo, se les puede pedir que creen una tira cuya longitud equivalga a seis iteraciones del pequeño de a cinco (i.e., 6/5). Estas tiras sirven de base fenomenológica para ayudar a los alumnos a razonar sobre el tamaño relativo de las fracciones respecto a la unidad de referencia y entre ellas. Por ejemplo: ¿Qué sería más largo, una tira que midiera seis pequeños de a cinco o una vara (6/5 vs. 1)? ¿Qué sería más largo, una tira que midiera seis pequeños de a cinco o una que midiera siete pequeños de a ocho (6/5 vs. 7/8)? ¿Qué sería más largo, una tira que midiera cuatro pequeños de a cuatro o una que midiera siete pequeños de a siete (4/4 vs. 7/7)?

Los resultados que hemos obtenido en nuestra investigación (Cortina et ál., en prensa) muestran que una propuesta de enseñanza de las fracciones, fundamentada en una THA que retoma la caracterización hecha por Freudenthal (1983) de la fracción como comparador, puede ser viable. En general, hemos encontrado que los estudiantes de tercer y cuarto grados de primaria cuentan con las nociones e intuiciones necesarias para involucrarse de manera productiva en estas actividades. Además, hemos documentado que este tipo de propuestas son útiles para apoyar a los estudiantes en formas de razonar consistentes con la relación de orden inverso de las fracciones unitarias, y sobre el tamaño relativo de fracciones propias e impropias respecto a la unidad (Cortina et ál., en prensa; Cortina et ál., 2012b).

CONCLUSIONES

La investigación que se preocupa por la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones es intimidante, tanto por la riqueza y complejidad del tema, como por el gran número

Figura 4 Manipulación de un popote para que cumpla con la condición de que dos iteraciones de su longitud correspondan exactamente con la longitud de la vara.



de estudios que se han realizado en el campo. Hans Freudenthal, el célebre matemático y educador neerlandés, al embarcarse en el análisis didáctico del concepto dijo que esperaba no ahogarse en tanta riqueza fenomenológica.

En este artículo se ilustraron los recursos que ofrece la investigación diseño para estudiar un tema complejo como el de las fracciones. Los principios que inspiran a esta metodología innovadora de la educación matemática nos han facilitado, a mis colegas y a mí, hacer aportaciones a asuntos vinculados con el aprendizaje del concepto que han intrigado a los investigadores en el campo y, en algunos casos, generado frustración. De manera específica, esta metodología nos ha permitido identificar y proponer alternativas a: *1)* las formas en que tradicionalmente se han definido los grandes objetivos en la enseñanza del concepto; *2)* los recursos con los que cuentan niños y jóvenes para iniciarse en, y continuar con, el estudio del campo, y *3)* los medios didácticos con los que se puede apoyar el aprendizaje del concepto.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis colegas Claudia Zúñiga, Francisco Maya, Jana Visnovska, Renata Cardoso y Luz Pérez Quiroz sus contribuciones a mi trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Backhoff, E., E. Andrade, A. Sánchez, M. Peon y A. Bouzas (2006), *El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México: Sexto de primaria y tercero de secundaria*. México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Ball, D. L. (1993), "Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions", en T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, Hillsdale, Lawrence Erlbaum.

Behr, M., R. Lesh, T. Post y E. Silver (1983), "Rational number concepts", en R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Nueva York, Academic Press, pp. 91-125.

Brousseau, G., N. Brousseau y V. Warfield (2004), "Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurement", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 23, pp. 1-20.

Charles, K. y R. Nason (2000), "Young children's partitioning strategies", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 43, pp. 191-221.

Cobb, P. (1999), "Individual and collective mathematical learning: The case of statistical data analysis", *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 1, núm. 1, pp. 5-44.

——— (2007), "Putting philosophy to work: Coping with multiple theoretical perspectives", en F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Greenwich, Information Age Publishing-NCTM.

Cobb, P. y J. Bowers (1999), "Cognitive and situated learning perspectives in theory and practice", *Educational Researcher*, vol. 28, núm. 2, pp. 4-15.

Cobb, P., J. Confrey, A. A. diSessa, R. Lehrer y L. Schauble (2003a), "Design experiments in education research", *Educational Researcher*, vol. 32, núm. 1, pp. 9-13.

Cobb, P., K. Gravemeijer, E. Yackel, K. McClain y J. Whitenack (1997), "Mathematizing and symbolizing: The emergence of chains of signification in one first-grade classroom", en D. Kirshner y J. A. Whitson (eds.), *Situated Cognition: Social, Semiotic, and Psychological Perspectives*, Mahwah, Lawrence Erlbaum, pp. 151-232.

Cobb, P., K. McClain y K. Gravemeijer (2003b), "Learning about statistical covariation", *Cognition and Instruction*, vol. 21, pp. 1-78.

Cobb, P., Q. Zhao y J. Visnovska (2008), "Learning from and adapting the theory of realistic mathematics education", *Education et Didactique*, vol. 2, núm. 1, pp. 55-73.

Confrey, J. y A. Lachance (2000), "Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design", en A. Kelly y A. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Mahwah, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 231-266.

Cortina, J. L., E. R. Cardoso y C. Zúñiga (2012a), "El significado cuantitativo que tienen las fracciones para estudiantes mexicanos de 6º de primaria", *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, vol. 14, núm. 1, pp. 71-85.

Cortina, J. L., J. Visnovska y C. Zúñiga (2012b), "Alternative starting point for teaching fractions", en J. Dindyal, L. P. Cheng y S. F. Ng (eds.), *Mathematics Education: Expanding Horizons. Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, eBook, Singapore, MERGA, pp. 210-217.

Cortina, J. L., J. Visnovska y C. Zúñiga (en prensa), "Unit fractions in the context of proportionality: Supporting students' reasoning about the inverse order relationship", *Mathematics Education Research Journal*.

Cortina, J. L. y C. Zúñiga (2008), "La comparación relativa de tamaños: Un punto de partida alternativo y viable para la enseñanza de las fracciones", *Educación Matemática*, vol. 20, núm. 2, pp. 5-23.

Cortina, J. L., C. Zúñiga y J. Visnovska (2013), "La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones", *Educación Matemática*, vol. 25, núm. 2, pp. 7-29.

Davydov, V. V. (1969/1991), "On the objective origin of the concept of fractions", *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 13, núm. 1, pp. 13-64.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht, Kluwer.

Gould, P. (2005), "Year 6 students' methods of comparing the size of fractions", en P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce et ál. (eds.), *Proceedings of the Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Sydney, MERGA, pp. 393-400.

Gravemeijer, K. y P. Cobb (2006), "Design research from a learning design perspective", en J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney y N. Nieveen (eds.), *Educational Design Research: The Design, Development and Evaluation of Programs, Processes and Products*, Nueva York, Routledge, pp. 45-85.

Hannula, M. S. (2003), "Locating fraction on a number line", en N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 3, Honolulu, PME, pp. 17-24.

Hart, K. (1989), "Fractions: Equivalence and addition", en K. Hart, D. C. Johnson, M. Brown, L. Dickson y R. Clarkson (eds.), *Childrens' Mathematical Frameworks 8-13: A Study of Classroom Teaching*, Windsor, NFER-Nelson, pp. 46-75.

Kieren, T. E. (1980), "The rational number construct: Its elements and mechanisms", en T. E. Kieren (ed.), *Recent Research on Number Learning*, Columbus, ERIC/SMEAC, pp. 125-149.

Lamon, S. J. (2007), "Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research", en F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte, Information Age Pub, pp. 629-667.

Maya, F. (2011), *El razonamiento multiplicativo en jóvenes universitarios del área económico administrativa*, tesis doctoral, México, Universidad Pedagógica Nacional.

McGatha, M., P. Cobb y K. McClain (2002), "An analysis of students' initial statistical understandings: Developing a conjectured learning trajectory", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 16, núm. 3, pp. 339-355.

NCTM (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics.

Norton, A. (2008), "Josh's operational conjectures: Abductions of a splitting operation and the construction of new fractional schemes", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 39, pp. 401-430.

OECD (2010), *PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do: Student Performance in Reading, Mathematics and Science*, vol. 1, París, Organisation for Economic Co-operation and Development.

Saenz-Ludlow, A. (1994), "Michael's fraction schemes", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 25, pp. 50-85.

Saxe, G. B., E. V. Taylor, C. McIntosh y M. Gearhart (2005), "Representing fractions with standard notations: A developmental analysis", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 36, pp. 137-157.

Skovsmose, O. (2005), *Critical Mathematics Education for the Future* (Working Papers on Education), Denmark, Aalborg University.

Steen, L. A. (2001), "The case for quantitative literacy", en L. A. Steen (ed.), *Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative Literacy*, Princeton, National Council on Education and the Disciplines.

Steffe, L. P. y J. Olive (2010), *Children's fractional knowledge*, Nueva York, Springer.

Steffe, L. P. y P. W. Thompson (2000), "Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements", en A. Kelly y A. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Mahwah, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 267-307.

Stephan, M., J. Bowers, P. Cobb y K. Gravemeijer (eds.) (2003), *Supporting Students' Development of Measuring Conceptions: Analyzing Students' Learning in Social Context*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics.

Streefland, L. (1991), *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research*, Dordrecht, Kluwer.

Thompson, P. W. y L. A. Saldanha (2003), "Fractions and multiplicative reasoning", en J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter (eds.), *Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 95-113.

Tzur, R. (2007), "Fine grain assessment of students' mathematical understanding: Participatory and anticipatory stages in learning a new mathematical conception", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 66, pp. 273-291.

DATOS DEL AUTOR

José Luis Cortina
Universidad Pedagógica Nacional, México
jose.luis.cortina@mac.com

Desarrollo y aplicación de nociones estadísticas desde la práctica profesional: el caso de los trabajadores sociales

Daniel Eudave Muñoz

Resumen: El propósito de esta investigación es analizar las actividades de los trabajadores sociales que involucran la generación y tratamiento de datos numéricos y estadísticos, así como la forma en que enfrentan y resuelven problemas que surgen durante su realización. El trabajo se centra en el análisis de las actividades, las situaciones y su estructura conceptual, siguiendo el enfoque de la didáctica francesa de la formación profesional (*didactique professionnelle*). Se reportan los resultados de entrevistas que indagan sobre los usos que dan a la estadística en su práctica profesional una muestra de trabajadoras(es) sociales, en la ciudad de Aguascalientes, México, así como un análisis detallado de los conceptos pragmáticos que dan sentido y configuran los saberes estadísticos de estos profesionistas.

Palabras clave: concepto pragmático, aprendizaje situado, educación y trabajo, educación estadística, trabajo social.

Abstract: The purpose of this research is to analyze the social workers' activities involving the generation and processing of numerical and statistical data and how they deal with these tasks and how they solve them. The work focuses on the analysis of activities, situations and conceptual structure, following the approach of the French educational training (*didactique professionnelle*). We report the use of statistics for the social workers in Aguascalientes City, Mexico, and the pragmatical concepts that give meaning and order to their professional knowledge.

Keywords: pragmatical concept, situated learning, education and work, statistical education, social work.

1. INTRODUCCIÓN

El trabajo social se define, según la Federación Internacional de Trabajadores Sociales, como "la profesión que promueve el cambio social, la resolución de problemas en las relaciones humanas y el fortalecimiento y la liberación de las personas para mejorar su bienestar. Partiendo de las teorías sobre el comportamiento humano y los sistemas sociales, el trabajador social interviene en aquellos aspectos en que las personas inte-

Fecha de recepción: 22 de julio de 2013; fecha de aceptación: 30 de septiembre de 2013.

ractúan con su entorno. Los principios de los derechos humanos y la justicia social son fundamentales para el trabajo social" (IFSW, 2012).

En el contexto mexicano, las principales funciones del trabajador social con estudios de nivel de licenciatura[1] son: "realizar investigaciones sociales; planear, administrar, ejecutar, supervisar y evaluar programas y proyectos sociales; formar y organizar grupos para la prevención y atención de los problemas sociales; diseñar, desarrollar y evaluar estrategias de intervención social en los niveles individual, grupal y comunitario; aplicar estrategias de educación social para desarrollar las capacidades y habilidades de la población; organizar y capacitar a la población para motivar su participación social, y promover y fundamentar políticas sociales de acuerdo con las necesidades y demandas colectivas" (ENTS-UNAM, 2013).

El trabajo social es una profesión que no pareciera estar asociada con el manejo numérico y estadístico; sin embargo, dentro de la multiplicidad de actividades que comprende, los procesos de cuantificación suelen tener un papel importante. Taylor (1990) señala que los trabajadores sociales tienen que identificar y manipular las propiedades numéricas por lo menos en cuatro conjuntos de tareas: *a)* para el reconocimiento y definición de los problemas de las personas que atienden, tanto para efectos de diagnóstico como para su seguimiento y evaluación; *b)* para la toma de decisiones en sus intervenciones; *c)* para tratar información de conglomerados humanos, y *d)* para valorar la pertinencia de las nuevas tecnologías en sus campos de trabajo.

Hay que reconocer que estas tareas pueden ser, en parte, enfrentadas y resueltas con métodos cualitativos, pero al tener componentes intrínsecamente numéricos, no hacer uso de ellos implica desaprovecharlos y dejar de lado su potencial explicativo y de comunicación, sobre todo considerando que diferentes tipos de datos estadísticos son insumos cotidianos en las instituciones en las que se desempeñan los trabajadores sociales. Además, desde las políticas de rendición de cuentas implementadas en México desde hace poco más de una década, los trabajadores sociales, al igual que otros profesionistas, tienen que informar de manera clara sobre la correcta aplicación de recursos y sobre los logros obtenidos a corto, mediano y largo plazo. Como señala Calderwood:

> Even if students disagree with a positivist epistemology, they must acknowledge that many of their clients will come from and ask question from this perspective. In order to guide clients in an ethical and informed manner, social workers need to be prepared to offer explanations about and to critique the information that is available (2002, p. 22).

[1] Para ingresar al nivel de licenciatura se requiere contar por lo menos con 12 años de estudios previos, que incluyen nueve años de educación básica –primaria y secundaria– y tres de bachillerato o vocacional. El egresado de una licenciatura recibe un título con el cual se le permite ejercer una profesión. Cabe aclarar que durante muchos años los estudios de trabajo social se ofrecieron como carrera técnica que únicamente requerían como requisito la educación primaria y secundaria. Actualmente, algunas instituciones siguen ofreciendo estos estudios a nivel técnico.

[Aun si los estudiantes no están de acuerdo con la epistemología positivista, deben reconocer que muchos de sus clientes sí comparten e interrogan desde esta perspectiva. Para guiar a los clientes de una manera ética e informada, los trabajadores sociales necesitan estar preparados para ofrecer explicaciones a partir de la información de que disponen y analizarla críticamente.] (La traducción es mía)

Calderwood (2002) considera que lo más adecuado es que, durante su formación, los trabajadores sociales reconozcan la importancia de los métodos cuantitativos, lo mismo que su complementariedad con los métodos cualitativos. Incluso, llega a considerar que desde una perspectiva epistemológica crítica, el conocimiento estadístico puede redundar en un empoderamiento de los trabajadores sociales ante las situaciones laborales y sociales que enfrentan, esto es, en darles los elementos que le permitan un mayor control de las situaciones que atienden. También señala que la estadística puede ser utilizada para cambiar la percepción de los problemas sociales, si en los análisis estadísticos se hace un encuadre que permita clarificar los problemas de discriminación y opresión subyacentes en los hechos sociales, tales como las diferencias entre géneros.

Por otro lado, son ampliamente reconocidas las dificultades que tanto los estudiantes de trabajo social como los profesionistas en ejercicio tienen en el manejo de la estadística (Taylor, 1990; Thomas, 2008). Incluso Ezequiel Ander-Egg, uno de los autores más influyentes en el campo del trabajo social en México y en varios países de Latinoamérica, señala:

Quienes realizan estudios para ser trabajadores sociales no suelen tener condiciones para las matemáticas, consiguientemente la asignatura "Estadística" se transforma, en algunas escuelas, en un serio escollo a vencer. ¿Qué pasa en la práctica?: los estudiantes suelen gastar más energías para preparar esta asignatura que tiene un carácter instrumental (dentro de la cual –para colmo de males– se suelen estudiar temas innecesarios para formar un trabajador social), que en estudiar lo propiamente profesional. (1996, p. 238)

Kreuger (1987, citado por Taylor, 1990) señala que las dificultades que presentan los estudiantes de trabajo social con los conceptos y métodos estadísticos se debe a que están inadecuadamente preparados en el manejo de las matemáticas básicas que se requieren para el trabajo estadístico; porque se introduce el análisis cuantitativo demasiado tarde en sus carreras; por la falta de apreciación del poder de los modelos analíticos de la estadística; por sus posturas anticuantitativas, y por la falta de imaginación mental necesaria para una conceptualización lógica y cuantitativa. Con excepción del primer punto mencionado por Kreuger, el resto parece tener su origen en prácticas educativas poco adecuadas, que no toman en cuenta los usos de la estadística en el entorno laboral de los trabajadores sociales, sus procedimientos y los conceptos y métodos más pertinentes, tal y como sucede con otros profesionistas de las ciencias sociales (Harraway y Barker, 2005).

La formación inicial de estos profesionistas y la actualización permanente de quienes ya ejercen la profesión, debe partir de una revaloración de la estadística, que permita reconocer sus usos reales y potenciales en el campo profesional, enfatizando las ventajas que ofrece el dominio de competencias estadísticas así como los riesgos de tomar decisiones con base en un manejo deficiente de la información estadística. Este reconocimiento y valoración deben partir de un análisis de las propias tareas de los trabajadores sociales. Esto conlleva asumir una postura educativa centrada en la actividad del estudiante por sobre una postura centrada en el profesor y la disciplina, como lo sugieren Garfield y Ben-Zvi (2009), enfocándose, en este caso, en las ideas estadísticas centrales del ejercicio profesional del trabajador social, con los datos que realmente genera y analiza, con los instrumentos y herramientas que habitualmente utiliza.

Hay que recordar que la estadística es un saber que, junto con otros, conforma el bagaje teórico e instrumental del trabajador social y no necesariamente ocupa las primeras filas. Como lo mencionan Taylor (1990) y Calderwood (2002), la estadística es un componente importante para la planeación, evaluación y toma de decisiones de este profesionista, pero a fin de cuentas está subsumida en otros procesos y, por lo tanto, puede no ser reconocida como tal.

¿Cuál es el papel que en realidad ocupa la generación y manejo de datos estadísticos en el campo laboral del trabajo social?, ¿cómo se insertan las actividades numéricas y estadísticas en el conjunto de actividades de este profesionista?, ¿cómo son asumidas estas actividades por los trabajadores sociales? Esta investigación tiene como propósito analizar las actividades de los trabajadores sociales que involucran la generación y tratamiento de datos numéricos y estadísticos, así como la forma en que enfrentan dichas tareas, y los recursos cognitivos y técnicos en que se apoyan.

Aquí se analiza la actividad del trabajador social en su medio laboral cotidiano, tomando como marco de referencia la didáctica francesa de la formación profesional o *didactique professionnelle* (me parece más apropiado traducir *didactique professionnelle* como *didáctica de la formación profesional*, porque la traducción literal a *didáctica profesional* pudiera confundirse con la profesionalización de la didáctica y no como la didáctica propia de la formación de los profesionistas).

La didáctica de la formación profesional tiene por objetivo el análisis del trabajo en la perspectiva de la formación de las competencias y surge de la convergencia de investigaciones realizadas en diferentes dominios, como la psicología ergonómica, la psicología del desarrollo y la educación continua para adultos (Pastré, 2002; Pastré, Mayen y Vergnaud, 2006; Vidal-Gomel y Rogalski, 2007). El análisis de los patrones eficientes de desempeño de diferentes tipos de trabajadores llevó a las investigaciones de esta corriente a reconocer la importancia de los procesos cognitivos que acompañan toda acción, por rutinaria que parezca, en especial para poder enfrentar situaciones novedosas. Es por esto que el análisis de las tareas se realiza tomando en cuenta las conductas concretas, pero también las conceptualizaciones que las acompañan, muchas de las cuales son implícitas.

Para un análisis de este tipo es útil recurrir a la noción de *concepto pragmático*, que se define como las representaciones conceptuales y operativas, elaboradas en la acción y que se pueden transmitir por la experiencia, y que por tanto tienen un carácter colectivo e histórico al estar determinadas por la especificidad de las condiciones laborales. Los conceptos pragmáticos son los que estructuran la actividad eficaz de los operadores (Vidal-Gomel y Rogalski, 2007).

De manera complementaria, en la didáctica de la formación profesional, el análisis de las situaciones es central, pues permite recuperar la complejidad de una actividad profesional por medio del reconocimiento de su estructura conceptual. La *estructura conceptual de una situación* tiene los siguientes componentes:

- Los conceptos organizadores de la actividad, que son las dimensiones extraídas de la realidad, que permiten el diagnóstico o reconocimiento de la situación.
- Los indicadores, que son los observables que permiten dar un valor actual a los conceptos.
- Las clases de situaciones, que se pueden analizar a partir del valor dado a los conceptos organizadores y que van a especificar el repertorio de procedimientos o de reglas de acción a utilizar.
- Las estrategias esperadas, en función del nivel de conceptualización que posea un trabajador (Pastré, Mayen y Vergnaud, 2006, p. 164).

En los siguientes apartados se ejemplifica la aplicación de la noción de *concepto pragmático* como un organizador de la acción del trabajador social ante tareas que requieren de la obtención y manejo de datos numéricos y estadísticos. Como se verá, es a partir del análisis de la actividad de los actores que uno puede localizar e identificar la estructura conceptual de la situación y las diversas representaciones que los actores se hacen de la tarea (Pastré, 2002, p. 9).

2. MÉTODO Y PROCEDIMIENTOS

Método del estudio

Se realizaron entrevistas a profundidad a 10 trabajadores sociales (véase tabla 1), mediante las cuales se indagaron los usos que hacen de la estadística en el ejercicio de su profesión. La entrevista sirvió también para identificar las herramientas de trabajo utilizadas en las actividades en donde lo central es la obtención y manejo de datos numéricos. Así mismo, se identificaron las concepciones que los trabajadores sociales tenían sobre la estadística. Se les preguntó también sobre sus antecedentes escolares y laborales, para identificar los usos que han hecho de la estadística en el ámbito escolar y en sus trabajos anteriores. Para esta actividad se utilizó una guía de entrevista (véase Anexo I). Todas las entrevistas se realizaron en los espacios ordinarios de trabajo y fueron audio-grabadas para ser posteriormente transcritas para su análisis. Todas las entrevistas las realizó el autor de este estudio.

Análisis de los procedimientos e instrumentos de trabajo

La parte central del estudio fue la identificación y análisis de las situaciones laborales en donde la estadística desempeña un papel esencial. A partir de la identificación de los *conceptos organizadores*, se procedió a la elaboración de la *estructura conceptual de la situación*, enfocándonos en una de las situaciones que es fundamental para el trabajo social y que tiene que ver con la obtención y procesamiento de datos cualitativos y cuantitativos: la realización de los *estudios socioeconómicos*. La importancia, usos y procedimientos seguidos en la elaboración de los estudios socioeconómicos fueron explicados por los trabajadores sociales en las entrevistas, y posteriormente se completó el análisis con la revisión de los contenidos de los formatos que utilizan para la realización del estudio socioeconómico (ver Anexo II).

Profesionistas entrevistados

Se seleccionaron 10 trabajadores sociales que laboraban en instituciones del sector público ubicadas en zonas urbanas, en el estado de Aguascalientes, México. Las áreas en las que laboraban eran las de atención a problemas de la familia, discapacidad, salud, asistencia social y educación. En la Tabla 1 se muestran los años que tienen ejerciendo la profesión y las áreas en las que laboraban cuando fueron entrevistados (se han cambiado los nombres originales para mantener su anonimato).

3. RESULTADOS

3.1. Concepción de la estadística de los trabajadores sociales

Podemos definir a la estadística como: "una ciencia aplicada que crea, desarrolla y aplica técnicas y métodos para coleccionar datos y mediciones, los cuales luego transforma en información que permite, a partir de modelos –de probabilidad y estadística–, hacer inferencias que apoyan la explicación de algún fenómeno bajo estudio, o bien la toma de decisiones cuando haya algún riesgo inevitable" (CIMAT, 2013).

Tabla 1 Trabajadores sociales entrevistados

Nombre y años de experiencia laboral	Institución donde labora
1. Gerardo (4 años)	Centro de Atención a Niños con Discapacidad
2. Santiago (7 años)	Centro de Atención a Pensionados
3. Doris (3 años)	Bachillerato Tecnológico
4. Lorena (3 años)	Hospital Público Municipal
5. Azucena (18 años)	Oficinas Estatales del Sistema para el Desarrollo Integral de la Familia
6. Leticia (12 años)	Instituto de Seguridad Pública del Estado
7. Sofía (4 años)	Instituto de Salud del Estado: Coordinación de Trabajo Social
8. Xóchitl (25 años)	Instituto de Salud del Estado: Coordinación de Capacitación
9. Manuel (10 años)	Oficinas Municipales del Sistema para el Desarrollo Integral de la Familia
10. Octavio (25 años)	Centro de Salud Urbano

La visión que tienen de la estadística los trabajadores sociales entrevistados no está tan alejada de la definición anterior. Al preguntarles ¿para usted qué es la estadística?, las respuestas en todos los casos apuntaban hacia un uso particular. Se identificaron tres usos principales: *1)* hacer conteos (de personas atendidas, de personas con determinada problemática, etc.) y hacer mediciones (de situaciones, de problemáticas) (tres personas dieron este tipo de respuesta); *2)* organizar y sintetizar datos numéricos para describir una realidad, incluyendo el cálculo de porcentajes y la elaboración de gráficas (siete de los entrevistados), y *3)* apoyar la toma de decisiones (respuesta dada por las tres personas que tienen los puestos de mayor jerarquía).

3.2. Usos de la estadística en el campo del trabajo social

La mayoría de los entrevistados coinciden en los usos que hacen de la estadística en sus respectivos trabajos, aunque también hay una coincidencia en el hecho de que hacen un uso muy limitado. A grandes rasgos, los trabajadores sociales entrevistados realizan lo siguiente: a partir de un estudio socioeconómico, se conforman expedientes

Tabla 2 Usos de la estadística en el campo del trabajo social

Proceso de obtención de información	Tipo de datos más utilizados	Herramientas para el análisis	Productos
• Recabar datos sociodemográficos de diversas poblaciones. (8/10) • Hacer estudios socioeconómicos de las personas que atienden. (7/10) • Elaborar bases de datos en hojas de cálculo. (7/10) • Alimentar sistemas de información en línea. (5/10)	• Datos sociodemográficos. (9/10) • Indicadores del desarrollo de un programa de atención o de desarrollo social o comunitario. (7/10) • Indicadores para el seguimiento y evaluación institucional. (4/10) • Datos del estado de salud de los usuarios de hospitales y clínicas de salud. (3/10)	• Frecuencias, porcentajes y gráficas. (10/10) • Índices sociales y epidemiológicos. • Sistemas de información, con estadísticas básicas (municipales, estatales, nacionales). (7/10)	• Informes mensuales, semestrales y anuales. (9/10) • Reportes del seguimiento y evaluación de actividades institucionales. (4/10)

y se alimentan bases de datos, con los cuales es posible hacer un seguimiento de los usuarios y de los programas de apoyo (véase Tabla 2). A continuación se describe brevemente cada una de estas actividades.

El estudio socioeconómico

El primer paso para las personas que solicitan algún servicio consiste en dirigirse al área de trabajo social para presentar sus necesidades y ser canalizados a la instancia en donde puedan ser resueltas sus peticiones. Este diagnóstico inicial, conocido en el ámbito del trabajo social como el *estudio socioeconómico*, juega un papel fundamental para desarrollar el resto de actividades de este profesionista. Siete de los entrevistados señalan que, para ellos, la realización de estudios socioeconómicos es una actividad cotidiana, y los tres restantes también la reconocen como algo común en sus áreas de trabajo, aunque en ese momento no les correspondía a ellos su realización.

Seguimiento de usuarios

Para cada persona o usuario que se atiende en las instituciones donde trabajan los entrevistados, se genera un expediente, que puede ser en papel, en registros electrónicos (bases de datos o sistemas en línea), o en ambos. A partir de estos expedientes, se hace un seguimiento de la atención a los solicitantes y de la eventual resolución de su necesidad. El conjunto de expedientes, sobre todo cuando se concentran en bases electrónicas de datos, son un insumo que permite a los trabajadores sociales un análisis global de las problemáticas que atiende la institución y que son reflejo de necesidades de comunidades más amplias: colonias urbano-marginales, grupos vulnerables de la población, grupos de edad (por ejemplo, los ancianos), etc. La mitad de los entrevistados comentan que hacen análisis estadísticos descriptivos a partir de estas bases de datos, si bien son muy elementales: conteo de frecuencias, cálculo de porcentajes, elaboración de gráficas de barras y de sectores. La otra mitad es consciente del potencial de esta información para generar informes estadísticos que les ayudarían a comprender mejor las problemáticas que atienden, pero por su jerarquía laboral o por la forma como están organizadas las instituciones, no se les permite el acceso a las bases de datos que ellos mismos ayudaron a generar.

Seguimiento de programas

El seguimiento de programas específicos se hace por lo general a partir de las bases de datos. Hay varios tipos de programas: otorgamiento de apoyos a pensionados, atención de rehabilitación a niños discapacitados, cursos de capacitación en el área de salud, atención de usuarios en los centros de salud, otorgamiento de apoyos a personas en condición de pobreza, etc. Los análisis que se realizan son descriptivos (conteo de frecuencias, cálculo de porcentajes y elaboración de gráficas) y tienen por finalidad reportar a los jefes inmediatos, de manera semanal o mensual, las actividades realizadas, el número de usuarios atendidos, las problemáticas detectadas y atendidas, etc. Esta actividad tiene un potencial de análisis estadístico muy importante, pues el cúmulo de información con el que se cuenta pudiera dar pie a un análisis más completo y complejo. Los trabajadores sociales son conscientes de ello, pero sus condiciones laborales los limitan considerablemente. También son conscientes de lo limitado de sus conocimientos estadísticos. Tres de las trabajadoras sociales, que tienen cargos como jefas de departamento o coordinadoras de área, dan un uso directo a los reportes que se generan con esta actividad, para apoyar la toma de decisiones con respecto a la conducción de los programas. La participación del resto de los entrevistados en la toma de decisiones es limitada. Esta actividad está relacionada con la planeación y la evaluación de los programas. Considérese el siguiente ejemplo:

Entrevistador: *¿Para qué le ha servido la estadística en el ejercicio de su profesión?*
Lorena: *Para conocer más a fondo no solamente en la calidad sino en la cantidad, conocer realmente qué resultados nos ofrece el dar un buen servicio al paciente, el hacer las gestiones sociales de forma que el usuario o el paciente se vea satisfecho a través de la necesidad de la que llegan a este hospital, que en este caso es por algún motivo de salud que les afecta. Entonces, creo que nos muestra una realidad mejor el tener un número que a veces no es tan importante pero sí es básico para decir "estoy progresando, me estoy quedando, qué podemos hacer" y buscar nuevas alternativas para mejorar los servicios.*

Otros usos

Hay otros usos de la estadística y que competen sólo a algunos entrevistados o son actividades ocasionales, por ejemplo: el uso de información estadística para actividades de capacitación (como recurrir a los reportes del Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática, INEGI, o los estudios de la Secretaría de Salud, como las Encuestas Nacionales de Salud, y otros más); la participación en la realización de estudios de seguimiento de egresados de una escuela; el levantamiento y procesamiento elemental de estadísticas epidemiológicas, y la realización de proyectos de investigación. Otro ejemplo:

Entrevistador: *A lo largo de su trayectoria profesional, ¿para qué le ha servido la estadística?*
Manuel: *Para conocer, bueno, para lograr interpretar datos que nos proporcionan los movimientos sociales, por ejemplo, ahí en Calvillo hicimos una investigación de cuántas personas tienen enfermedades mentales y discapacidades; en Calvillo es un alto porcentaje, mucho, mucho, yo creo es el municipio que más discapacitados tiene y sobre todo mentales, entonces a la hora de sacar encuestas, sacar números, es donde nos sirve la estadística para conocer qué tanta población es la que está enferma, qué tanta población es la que no está enferma, cuánta población se está atendiendo y cuánta no, que eso no lo habían hecho en Calvillo.*

3.3. Análisis de las actividades del trabajador social que implican el manejo de datos numéricos

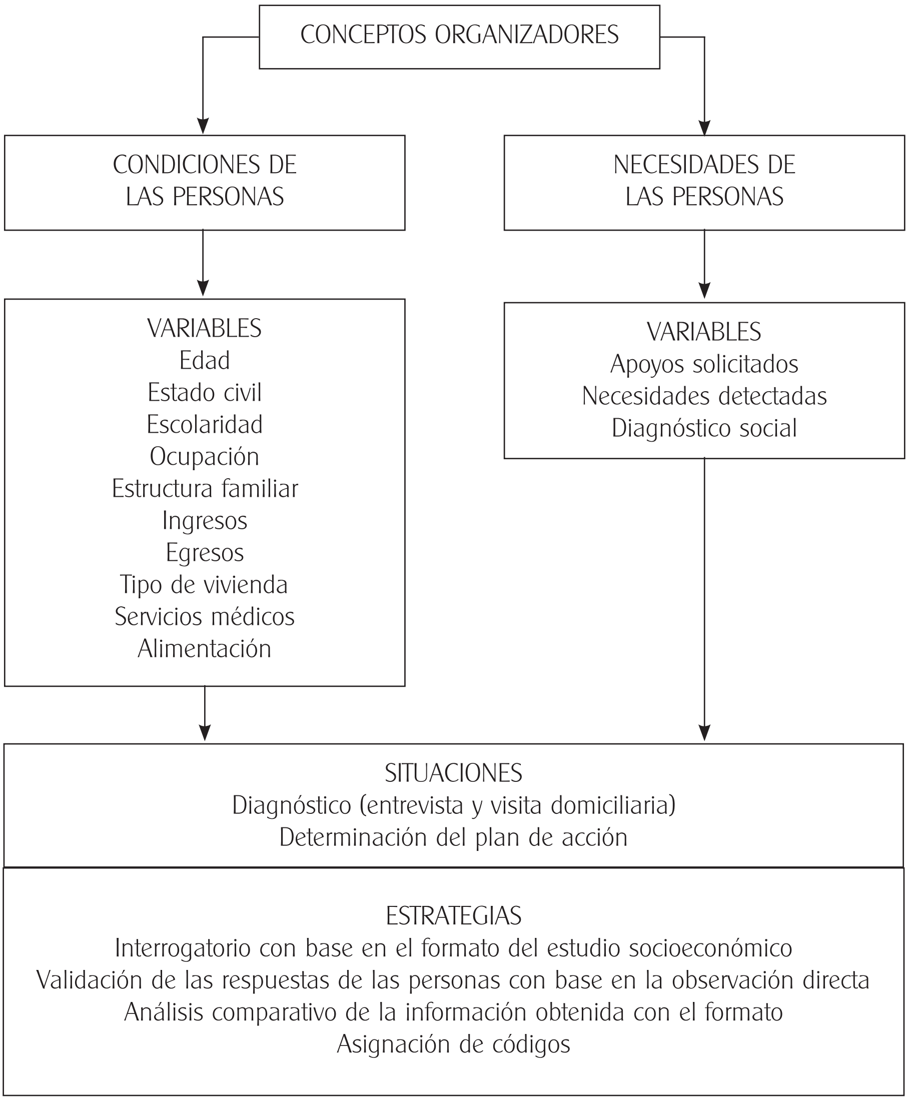
Visto superficialmente, la realización del estudio socioeconómico pareciera ser una tarea mecánica y rutinaria, consistente en la aplicación de un cuestionario y el respectivo procesamiento y análisis de la información obtenida. Sin embargo, un análisis cuidadoso de esta actividad nos muestra la presencia de conceptos y estrategias que vuelven esta actividad algo complejo. Lo peculiar de esta actividad es que la mayoría de los conceptos son implícitos y están anclados en las condiciones reales de la tarea, esto es, dependen de la situación. Utilizando la terminología de la didáctica de la formación profesional, diríamos que se trata de *conceptos pragmáticos*, ya que son nociones que se están configurando a partir de la acción y a la vez son organizadores de la acción, y no son arbitrarios, tienen una dimensión social reconocida por el uso casi uniforme en los entrevistados. Para dar cuenta de esto, se hizo un análisis de la *estructura conceptual de la situación*, que incluye los elementos señalados por Pastré, Mayen y Vergnaud (2006): los conceptos organizadores, los indicadores, las clases de situaciones y las estrategias esperadas (véase figura 1).

Se consideran dos conceptos organizadores: las *condiciones de las personas atendidas* y las *necesidades de las personas*. En cuanto a las *condiciones de las personas*, los indicadores que permiten dar cuenta de sus características se agrupan en siete variables: datos generales (edad, estado civil, escolaridad, ocupación), estructura familiar, ingresos, egresos, tipo de vivienda, servicios médicos y alimentación (nótese que el nivel de medición de estas variables es nominal y ordinal, aunque algunas, como los ingresos, pueden trabajarse como de intervalo).

Las *necesidades de las personas* es un concepto que se construye a partir de dos variables: lo que la persona solicita (lo que él considera que es su necesidad, o lo que manifiesta como tal, aunque no sea cierto o sea sólo una parte del problema real) y lo que el trabajador social detecta (mediante la observación directa de las personas y con un interrogatorio complementario al formato del estudio socioeconómico y que su naturaleza y extensión dependen de la experiencia y habilidad del trabajador social). De la confrontación de los indicadores recabados para cada una de estas variables, se realiza una síntesis (que podemos considerar una tercera variable), denominada el *diagnóstico social*.

Estos dos conceptos organizadores no están definidos como tales en ningún manual de operación que oriente el quehacer de los trabajadores sociales. Una primera definición tácita de los conceptos la encontramos en los indicadores que incluye el formato que sirve para conducir el estudio socioeconómico (véase Anexo II). Veamos cómo funcionan estos conceptos en la práctica. De inicio, no debemos olvidar que este trabajo se realiza en el marco de dos situaciones complementarias: la *realización de un diagnóstico* y la *determinación de un plan de acción*. La orientación del diagnóstico puede variar según el tipo de servicio que se vaya a ofrecer, esto es, un trabajador social que tiene la

Figura 1 Estructura conceptual del estudio socioeconómico en el campo del trabajo social



tarea de dar apoyos a pensionados dirige el diagnóstico de manera diferente a quien tiene que determinar un apoyo a madres solteras adolescentes; en este caso, el plan de acción esperado determina en parte el diagnóstico pero, a su vez, el diagnóstico ayuda a determinar el tipo de apoyo. Es muy importante no perder de vista en cuál de estas dos situaciones está pensando un trabajador social al momento de hacer su estudio socioeconómico, así como el contexto institucional en que se desenvuelve.

Con respecto a las *estrategias*, se identificaron cuatro conjuntos de operaciones: el interrogatorio que se realiza con base en el formato del estudio socioeconómico; la validación de las respuestas de las personas con base en la observación directa; el análisis comparativo de la información obtenida con el formato, y la asignación de códigos. Se explica a continuación cada grupo de estrategias.

Interrogatorio con base en el formato del estudio socioeconómico. Los formatos para el interrogatorio se conforman de preguntas que hacen referencia a hechos concretos y que, en su mayoría, tienen predeterminadas las opciones de respuesta; sin embargo, algunas preguntas requieren de una valoración de parte del trabajador social, en especial las preguntas de respuesta abierta.

Validación de las respuestas de las personas con base en la observación directa. Un aspecto en el que los trabajadores sociales ponen mucha atención, es la observación de la persona que entrevistan: apariencia general, vestimenta, accesorios, lenguaje, etc. Esta observación tiene por objetivo reconocer algunos rasgos que den cuenta de su condición económica y social y, así, detectar posibles engaños por parte de los entrevistados.

Análisis comparativo de la información obtenida con el formato. Esta estrategia consiste en visualizar en conjunto los valores de todas las variables en juego, o por lo menos de aquellas consideradas más relevantes a juicio de cada profesionista. Este análisis implica el reconocimiento de un nivel de medición ordinal de las variables, pues consiste en comparar al menos dos valores posibles: uno alto y uno bajo (véase tabla 3).

A partir de estos valores (que por lo general no se hacen explícitos), los trabajadores sociales deben hacer una valoración de las personas. Esta valoración puede hacerse a

Tabla 3 Ejemplo de los valores que pueden asumir las variables del estudio socioeconómico

Variables	Indicadores y sus valores
Ingresos	Altos, medios, bajos
Trabajo	Estabilidad laboral alta, media o baja
Familia	2, 3, 4, ‘n’ miembros (se puede dicotomizar como: mayor o menor número de miembros)
Enfermedad	• Magnitud de la enfermedad: alta, media, baja • Miembros de la familia enfermos: 1, 2, 3, ‘n’

partir de una variable, como por ejemplo los ingresos, pero como este valor puede ser muy poco confiable, por lo general recurren al mayor número de factores que puedan resultar de interés para cada caso. Considérese el siguiente ejemplo:

Entrevistador: *¿Tienen algún procedimiento establecido para hacer la integración de toda la información que recaban con el estudio socioeconómico?*

Manuel: *Tenemos varios parámetros, ya es a criterio de cada quien, ¿verdad?, pero uno de los criterios base que tenemos todos es el salario mínimo. Si la persona gana menos de dos salarios mínimos, se le otorga el apoyo, que es más o menos, ¿qué será?, unos $400, $500, $600 a la semana y se le da total. Si es un poquito más arriba, se valora la situación en la que están, por ejemplo, cuántos trabajan, puede que esté ganando bien, pero son muchos de familia, hay familias que son hasta 11 y entonces es una sola persona para todos ellos, está ganando bien pero no alcanza a mantener todas las necesidades de la familia, o sea, son varias características las que se evalúan. Si es una familia que gana bien y nada más son la esposa y dos o tres hijos, no se le otorga el apoyo porque tienen un poder adquisitivo alto, ¿no? Entonces, básicamente se valora el ingreso y el número de personas que vivan y, bueno, los que trabajan.*

En la tabla 4 se muestra una representación del proceso que se infiere de las explicaciones dadas por los trabajadores sociales entrevistados.

Asignación de códigos. Posterior al análisis comparativo, los trabajadores sociales por lo general tienen que asignar un código a cada persona o usuario, que consiste en clasificar a los usuarios en una categoría de una escala que por lo general tiene tres o cuatro valores, como por ejemplo: A (alto), B (medio), C (bajo), D (muy bajo). Una persona clasificada con código D puede obtener más apoyos y la cuota más baja en el pago de un servicio. Una variable clave para la asignación de códigos es el nivel de ingreso, aunque, como ya se mencionó, es importante hacer una consideración del resto de las variables, e incluso tomar en cuenta una triangulación con los datos cualitativos que los trabajadores sociales obtienen mediante la observación directa y las visitas domiciliarias. En algunas instituciones, la asignación de códigos se realiza automáticamente por el sistema informático en donde se capturan los datos del estudio socioeconómico.

Tenemos, pues, que los conceptos organizadores dan la pauta para la realización del estudio socioeconómico, y que las situaciones y la información recabada, a su vez, dan cuerpo a éstos mediante una dialéctica que puede extenderse más allá del diagnóstico y continuarse en el seguimiento de las personas. El análisis de los conceptos organizadores es fundamental para entender los substratos conceptuales y operativos de las nociones estadísticas de los trabajadores sociales que determinan su actuar subsecuen-

Tabla 4 Ejemplos de análisis comparativo de variables

Ejemplo de una condición favorable		
Variables	Valores	Valoración
Ingresos	Mayores ingresos	Persona con condiciones personales y económicas favorables
Trabajo	Mayor estabilidad laboral	
Familia	Menor número de miembros	
Enfermedad	Enfermedad de pronóstico favorable	

Ejemplo de una condición desfavorable		
Variables	Valores	Valoración
Ingresos	Menores ingresos	Persona con condiciones personales y económicas muy desfavorables
Trabajo	Menor estabilidad laboral	
Familia	Mayor número de miembros	
Enfermedad	Enfermedad crónica avanzada	

te en el análisis de datos. Ahora podemos pasar al análisis de las otras actividades del trabajador social que se relacionan con el trabajo estadístico.

3.4. Más allá de los individuos: el análisis potencial de conjuntos de datos estadísticos

Al concluir el estudio socioeconómico de una persona, el trabajador social tiene suficiente información para gestionar los apoyos que las personas requieren y puede hacer un seguimiento del caso: ¿se atendieron sus necesidades?, ¿el paciente del hospital ha continuado con su tratamiento?, ¿acudió al lugar a donde fue canalizado?, etc. Sin embargo, con la información de una sola persona no es mucho lo que puede hacer en cuanto a análisis estadísticos. Pero cuando en una base de datos se concentra la información de 30, 60 o 300 casos, ya es posible hacer análisis estadísticos de diferente naturaleza y alcance, como por ejemplo, análisis descriptivos del conjunto de variables medidas, análisis de asociación de dos o más variables, de diferencias entre grupos, multivariados, factoriales y los que la naturaleza de los datos permitan.

Desafortunadamente, la gran cantidad de actividades que tienen que desarrollar los trabajadores sociales ya no les permiten continuar con una tarea analítica más profunda. Aun cuando todos reconocen sus deficientes y limitados conocimientos estadísticos, también son conscientes del potencial de los datos. Veamos dos ejemplos:

Entrevistador: *Hacen el seguimiento individual y luego, para hacer estos reportes para tener un panorama global, sacan las gráficas con porcentajes.*
Santiago: *Con porcentajes.*
Entrevistador: *Básicamente son con porcentajes.*
Santiago: *Son con porcentajes, al principio yo le di una interpretación más basándome, por ejemplo, en cuestiones teóricas, o sea, viendo que si tienen tal enfermedad puede pasar esto, que si la alimentación, o sea, tratábamos, trataba yo de jugar un tipo de relaciones, un análisis un poquillo más profundo y lo hacíamos, pero ahora mismo mi jefa dice: "mira, ni lo hacemos, no lo van a leer siquiera".*

En el ejemplo anterior, se aprecia que Santiago no hace mención a un procedimiento o modelo estadístico particular, y seguramente no lo posee, pero su interés de "jugar un tipo de relaciones" refleja intuiciones importantes que, con una buena asesoría estadística, pudieran fructificar en análisis más completos. Encontramos algo parecido en el ejemplo siguiente:

Entrevistador: *Si hubiera más personal que le apoyara, ¿usted considera que pudiera ser conveniente que alguien estuviera capturando en una base de datos parte de esa información?*
Sofía: *Estaría muy bien hacerlo, como le decía, se estaría sacando qué tipo de problema, qué colonia, entre qué edades, el diagnóstico, qué tipo de vivienda, qué tipo de familia, si es nuclear, extensa o es funcional, disfuncional, todo eso, todo eso sí se podría sacar, sí, ojalá y sí nos llegara personal para sacar todo eso y para reflejarlo, porque esto es parte del trabajo de nosotros y se está quedando guardado, y entonces sería muy importante sacar y señalar lo mismo, las colonias o en qué lugares o en qué municipios del estado se está presentando más el problema de insuficiencia renal, en cuáles de cáncer de mama, el cáncer cérvico-uterino, sacarlo también se podría sacar porque tenemos la información, sí, entonces por eso le digo, sería muy rico y muy bueno hacer esto.*

Hay que resaltar el hecho de que los trabajadores sociales tienen que hacer diversos reportes con base en toda esa información recabada y que, además, tienen que considerarla para hacer una constante toma de decisiones. El proceso de obtención de información configura un tipo de comprensión de la situación que no se agota con la apertura del expediente de un usuario o un paciente, y que, como vimos, da pie para que los trabajadores sociales desarrollen un tipo de comprensión estadística que pudiera explotarse si tuvieran las condiciones laborales propicias para desempeñarse como auténticos investigadores sociales. Desafortunadamente, como señala Farías (2012, p. 59), en Latinoamérica se ha tipificado y limitado al trabajo social como una *tecnología social*, siendo que como *disciplina social* le corresponde sobre todo *comprender* y transformar la realidad social.

4. CONCLUSIONES

Ante la pregunta guía de este trabajo, *¿cuál es el papel que en realidad ocupa la generación y manejo de datos estadísticos en el campo laboral del trabajo social?*, ya vimos que en todas las instituciones en que laboran los profesionistas entrevistados, es fundamental la obtención y sistematización de información de las personas o usuarios que se atienden, tanto para su registro como para su seguimiento y, a mediano y largo plazo, para analizar la situación de conjuntos más o menos grandes de los grupos sociales atendidos. Sin embargo, es poco y marginal el trabajo analítico realizado por los trabajadores sociales debido, en gran parte, a que otras funciones de atención y seguimiento de las necesidades de los usuarios no les dan tiempo para un análisis estadístico detallado (esto tiene que ver con la definición de las funciones de estos profesionistas en los organigramas institucionales, las que, en algunos casos, corresponden al perfil de un trabajador social con estudios de nivel técnico).

Por lo anterior, no es raro que al hacerles la pregunta que incluía la entrevista, ¿En qué momento y cómo utiliza la *estadística en su trabajo?*, la mayoría declaró en un primer momento que no la utilizaban o lo hacían muy esporádicamente. Sin embargo, al ahondar sobre su quehacer, salían a flote todas las actividades ya mencionadas en el apartado de resultados y que implican el reconocimiento de variables y sus niveles de medición, los procesos de medición y concentración de información, las diferentes formas de comparación e interpretación, etc., aunque esto en su práctica se presenta de una manera tácita, casi invisible en algunos casos.

Las actividades de naturaleza estadística detectadas en el trabajo cotidiano de los trabajadores sociales entrevistados se orientan a la resolución de situaciones laborales muy puntuales: *a)* recabar información cuantitativa y cualitativa de las personas que atienden para identificar sus necesidades, posibilidades y carencias, y asignar un código que resume su estatus como usuario a partir del cual se le otorgan los diferentes apoyos; *b)* alimentar bases de datos que, en potencia, se pueden explotar ampliamente de modo estadístico, mediante análisis comparativos más complejos (y que, como ya se señaló, lamentablemente la mayoría de los trabajadores sociales no pueden trabajar), y *c)* hacer informes descriptivos de la situación que guardan los proyectos y las áreas de atención (esto incluye pequeñas investigaciones, en las que por lo general se limitan a la presentación de frecuencias absolutas y relativas, mediante tablas o gráficas).

En cuanto a la forma en que los trabajadores sociales enfrentan estas tareas, y los recursos cognitivos y técnicos en que se apoyan, ¿por qué consideramos que las variables incluidas en estos análisis, y que se desprenden del estudio socioeconómico, son conceptos pragmáticos? Un análisis estadístico descriptivo convencional, como el que habitualmente se enseña en las universidades, se enfoca en el cálculo de medidas de resumen –frecuencias, tendencia central, variación, correlación, etc.– a partir de datos de los que no se sabe en qué circunstancias ni con qué instrumentos se obtuvieron, y con frecuencia referidos a situaciones ajenas a las del campo de acción de los futuros profesionistas (Eudave, 2007). Pero en el caso de los trabajadores sociales, como ya se explicó, en su entorno laboral parten de la valoración de las características de personas concretas y con un fin pragmático: conocer sus necesidades y sus posibilidades, para determinar los apoyos que ameritan. Este enfoque utilitario se hace extensivo al análisis de poblaciones, pero no con la lógica del análisis estadístico que usualmente se sigue en la universidad, tendiente al análisis de conjuntos de datos a partir de modelos estadísticos y probabilísticos, sino con la meta de hacer un recuento de las necesidades más frecuentes o apremiantes de los grupos humanos, con el fin de buscar alternativas para su solución. Por lo tanto, y siguiendo a Pastré, Mayen y Vergnaud (2006), estamos ante conceptos que se construyen en la acción, los que a su vez ayudan a organizar la acción misma, y que tienen un carácter social, expresado en el hecho de que todos los trabajadores sociales entrevistados comparten la misma visión sobre su importancia, los procedimientos a seguir y los instrumentos utilizados (fueron mínimas las variantes encontradas entre los diferentes formatos de los estudios socioeconómicos).

Sin embargo, tenemos que reconocer que la riqueza del análisis estadístico de los trabajadores sociales es más potencial que real, a causa de sus condiciones laborales que limitan sus posibilidades de explotación de la información, lo mismo que las oportunidades de una formación continua. No obstante lo anterior, es conveniente ofrecer alternativas de actualización en estadística a los trabajadores sociales, lo que les ayudará sin duda a tener un mejor desempeño en las actividades que requieren de la obtención y manejo de datos estadísticos.

En cuanto a la formación universitaria, es necesario vincular la enseñanza de la estadística con los contextos profesionales, pero no como retórica o como la inclusión de ejemplos superficiales que sólo encubren explicaciones rutinarias y la realización de mecanizaciones sin sentido práctico. Resulta muy significativo que los modelos educativos, como el de los Ambientes de Aprendizaje de Razonamiento Estadístico (*Statistical Reasoning Learning Environment*, presentado por Garfield y Ben-Zvi, 2009), tengan muchas coincidencias con las propuestas de formación alternativa en estadística para los trabajadores sociales (Calderwood, 2002; Thomas, 2007 y 2008; Wade y Goodfellow, 2009). En estas propuestas hay varias coincidencias; resalto algunas: centrarse en el desarrollo de ideas estadísticas globales más que en definiciones y procedimientos; el uso de datos reales; la discusión grupal, como mecanismo de construcción y validación social.

Es posible diseñar propuestas didácticas que recuperen el sentido de la estadística para cada profesión reconstruyendo las situaciones que el profesionista habrá de enfrentar, considerando las estructuras conceptuales que les sirven de guía. Como señala Pastré:

> En didactique professionnelle, l'analyse de travail répond à un double objectif: construire des contenus de formation correspondant à la situation professionnelle de référence; mais aussi utiliser les situations de travail comme des supports pour la formation des compétences. (2002, p. 10)
>
> [En la didáctica de la formación profesional, el análisis del trabajo responde a un doble objetivo: construir los contenidos de formación correspondientes a la situación profesional de referencia, pero también utilizar las situaciones de trabajo como los soportes para la formación de competencias.] (La traducción es mía)

Finalizo con una reflexión de Calderwood (2002): es esperable que una mayor comprensión estadística y un manejo más amplio y eficiente de la misma, propicie un empoderamiento de los trabajadores sociales, de tal suerte que les permita asumir un rol más activo y de mayor jerarquía en el análisis de las situaciones en las que interviene y en la toma de decisiones. Sin embargo, corresponde a las y los trabajadoras sociales aceptar el reto.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación se realizó con el subsidio del Programa de Investigaciones Educativas de la Universidad Autónoma de Aguascalientes. Agradezco de manera especial el apoyo otorgado por la Mtra. Teresa Ortiz, quien en el momento de la realización del estudio era la jefa del Departamento de Trabajo Social de la Universidad Autónoma de Aguascalientes, así como a las y los trabajadores sociales que colaboraron en las entrevistas.

ANEXO I

Guía de entrevista a trabajadores sociales

1. FORMACIÓN
    - 1.1. Nombre del (de la) profesionista.
    - 1.2. Nombre y nivel de la carrera estudiada.
    - 1.3. Institución donde estudió su carrera.
    - 1.4. Fecha en que terminó sus estudios.
    - 1.5. Estudios de posgrado realizados:

- Nombre del posgrado.
- Institución donde los realizó o realiza.
- Fecha de realización de los estudios.

1.6. Estudios de actualización o capacitación relacionados con la *Metodología del Trabajo Social*, *Metodología de la Investigación* o *Estadística*:

2. INFORMACIÓN LABORAL

2.1. Lugar donde trabaja.
2.2. Cargo o puesto que ocupa.
2.3. Antigüedad en el cargo actual.
2.4. Trabajos realizados desde que terminó su carrera y hasta la fecha (en orden cronológico).

3. OPINIONES SOBRE LA ESTADÍSTICA

3.1. ¿Para usted, qué es la estadística?
3.2. ¿Para usted, qué es la probabilidad?
3.3. ¿Cuántos cursos de estadística llevó durante los estudios de su carrera?
3.4. ¿Tuvo alguna dificultad con su(s) curso(s) de estadística?
3.5. ¿Para qué le ha servido la estadística en el ejercicio de su profesión?
3.6. ¿Cómo y en qué utiliza la estadística en el ejercicio de su profesión?
3.7. ¿En qué momento y cómo utiliza la estadística en su trabajo?
3.8. ¿Qué instrumentos o formatos utiliza habitualmente para recabar y procesar datos estadísticos?
3.9. ¿Qué instrumentos o herramientas utiliza habitualmente para el análisis de datos?

4. LA ESTADÍSTICA EN SU TRABAJO ACTUAL

4.1. Principales actividades que realiza en su trabajo actual.
4.2. De las actividades que realiza en su trabajo, describa con detalle las que estén relacionadas con las situaciones de *diseño de proyectos, medición y obtención de datos, procesamiento y análisis, elaboración de informes*.

4.2.1. Solicitar que describa, para cada actividad:

- Para qué realiza esa actividad.
- Cómo lo hace (procedimientos, estrategias).
- Con qué lo hace (tipo de registros, instrumentos, herramientas)
- Cada cuánto lo hace.
- En qué condiciones lo hace.

4.2.2. Solicitar que muestre:

- Herramientas de trabajo: formatos, registros, bases de datos, software, etc.
- Productos de su trabajo: informes, reportes, concentrados, etc.
- Procedimientos (ya sean personales o estandarizados).

¡ATENCIÓN!: Si es necesario, hay que fotografiar evidencias, solicitar copias y no olvidar pedir autorización para tomar las fotografías y para fotocopiar formatos, registros, reportes, etc.

4.2.3. Intervenir al final de su descripción o durante la misma con:

- Preguntas para clarificar algún aspecto.
- Preguntas para indagar sus comprensiones sobre los conceptos estadísticos y metodológicos involucrados.
- Presentar posibles variaciones en su trabajo o situaciones hipotéticas, para indagar también sus comprensiones sobre los conceptos estadísticos y metodológicos involucrados.

5. COMENTARIOS FINALES

Solicitar al o a la trabajadora social información adicional que quiera proporcionar.

ANEXO II

Estudio socioeconómico

Formato Tipo

I. DATOS GENERALES

No. EXP.: ____

EDAD: ____________________ PROCEDENCIA: ____________________

DOMICILIO: ____________________ COLONIA: ____________________

OCUPACIÓN: ____________________ EDO. CIVIL: ____________________

ESCOLARIDAD: ____________________ TELÉFONO: ____________________

FECHA: ____________________

II. APOYO QUE SOLICITA:

III. NÚCLEO FAMILIAR

NOMBRE	EDAD	ESTADO CIVIL	PARENTESCO	OCUPACIÓN	ESCOLARIDAD

IV. TIPO DE VIVIENDA

TENENCIA:
Propia ( ) Rentada ( ) Prestada ( ) A crédito ( ) Compartida ( )

ESTÁ CONFORMADA POR:
Cuartos ( ) Baños ( ) Cocina ( ) Cochera ( )

LA CONSTRUCCIÓN ES:

PARTES	TIERRA	CEMENTO	MOSAICO	LÁMINAS	ADOBE	LADRILLO	OTROS
PISO							
TECHO							
PAREDES							

SERVICIOS:
Agua ( ) Electricidad ( ) Drenaje ( ) Gas ( )

EQUIPAMIENTO:
Estufa ( ) Refrigerador ( ) Lavadora ( ) Televisión ( ) Otros ( )

Vehículos: Sí No Marca________________________________ Modelo ________

V. SERVICIOS MÉDICOS

IMSS ( ) ISSSTE ( ) Centro de salud ( ) Otros ( )

VI. ALIMENTACIÓN BÁSICA DE LA FAMILIA

Balanceada ( ) Regular ( ) Deficiente ( )

VII. ECONOMÍA FAMILIAR

	INGRESO MENSUAL	
	Fijo	Eventual
PADRE	$	$
MADRE	$	$
HIJOS	$	$
OTROS	$	$
TOTAL	$	$

EGRESO MENSUAL	
Gasto casa	$
Renta	$
Educación	$
Alimentación	$
Vestido	$
Transporte	$
Servicios	$
Total	$

VIII. PROBLEMÁTICA SOCIAL
Adicciones ( ) Violencia ( ) Abandono ( ) Otro ________________________

IX. OBSERVACIONES

X. DIAGNÓSTICO SOCIAL

XI. PLAN DE ACCIÓN Y SUGERENCIAS

ELABORÓ: TS

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ander-Egg, E. (1996), *Introducción al trabajo social*, Madrid, Siglo Veintiuno Editores, 2ª edición.

Calderwood, K. A. (2002), "Incorporating multiple epistemologies into teaching statistics to social work students", *Journal of Teaching in Social Work*, vol. 22, pp. 17-32.

CIMAT (2013), "Qué es estadística", en la página oficial del Año Internacional de la Estadística, del Centro de Investigación en Matemáticas y la Universidad de Guanajuato: http://www.estadistica2013cimat.mx/que-es [Consulta realizada el 16 de septiembre de 2013].

ENTS-UNAM (2013), "¿Qué es el trabajo social?", en la página oficial de la Escuela Nacional de Trabajo Social de la UNAM: http://www.trabajosocial.unam.mx/queestsocial.html [Consulta realizada el 16 de septiembre de 2013].

Eudave-Muñoz, D. (2007), "El aprendizaje de la estadística en estudiantes universitarios de profesiones no matemáticas", *Educación Matemática*, vol. 19, núm. 2, pp. 41-66.

Farías, F. (2012), "El trabajo social y los campos disciplinarios de las ciencias sociales en Chile", *Cinta de Moebio*, No. 43, pp. 50-60 [www.moebio.uchile.cl/43/farias.html]

Garfield, J. y D. Ben-Zvi (2009), "Helping students develop statistical reasoning: Implementing a statistical reasoning learning environment", *Teaching Statistics*, vol. 31, pp. 72-77.

Harraway, J. A. y R. J. Barker (2005), "Statistics in the workplace: A survey of use by recent graduates with higher degrees", *Statistics Education Research Journal*, vol. 4, núm. 2, pp. 43-58. [http://www.stat.auckland.ac.nz/serj]

IFSW (2012), "Definition of social work", en la página oficial de la International Federation of Social Workers: http://ifsw.org/policies/definition-of-social-work/ [Consulta realizada el 16 de septiembre de 2013].

Pastré, P. (2002), "L'analyse du travail en didactique professionnelle", *Revue Française de Pédagogie*, núm. 138, pp. 9-17.

Pastré, P., P. Mayen y G. Vergnaud (2006), "La didactique professionnelle", *Revue Française de Pédagogie*, núm. 154, pp. 145-198.

Taylor, F. (1990), "The numerate social worker", *Journal of Social Work Education*, vol. 26, núm. 1, pp. 25-35.

Thomas, L. (2007), "Understanding statistics and research through metaphors: Evidence from cognitive science", *Journal of Social Service Research*, vol. 34, núm. 2, pp. 1-14. [http://jssr.haworthpress.com]

Thomas, L. (2008), "Analogical instruction in statistics: Implication for social work educators", *Journal of Teaching in Social Work*, vol. 28, núm. 1, pp. 247-271. [http://jtsw.haworthpress.com]

Vidal-Gomel, C. y J. Rogalski (2007), "La conceptualisation et la place des concepts pragmatiques dans l'activité professionnelle et le développement des compétences", *@ctivités*, vol. 4, núm. 1, pp. 49-84. [http://www.activites.org/v4n1/v4n1.pdf]

Wade, B. y M. Goodfellow (2009), "Confronting statistical literacy in the undergraduate social science curriculum", *Sociological Viewpoints*, vol. 25, pp. 75-90.

DATOS DEL AUTOR

Daniel Eudave Muñoz
Universidad Autónoma de Aguascalientes, México
deudave@correo.uaa.mx

La modelización matemática en la formación de ingenieros

Avenilde Romo-Vázquez

Resumen: En esta contribución se presentan elementos de un proyecto de investigación que se desarrolla actualmente y cuyo objetivo es el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática para la formación de ingenieros. En una primera parte se analiza el lugar histórico de las matemáticas en estas formaciones y cómo la modelización ha ido ocupando un espacio cada vez más importante. En una segunda parte se analiza el uso de modelos matemáticos en contextos de ingeniería para reconocer las necesidades matemáticas que surgen en dicho uso. Posteriormente, se presentan elementos teóricos y metodológicos basados en la Teoría Antropológica de lo Didáctico para el diseño de actividades didácticas propias para los futuros ingenieros. Dos ejemplos de contextos de ingeniería, en los cuales se analiza la utilización de modelos matemáticos, permiten ilustrar las potencialidades y límites de estos elementos teóricos y metodológicos. Por último, se hace una reflexión sobre esta propuesta teórico-metodológica.

Palabras clave: modelización matemática, formación de ingenieros, actividades didácticas.

Résumé: Dans cette contribution, des éléments d'un projet de recherche en cours sont présentés. L'objectif du projet est de concevoir des activités didactiques basées sur la modélisation mathématique pour la formation des ingénieurs. La première partie analyse la place historique occupée par les mathématiques dans les formations d'ingénieurs. La deuxième partie présente l'utilisation des modèles mathématiques dans des contextes d'ingénierie avec l'objectif de déterminer les besoins mathématiques de leur usage. Ensuite, sont présentés des éléments théoriques et méthodologiques basés sur la Théorie Anthropologique du Didactique dans l'intention de concevoir des activités didactiques pour la formation des futurs ingénieurs. Deux exemples de contextes d'ingénierie où l'utilisation des modèles mathématiques a été analysée permettent d'illustrer certaines potentialités et limites de cette proposition théorique-méthodologique, sur laquelle on revient en conclusion.

Mots clés: modélisation mathématique, formation des futurs ingénieurs, activités didactiques.

Fecha de recepción: 27 de agosto de 2013; fecha de aceptación: 21 de enero de 2014.

1. MATEMÁTICAS PARA INGENIEROS: TEORÍA VS. APLICACIONES

Desde los inicios de las formaciones de ingenieros hasta la actualidad, las matemáticas han tenido un lugar muy importante. Sin embargo, tanto el lugar dado como los roles de su enseñanza se han ido modificado a medida que la formación y la práctica ingenieril evolucionan. Con el objetivo de reconocer cómo esta evolución ha tenido lugar y, más en particular, cómo la modelización se ha consolidado como la herramienta matemática más importante de estas formaciones, se analizan los primeros modelos de formación de *l'École Polytechnique*, la conferencia de Maurice d'Ocagne dictada en 1914, los estudios ICMI 3 e ICMI 11 –publicados en 1988 y 2002, respectivamente–, así como los trabajos de Kent y Noss (2002) y Bissell y Dillon (2000).

Los primeros modelos de formación, el caso de la escuela politécnica francesa

El análisis de los primeros modelos de formación de la Escuela Politécnica se basa en la obra de Belhoste, Dahan-Dalmedico y Picon (1994), dedicada a relatar la historia de esta escuela de 1794 a 1994. La elección de la Escuela Politécnica se debe a que es una de las primeras escuelas formadoras de ingenieros (fundada en 1794). Esta institución constituye un caso muy particular entre las instituciones formadoras de ingenieros: nace en medio de la revolución, hereda los ideales enciclopedistas del siglo de las luces y sus inicios están marcados por el auge de la ciencia francesa de la época. A pesar de la particularidad de esta institución, el análisis de los tres primeros modelos (un análisis más detallado aparece en Romo-Vázquez, 2009), constituidos durante el periodo de 1794 a 1850, permite conocer los roles dados a las matemáticas y las razones subyacentes a esos roles.

El primer modelo de formación, propuesto por el geómetra Gaspar Monge en 1794, se conoce como modelo "enciclopédico", ya que refleja el ideal enciclopedista de una posible alianza entre las ciencias y las artes (entendiendo las artes como las aplicaciones). Este modelo fue rápidamente reemplazado por el modelo de Laplace, conocido como el modelo "analítico", propuesto en 1795 y en el cual las matemáticas forman un corpus autónomo, proveedor de conocimientos generales, los cuales son posteriormente utilizados en los cursos de aplicación. Lo anterior puede deberse al gran desarrollo del análisis matemático y a la utilización de métodos analíticos en disciplinas como la mecánica, la física, la teoría de máquinas, la geodésica y las probabilidades. Puede suponerse que para Laplace la enseñanza del análisis matemático dotaba a los estudiantes de una base sólida necesaria para la comprensión/aprendizaje de dichas disciplinas. Un elemento que va a afectar la permanencia de este modelo es el curso de análisis propuesto por Cauchy, el cual se caracterizaba por exigir un rigor propio de la disciplina matemática; sin embargo, era tan abstracto que difícilmente podía utilizarse en aplicaciones y en necesidades prácticas. Esto fue denunciado por las escuelas de aplicación, creadas en 1795 y en las cuales eran dictados los cursos de aplicación, como se muestra en la siguiente cita:

> [...] la Escuela Politécnica tiende a perder de vista la utilidad de su enseñanza. Las matemáticas corren peligro de volverse el latín de los ingenieros, medio de selección escolar y de distinción social que uno se apresura a olvidar tan pronto como el examen de salida ha pasado. (Belhoste et ál., 1994, p. 24)[1]

Por otra parte, en el contexto internacional se vive la revolución técnica e industrial, y los industriales demandan profesionales capaces de enfrentar las nuevas necesidades de las industrias. Para satisfacer tales demandas, en 1829 se crea una escuela privada: la Escuela Central de Artes y Manufacturas, en la cual se enseñará "la ciencia industrial". El análisis no se enseña, y la geometría descriptiva, la mecánica y la física son enseñadas desde una perspectiva basada en las aplicaciones. La enseñanza de la "ciencia industrial" parece ser la precursora de lo que ahora se conoce como enseñanza tecnológica y también parece ser la encargada de equilibrar las tensiones entre la abstracción pura y las aplicaciones sin referencia teórica. A pesar de que la Escuela Politécnica sufre cambios internamente —comienza a ser dirigida por académicos en lugar de militares—, no se efectúa ninguna reforma sino hasta que recibe un ataque por parte de ingenieros civiles, hecho que tuvo resonancia en la Asamblea Nacional y en el gobierno. Le Verrier es designado para constituir un nuevo modelo de formación, el cual va a caracterizarse por basar la elección de contenidos en la utilidad de las aplicaciones y descartar el desarrollo de teoría. Las matemáticas teóricas son desplazadas, del lugar privilegiado que mantenían, por las aplicaciones que son consideradas como las más importantes.

La exposición breve de estos primeros tres modelos de formación permite dar cuenta de las tensiones entre teoría y práctica, de la gran dificultad y complejidad de conciliarlas al interior de un modelo de formación. Asimismo, puede percibirse la influencia de los cambios científicos, tecnológicos y sociales, los cuales se cristalizan en la creación de escuelas de aplicación, la implementación de cursos de la "ciencia industrial" y en la modificación del modelo educativo. Siguiendo con el análisis histórico, consideremos ahora la conferencia impartida por Maurice d'Ocagne en el Congreso Internacional de Enseñanza de las Matemáticas que tuvo lugar en París en 1914.

Matemáticas y ciencias del ingeniero

Maurice d'Ocagne era ingeniero en jefe de Puentes y Caminos (*Ponts et Chaussées*) y profesor de la Escuela Politécnica y de la Escuela de Puentes y Caminos (*Ecole de Ponts*

[1] Las citas han sido traducidas del francés y del inglés al español por la autora del artículo.

et Chaussés). En su conferencia titulada "El rol de las matemáticas en las ciencias del ingeniero", d'Ocagne defiende la necesidad de una formación matemática teórica para los ingenieros, y para ilustrarla presenta diferentes problemas donde la "teoría matemática" fue útil para resolverlos. A manera de ejemplo, se presentan a continuación dos de estos problemas:

- El efecto Kelvin (*skineffect)* en los conductores masivos en corrientes alternativas, donde subraya "**el interés práctico**" de este estudio realizado mediante el uso de ecuaciones con derivadas parciales.
- La propagación de las ondas líquidas en los tubos elásticos, problema resuelto por Boulanger a partir del "estudio de una integral discontinua de una ecuación con derivadas parciales de segundo orden, de tipo hiperbólica".

D'Ocagne reconoce que estos problemas no constituyen **la práctica cotidiana del ingeniero**: en el cotidiano, las matemáticas consideradas como necesarias son más básicas, y permiten la utilización de fórmulas, esquemas y métodos gráficos. Tanto la teoría como la matemática operacional y funcional deben ser parte de la formación; la primera para posibilitar la resolución de problemas como los expuestos por d'Ocagne, la segunda para enfrentar el cotidiano profesional del ingeniero. Un elemento relevante en esta conferencia es la importancia dada a las ciencias del ingeniero, las cuales se presentan como disciplinas intermediarias, ya que comportan una fuerte componente matemática pero ofrecen aproximaciones y herramientas para resolver problemas de la ingeniería. Las tensiones entre teoría y práctica parecieran alcanzar cierto equilibrio en estas disciplinas. Las necesidades matemáticas se presentan a dos niveles: teóricas/avanzadas y elementales. La evolución científica y tecnológica que se genera vertiginosamente en el siglo XX, la omnipresencia de programas computacionales, el aumento de especializaciones ingenieriles, la ampliación de los campos científicos –entre ellos, las matemáticas– y el gran número de estudiantes que ingresan a las carreras de ingeniería modifican tanto las prácticas profesionales como las formaciones.

2. LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA: NUEVO PARADIGMA EDUCATIVO

LAS MATEMÁTICAS VISTAS COMO DISCIPLINA DE SERVICIO, ESTUDIO ICMI 3

En el estudio ICMI 3, editado por Howson, Kahane, Lauginie y Turckheim, se presenta el paradigma de las matemáticas vistas como disciplina de servicio. Se reconoce que las formaciones profesionales, que no forman futuros matemáticos, no pueden basar la enseñanza de las matemáticas en el rigor y la estructura propia de las matemáticas sino en su potencialidad como herramienta para resolver, de manera eficaz, problemas prácticos. Una contribución que puede ilustrar lo anterior es la de Pollak, matemático que trabajó durante 33 años en los Laboratorios Bell y quien afirma:

> Antes que todo, necesitamos tener conocimiento del hecho de que el pensamiento matemático, el pensamiento analítico, estructural, cuantitativo, sistemático, puede ser aplicado al mundo real y generar observaciones de gran valor; en otros términos, que la modelización matemática es posible y puede ser eficaz. (Pollak, 1988, p. 32)

Esta cita permite evidenciar que Pollak no expresa los elementos que deben conformar la formación matemática de ingenieros a través de una lista de conceptos y técnicas, sino de pensamientos matemáticos asociados a la modelización matemática. Lo anterior sugiere una transición del modelo de formación teoría-aplicaciones al de teoría-modelización matemática. Este nuevo paradigma puede encontrarse en algunos programas de estudio; consideremos dos. El primero corresponde a la asignatura de álgebra lineal del Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli, México, el cual es analizado en Macias (2012). En la presentación de este programa se señala que el curso aporta al futuro ingeniero "la capacidad para desarrollar un pensamiento lógico, heurístico y algorítmico al modelar fenómenos de naturaleza lineal y resolver problemas". Podemos ver que aparecen tipos de pensamientos relacionados a la modelización de fenómenos, en este caso, de naturaleza lineal. Las herramientas que en este curso se ofrecerán permitirán, por tanto, caracterizar fenómenos a través de un modelo lineal a partir de un tratamiento más "sencillo":

> Muchos fenómenos de la naturaleza que se presentan en la ingeniería se pueden aproximar a través de un modelo lineal. Esta materia nos sirve para caracterizar estos fenómenos y convertirlos en un modelo lineal ya que es más sencillo de manejar y graficar y resolver que uno no lineal. (Programa de álgebra lineal, p. 1)
>
> Una de las sugerencias didácticas consiste en proponer problemas que:
>
> a. Permitan al estudiante la integración de los contenidos, para su análisis y solución.
> b. Refuercen la comprensión de conceptos que serán utilizados en materias posteriores.
> c. Modelen y resuelvan situaciones reales de ingeniería mediante conceptos propios del álgebra lineal. (Programa de álgebra lineal, p. 7)

Podemos ver que la modelización vuelve a aparecer asociada al tratamiento de situaciones reales de ingeniería, aunque no es claro qué tipo de problemas provenientes de estos contextos pueden ser tratados en la enseñanza de esta asignatura. El segundo programa de estudio corresponde a la asignatura de ecuaciones diferenciales e integración en $\mathbb{R}^n$ de la Universidad Austral de Chile, sede Puerto Montt, que es analizado en Soto (2013). Un apartado del programa está dedicado a los aprendizajes esperados:

Con el desarrollo de esta asignatura, se pretende garantizar en los estudiantes el logro de los siguientes aprendizajes (en el ámbito de la aplicación de los conocimientos: saber hacer):

- Modelar un problema conducente al planteamiento de una ecuación diferencial (ordinaria) o de una ecuación de diferencias, siendo capaz, previamente, de clasificarla y de aplicar los métodos estudiados para resolverla.
- Interpretar, modelar y resolver un problema práctico que conduzca al planteamiento de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Distinguir el concepto de sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en el marco de un problema concreto de las ciencias o la práctica. (Programa de estudio de ecuaciones diferenciales e integración en $\mathbb{R}^n$, p. 1)

Se puede notar que la modelización aparece de manera importante en estos aprendizajes esperados, aunque los conocimientos conceptuales y técnicos sobre las ecuaciones diferenciales son vistos como necesarios en la modelización. No hay claridad sobre el tipo de problemas prácticos, sobre todo cuando se piensa en un abordaje didáctico, ¿cómo puede introducirse lo práctico dentro de la clase de matemáticas? Muchas otras interrogantes pueden abrirse paso dentro del paradigma teoría-modelización matemática, por ejemplo: ¿Cómo es la modelización matemática en la práctica profesional de ingenieros? ¿Cómo puede estudiarse y caracterizarse? ¿Es posible llevarla a un modelo de formación y al aula misma? Sin afán de responder estas preguntas sino de tener elementos para problematizarlas, analizamos a continuación investigaciones en las que se han estudiado las matemáticas utilizadas en prácticas profesionales de ingenieros.

Matemáticas en las prácticas profesionales

Para reconocer cómo las matemáticas, y en especial la modelización, son utilizadas en el contexto profesional actual de los ingenieros, marcado fuertemente por la omnipresencia tecnológica (Kent, 2007), se analizan a continuación diferentes trabajos (Kent y Noss, 2002; Bissell y Dillon, 2000). La investigación de Kent y Noss se llevó a cabo en una empresa de ingenieros civiles en Inglaterra y fue realizada después de haber analizado prácticas profesionales de enfermeras, banqueros y pilotos de avión. Kent y Noss consideraron que en la práctica de ingenieros civiles, a diferencia de las otras prácticas, las matemáticas aparecerían de manera explícita y ellos podrían analizar el papel que desempeñaban en dicha práctica. Sin embargo, en una de las entrevistas uno de los ingenieros afirmó:

> Después de haber dejado la universidad no utilizamos las matemáticas que aprendimos; calcular un cuadrado o un cubo es lo más complejo que uno hace. Para la mayor parte de los ingenieros en esta empresa, una gran cantidad de matemáticas que nos enseñaron, y no diré que aprendimos, no han aparecido todavía. (Kent y Noss, 2002, p. 1)

En esta investigación se mostraron dos elementos que permitían explicar esta invisibilidad de las matemáticas en la práctica de la ingeniería civil.

División de trabajo matemático: análisis y concepción. Dos tipos de ingenieros podían ser reconocidos: de análisis y de concepción. Los ingenieros de concepción solicitaban el trabajo matemático a los ingenieros de análisis. Estos últimos eran los encargados de modelar y de dar soluciones a los problemas planteados. Los ingenieros de concepción eran capaces de poner en funcionamiento las soluciones propuestas por los analistas. Las matemáticas fungían como herramienta de comunicación y posibilitaban una economía del trabajo matemático en esta empresa. Esta economía de trabajo matemático puede equipararse con lo que Kent (2007) llama modificación del trabajo matemático provocada por el uso de programas computacionales.

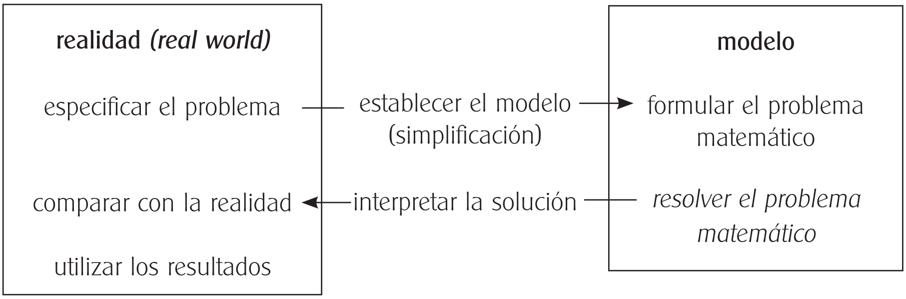
Guías prácticas. En esta investigación aparecen documentos conocidos como "guías prácticas", cuyo objetivo es difundir el conocimiento práctico. Es decir, todo aquello que se considera que los ingenieros deben saber acerca de esa práctica. Documentos de esta naturaleza también aparecieron en el trabajo de Vergnaud (1996) dedicado al estudio de ingenieros aeronáuticos. Los autores explican que en estos documentos las matemáticas que aparecen no son las matemáticas universitarias, lo que puede explicar que los ingenieros no reconozcan las matemáticas que utilizan.

Las matemáticas en las prácticas profesionales pueden reconocerse por lo siguiente:

- son matemáticas que se construyen en una relación estrecha con la práctica, **una comprensión a través del uso**;
- sus dimensiones más avanzadas tienden, cada vez más, a estar a cargo de **especialistas** o de **programas computacionales**;
- las necesidades de los no especialistas parecen desplazarse hacia la capacidad de manipular estas matemáticas como una herramienta de comunicación a través de los **lenguajes específicos**, esto contribuye a explicar por qué su rol es tan **poco reconocido**.

Considerando estas características, puede decirse que un paradigma de formación teoría-aplicación difícilmente podría satisfacer las necesidades matemáticas de la práctica. La modelización matemática, como se ilustra en la contribución de Pollak, se revela como un paradigma alternativo, pero ¿qué caracteriza a esta modelización específicamente en la práctica de los ingenieros? Para abordar esta pregunta se analiza a continuación el trabajo de Bissell y Dillon (2000). Los autores presentan primeramente dos

Figura 1 Ciclo de modelización "rígida"



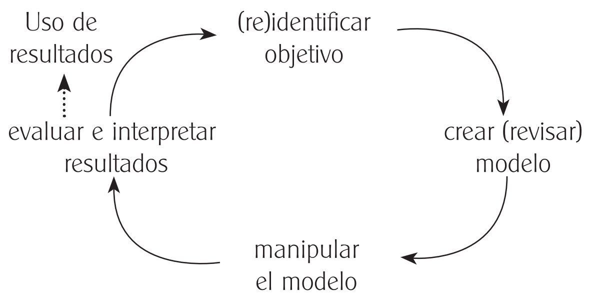
definiciones generales de la modelización matemática: "rígida" *(hard)* y "flexible" *(softer)*. Para definir el círculo de modelización "rígida", los autores hacen referencia a un libro sobre control de sistemas dinámicos y señalan que éste se compone de cuatro etapas:

1. describir el sistema físico *(physical modelling)*,
2. describir el sistema matemático (model construction),
3. analizar la descripción matemática *(model solution)* e
4. interpretar y sacar provecho de esta descripción *(system design)*.

Los autores señalan que, desde un punto de vista de la modelización matemática, estas cuatro etapas corresponden a un "ciclo de modelización" como se muestra en la figura 1. Un proceso de modelización requiere de varios ciclos de este tipo, en los cuales el ingeniero aplicará o utilizará conocimientos y técnicas matemáticas reiteradamente hasta obtener una solución al problema real. Para un proceso como éste, los autores señalan dos tipos de límites. Los primeros provienen de la implementación práctica en la que pueden encontrarse dificultades relacionadas con la precisión de la formulación del problema, particularmente a nivel de la simplificación utilizada, así como con la validación de los resultados obtenidos.

Los segundos resultan de un punto de vista filosófico y práctico subyacente a esta visión de modelización basado en la existencia de una correspondencia platónica entre el mundo de los problemas reales y el mundo de los modelos, y dejan fuera de esta aproximación todos los problemas reales que no pueden corresponderse de manera ideal a un modelo. La modelización "flexible" (*softer*, figura 2) se presenta como una iteración de ciclos de modelización, pero más flexible, en el sentido de que ésta no se ve como una relación de tipo espejo entre el mundo de los problemas reales y éste de los modelos. Además, los procesos implicados en las fases de creación, manipulación y evaluación no se especifican. Pero puede suponerse, sin embargo, que existe un método que, al ser empleado correctamente, termina por asegurar la obtención de una solución.

Figura 2 Ciclo de modelización "flexible"



Estos dos ciclos de modelización, muy frecuentes en la literatura según estos autores, no dan cuenta de las condiciones reales del funcionamiento de la modelización en la práctica del ingeniero. Contrariamente a lo que en éstos se señala, el ingeniero rara vez crea un nuevo modelo; más bien, el ingeniero selecciona un modelo estándar conocido, con soluciones conocidas, y lo que hace es adaptarlo o modificarlo ligeramente. La adaptación no puede verse como un proceso sencillo, pues implica conocer el modelo y el fenómeno o proceso al cual va a adaptarse. El proceso de modelización es comúnmente incremental, es decir, consiste en una afinación de modelos existentes hecha sobre la base de la experiencia y de la práctica, incluyendo lo que resulta de los fracasos de la modelización. La modelización no es algorítmica sino subjetiva, se apoya regularmente en conocimientos implícitos y saberes prácticos específicos de una disciplina o de un dominio. La intuición es importante y los buenos modelizadores tienen "olfato" para los tipos de modelos susceptibles de ser adaptados a tal o cual circunstancia. Un modelo matemático es útil si y solamente si éste puede ser utilizado con éxito; por lo tanto, es preferible un modelo menos preciso pero que pueda ser utilizado más fácilmente, a un modelo más sofisticado pero menos práctico. Al situarse en esta perspectiva de **utilización y de adaptación** de modelos existentes, una de las preguntas que emerge es: ¿cuáles son las competencias matemáticas necesarias para tal uso de los modelos? Para responder esta pregunta, los autores proponen una jerarquía de competencias en tres niveles: la manipulación, la interpretación y la aplicación, como se presenta en la figura 3.

El primer nivel, o "manipulación", es el de las competencias manipulativas, relacionadas con las competencias matemáticas "básicas": reformulación de una expresión matemática, sustitución correcta de variables y modificación de fórmulas, por ejemplo, en una hoja de cálculo. El segundo nivel, el de la interpretación, se apoya en estas competencias manipulativas, pero éstas no resultan de ningún interés sin las competencias interpretativas. La interpretación y la manipulación son iterativas y lo que se produce con

Figura 3 Jerarquía de competencias en tres niveles*

Aplicación	Habilidad para aplicar la interpretación y hacer recomendaciones apropiadas; esencialmente "proactiva".
Interpretación	Habilidad para interpretar formas modificadas del modelo de forma adecuada para la situación; esencialmente "reactiva".
Manipulación	Habilidad para modificar la forma básica, utilizando habilidades algebraicas y otras; esencialmente "mecánica".

* La jerarquía aparece originalmente en idioma inglés y la traducción la ha hecho la autora del artículo.

ellas se relaciona con el tercer nivel, el de la aplicación del modelo, conduciendo a recomendaciones explícitas. Desde un punto de vista educativo y didáctico, lo anterior lleva a cuestionarse sobre cómo un modelo matemático es utilizado para describir/estudiar/analizar un fenómeno en la práctica. Las competencias mencionadas anteriormente, ¿con qué tipos de conocimientos matemáticos universitarios pueden relacionarse? Es decir, las competencias de modelización antes descritas, ¿pueden ser tratadas en los cursos de matemáticas de futuros ingenieros? ¿De qué tipo de herramientas teóricas y metodológicas dispone la matemática educativa para diseñar actividades didácticas para una formación de ingenieros? Y más en específico, para una asignatura de cálculo diferencial e integral, álgebra lineal o bien de ecuaciones diferenciales. A partir del desarrollo de un proyecto de investigación cuyo objetivo es el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática, se han ido desarrollando y se presentan a continuación algunas herramientas teóricas y metodológicas basadas en la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

3. HERRAMIENTAS TEÓRICAS Y METODOLÓGICAS PARA EL DISEÑO DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS BASADAS EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD, en adelante) propone un modelo epistemológico para el estudio de la actividad humana en su dimensión institucional. Es decir, un elemento fundamental en esta teoría es la noción de institución, la cual puede definirse de la siguiente manera:

> Las instituciones, es decir, organizaciones sociales estables, enmarcan las actividades humanas y simultáneamente las hacen posibles por los recursos que estas instituciones ponen a disposición de sus sujetos. Estos recursos materiales e intelectuales han sido producidos por comunidades, a lo largo de procesos de enfrentamiento

a situaciones problemáticas, para resolverlas con regularidad y eficacia. (Castela y Romo, 2011, p. 85)

La actividad de modelización matemática se analizará por tanto en el marco de instituciones, reconociendo las restricciones que condicionan y los recursos que posibilitan dicha actividad. La noción de praxeología [T, τ, θ, Θ] es la unidad mínima de análisis propuesta en la TAD, y sus cuatro componentes son: tipo de tarea [T], técnica [τ], tecnología [θ] y teoría [Θ]. La tarea es lo que se hace; la técnica es la manera en que se hace; la tecnología es un discurso que produce, justifica y explica la técnica, y la teoría, a su vez, produce, justifica y explica la tecnología.

Dado que el objetivo del proyecto de investigación es el diseño de actividades didácticas basadas en la modelización matemática (que tiene lugar en las disciplinas intermediarias y/o en la práctica de ingenieros), se considera necesario identificar las instituciones que participan de la formación del ingeniero y las posibles relaciones que pueden establecerse entre éstas en torno a la modelización matemática. Para ello, se retoma el modelo de instituciones que participan en la formación de ingenieros propuesto en Romo-Vázquez (2009). Las instituciones consideradas son de tres tipos: de producción, de enseñanza y de uso. Por supuesto, lo anterior corresponde a un modelo “limitado”, pues pueden existir muchas más instituciones que participen en dicha formación.

Las instituciones de producción son las que producen el modelo matemático, visto como praxeología, y que hacen pesar sobre éste todas sus condiciones y restricciones, pero también generan puntos de apoyo. Se reconocen dos instituciones de producción:

- Matemáticas (como disciplina) P(M)
- Disciplinas Intermediarias (como disciplina) P(DI)

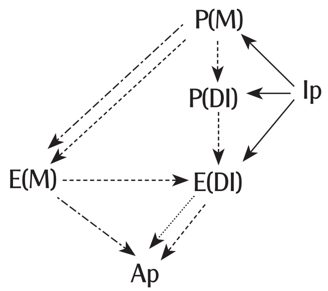
Las instituciones de enseñanza son las responsables de transmitir las praxeologías (modelos matemáticos). En estas instituciones se operan las transposiciones necesarias para adaptarlas a las condiciones y restricciones de la enseñanza, incluso cuando dichas praxeologías se usan. Por ejemplo, si en un curso de teoría de control (disciplina intermediaria) se usa una praxeología matemática, será bajo una lógica escolar. Se reconocen dos instituciones de enseñanza:

- Enseñanza de las Matemáticas E(M)
- Enseñanza de las Disciplinas Intermediarias E(DI)

Las instituciones usuarias es donde las praxeologías matemáticas son utilizadas para atender a las necesidades de la práctica:

- Práctica profesional Ip
- Actividades prácticas Ap

Esquema 1 Recorridos que sigue una praxeología matemática para pasar de P(M) a Ap



Se considera necesario precisar la diferencia entre Ip y Ap. Ip es una macroinstitución que representa la práctica profesional del ingeniero. Es decir, una empresa de ingeniería de cualquier tipo (civil, de telecomunicaciones, transportes y caminos, por ejemplo) es una subinstitución de Ip. Mientras que en Ap se comprenden las actividades propuestas en el marco de la formación pero de carácter práctico, por ejemplo, el desarrollo de proyectos de ingeniería, estancias en empresas, prácticas profesionales, entre otras. Aunque en el desarrollo de estas actividades pueden tener lugar praxeologías validadas por E(M) y/o E(DI), éstas compartirán lógicas de la práctica, pues el objetivo de las actividades no es enseñar la praxeología sino utilizarla para resolver un problema de la práctica.

Reconocer las relaciones entre estas instituciones y la forma en la cual participan dentro de la formación dependerá de la manera en que la investigación se realice. Sin embargo, de manera general puede reconocerse que las instituciones P(M) y P(DI) participan al menos como instituciones de referencia, es decir, tanto las matemáticas que se enseñan como las asignaturas de disciplinas intermediarias se respaldan en validaciones teóricas generales de las disciplinas. Es posible que dentro de un curso nunca se haga una referencia explícita a estas validaciones que justifican y explican las técnicas presentadas. De la misma manera, la práctica profesional difícilmente estará presente en la formación, pero algunos dispositivos didácticos de tipo Ap pueden ser desarrollados por los estudiantes de ingeniería y, en ese sentido, su formación establecerá una relación con la institución práctica profesional. En Romo-Vázquez (2009) se propuso un esquema que ilustra los recorridos que las praxeologías matemáticas son susceptibles de seguir si éstas se producen en P(M) y se utilizan en la actividades prácticas como se aprecia en el esquema 1.

Los recorridos ilustrados en el esquema 1 pueden detallarse de la siguiente manera:

1. P(M)→E(M)→Ap (simbolizado con ‐‐‐‐‐‐‐➤)
   De la institución de producción de conocimientos matemáticos a la enseñanza de las matemáticas y de ésta al desarrollo de actividades prácticas.

2. P(M)→P(DI)→E(DI)→ Ap (simbolizado con --------➤)
   De la institución de producción de conocimientos matemáticos a la institución de producción de conocimientos intermediarios, de ésta a la enseñanza de las disciplinas intermediarias y finalmente a las actividades prácticas.

3. P(M)→E(M)→E(DI)→ Ap (simbolizado con ···········➤)
   De la institución de producción de conocimientos matemáticos a la enseñanza de las matemáticas, de ésta a la enseñanza de las disciplinas intermediarias y finalmente a la práctica.

En este modelo de recorridos praxeológicos se considera que hay praxeologías de modelización matemática que son producidas en P(M) o en P(DI), lo que implica que estas instituciones validan las técnicas que permiten resolver las tareas de modelización. Sin embargo, estas instituciones son de naturaleza distinta y, por tanto, las tecnologías (validaciones y explicaciones) son también de naturaleza distinta. Una justificación matemática será distinta de una justificación de la disciplina intermediaria y también será distinta de una justificación producida por la práctica. En el sentido de Bissell y Dillon (2000), la interpretación y la facilidad de uso del modelo podrían verse como justificaciones del modelo elegido y de las técnicas asociadas para resolver una tarea de modelización. Para poder analizar estas justificaciones consideramos el modelo praxeológico extendido, en el cual la tecnología tiene dos componentes: teórica [θ^{th}] y práctica [θ^{p}]. La componente práctica, particularmente, es un discurso que tiene seis funciones que permiten describir, validar, explicar, facilitar, motivar y evaluar el uso de técnicas matemáticas en referencia a instituciones usuarias, no necesariamente matemáticas. El modelo puede expresarse de la siguiente manera:

$$\left[T,\tau,\begin{matrix}\theta^{th},\Theta\\ \theta^{p}\end{matrix}\right]\begin{matrix}\leftarrow P(S)\\ \leftarrow Iu\end{matrix}$$

donde *P(S)* designa la institución productora de saberes e *Iu* la institución usuaria de dichos saberes. Se asume que para resolver tareas en contextos prácticos de ingeniería, el uso de saberes –y más precisamente de modelos matemáticos– se hace mediante técnicas matemáticas validadas por saberes matemáticos [θ^{th}]; esta validación que sustenta la coherencia matemática del modelo puede ser ignorada en el uso del modelo. Para reconocer los discursos que justifican y validan el uso de los modelos, se propone considerar las funciones tecnológicas de la componente práctica [θ^{p}], las cuales aparecen en Castela y Romo-Vázquez (2011) de la siguiente manera:

1. **Describir el tipo de tareas y la técnica.** La producción de un discurso que caracteriza el tipo de tarea y los pasos que componen una técnica son considerados como una pieza de saber no identificable a la maestría de la técnica en sí misma. Las acciones en juego y el contexto donde se sitúa la praxeología, en un sistema compartido, se pueden identificar en la elaboración de un sistema de representaciones verbales y, más ampliamente, simbólicas. La producción de estos lenguajes, y la descripción que ellos permiten, constituye una componente decisiva del proceso de transmisión de una invención técnica.
2. **Validar la técnica.** La función considerada corresponde a lo que en general se entiende bajo el término justificar, en los textos que definen la noción de praxeología. Los saberes considerados establecen que la técnica produce bien lo que ella dice que produce, que los pasos que la componen permiten conseguir los objetivos que le son asignados. En el caso de las matemáticas, esta función es generalmente asegurada por los saberes justificados por las teorías matemáticas. [...] Sin embargo, en otros contextos, los saberes validados experimentalmente en laboratorio o empíricamente en el uso pueden validar una técnica. Éste es particularmente el caso cuando se trata de validar las adaptaciones de la técnica.
3. **Explicar la técnica.** Se trata de saberes que permiten analizar cómo la técnica y sus diferentes pasos permiten conseguir los objetivos pretendidos. Es cuestión de una inteligencia de las causas. Después de la diatriba de los geómetras en torno a los métodos analíticos de Descartes, se sabe que existen –incluso en matemáticas– validaciones que no explican. Existen también validaciones que no validan, porque éstas no respetan completamente las normas de la validación en la institución que examina esta cuestión de la validez, apoyándose por ejemplo en analogías. Contribuyen a la comprensión de las causas de los sujetos y, por tanto, están sumamente relacionadas a su cultura compartida.
4. **Facilitar la aplicación de la técnica.** Los saberes considerados en esta función permiten a los usuarios utilizar con eficacia, pero también con un cierto confort, la técnica. Éstos son portadores de mejoras pero también de advertencias que permiten evitar errores y torpezas conocidas como frecuentes. Este dominio de saberes es el terreno privilegiado de las elaboraciones tecnológicas de los usuarios. Dicho dominio produce efectos retomados de descripciones que lo especifican al adaptarlo a las condiciones particulares del contexto institucional de utilización y al enriquecimiento de la memoria de las experiencias acumuladas.
5. **Motivar la técnica y los pasos que la componen.** Estos saberes están orientados hacia la práctica. Participan de una inteligencia de los fines: son los objetivos esperados que justifican racionalmente los pasos, mostrando su razón de ser. Se trata de escribir una historia de la técnica que sitúe sus componentes, los unos en relación con los otros: ¿por qué (¿para hacer qué?) se realiza tal paso en tal momento? Los saberes de motivación son frecuentemente saberes relacionados con el tipo de tareas, puesto que ellos analizan los objetivos. Permiten anticipar

las etapas esperadas y juegan, por tanto, un papel heurístico importante cuando la aplicación de la técnica necesita adaptaciones.

6. **Evaluar la técnica.** Los saberes considerados aquí tienen que ver con el dominio, las condiciones y los límites de una técnica en relación con las tareas del tipo ***T***. Ellos pueden igualmente concernir la ergonomía de la técnica desde el punto de vista de sus usuarios. Las funciones evaluar, facilitar y motivar están a veces muy relacionadas: la puesta en evidencia de ciertas dificultades (evaluar) puede provocar, al cabo de cierto tiempo, la producción de mejoramientos (facilitar); la motivación está dada por la evaluación. (Castela y Romo-Vázquez, 2011, pp. 88-89)

Estas funciones son, por tanto, herramientas que permiten abordar cuestiones como: ¿en qué condiciones se utiliza un modelo matemático?, ¿qué elementos del contexto de uso deben conocerse para poder utilizar un modelo?, ¿cuáles son los conocimientos que permiten a un modelador elegir y/o utilizar determinado modelo?, ¿cuáles son las explicaciones que acompañan el uso de los modelos? En el modelo praxeológico extendido se reconoce que tanto la elección del modelo o de la técnica más óptima (óptimo puede corresponderse con la facilidad de uso), como las condiciones del contexto de uso, la factibilidad de modelización de un fenómeno o proceso y las adaptaciones que deben operarse sobre un modelo para un cierto contexto se sustentan en saberes prácticos legitimados por *Iu*. Es decir, el modelo praxeológico extendido amplía la noción de validación de la técnica matemática, permite el análisis de los discursos tecnológicos prácticos que posibilitan usos y, más aún, reconoce las posibles relaciones con los discursos tecnológicos teóricos que producen dicha técnica. Por tanto, las funciones tecnológicas de la componente práctica constituyen una herramienta metodológica para analizar la actividad de modelización matemática de los ingenieros.

Este planteamiento teórico, la formación de ingenieros vista a través de instituciones productoras, de enseñanza y el uso del modelo praxeológico extendido para analizar modelos matemáticos en contextos de ingeniería, son la base del diseño de actividades didácticas como se muestra a continuación.

4. ANÁLISIS DE MODELOS MATEMÁTICOS EN USO, PRIMERA ETAPA EN EL DISEÑO DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA LA FORMACIÓN DE INGENIEROS

La modelización matemática, como se ha venido mostrando, ocupa un lugar cada vez más importante en las formaciones de ingenieros. Los planes y programas de estudio de diferentes instituciones señalan, ya sea en términos de competencias o de contenidos, que uno de los objetivos de las asignaturas matemáticas es dotar al estudiante de herramientas matemáticas para que modele situaciones prácticas. Sin embargo, existen pocas o nulas sugerencias didácticas precisas sobre cómo enseñar a modelar a los futuros ingenieros, los tipos de problemas que pueden abordarse y cómo éstos se relacionan con conocimientos propios al contexto del problema. Dentro de la matemática educativa se han desarrollado una gran cantidad de investigaciones sobre la modelización matemática, que han producido desde perspectivas teóricas hasta el diseño y experimentación de actividades didácticas en el aula. Lo anterior puede ilustrarse con el estudio ICMI 14, publicado en 2007, coordinado por la Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas y dedicado al tema de la "Modelación y Aplicaciones en Matemática Educativa". Sin embargo, son todavía pocas las investigaciones desarrolladas en el nivel universitario y todavía menos las que se sitúan en la formación matemática de ingenieros, considerando las características propias de la modelización matemática en la práctica de ingenieros. Nuestro objetivo es contribuir en el diseño de actividades didácticas específicamente para la formación de ingenieros y que éstas se basen en análisis de modelos matemáticos en uso. Para lo cual es necesario primeramente elegir un contexto de ingeniería, como se muestra en la metodología de diseño propuesta en Macias (2012).

El método de la separación ciega de fuentes utilizado en la ingeniería biomédica

El primer contexto analizado es el de la ingeniería biomédica, y específicamente la aplicación del método de la Separación Ciega de Fuentes (BSS, por sus siglas en inglés). Un primer análisis de este método fue realizado conjuntamente con ingenieros-investigadores biomédicos y permitió reconocer el uso de matrices y vectores para modelar las señales eléctricas producidas por el cerebro. En dicho análisis, como se muestra en Romo-Vázquez, Romo-Vázquez y Vélez-Pérez (2012), se reconoce que este método, utilizado para el mejoramiento del diagnóstico de la epilepsia, puede ser una base para el diseño de actividades didácticas. En primer lugar, porque los modelos matemáticos utilizados son matrices y vectores; además, aparece la operación de la inversa de una matriz, todos los cuales son objetos de enseñanza en los cursos de álgebra lineal de las formaciones de ingenieros. El método de la BSS se utiliza generalmente para separar mezclas; en el contexto analizado, se busca separar señales eléctricas de origen cerebral de señales eléctricas de un origen distinto (muscular y ocular, por ejemplo) que se mezclan al ser captadas por electrodos para producir un electroencefalograma. Se reconoce que los modelos, matrices y vectores son adaptados para separar estas mezclas y no creados por cada ingeniero que aborda el problema. Para ilustrar el uso del modelo praxeológico en el análisis de este método, presentamos su principio (Romo-Vázquez et ál., 2012):

El modelo espacial de la mezcla al instante k está definido por: $x(k) = As(k)$

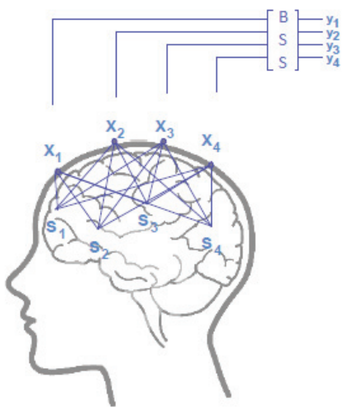
donde:

$x(k) = [x_1(k), \ldots, x_Q(k)]^T$ es el vector de señales observadas (electrodos)
$s(k) = [s_1(k), \ldots, s_P(k)]^T$ es el vector de las fuentes de origen (desconocido)
A(Q x P) matriz de mezcla (desconocida).

El objetivo de la BSS es la estimación de una matriz de separación **B**, que permita la estimación de las fuentes de origen **s** a partir de las señales medidas **x** (véase figura 4):

Desde el punto de vista formal, la separación ciega de fuentes consiste en estimar P señales desconocidas **s** (las fuentes) a partir del conocimiento únicamente de Q mezclas de las señales **x** (las observaciones). El término ciego significa que las fuentes no son observadas y que el modelo de mezcla **A** también es desconocido. Dentro del análisis praxeológico del método de la BSS pudo verse que la función ***validación de la técnica*** aparece en el momento de determinar el tamaño de la matriz A, la cual debe ser cuadrada de n x n, para poder calcular su inversa. Es decir, los ingenieros-investigadores asumen que P es igual a Q como se muestra en Romo-Vázquez, Vélez-Pérez, Ranta, Louis-Dorr, Maquin y Maillard (2012): “Asumimos que el número de fuentes es igual al número de sensores Q. En este caso, $A \in R^{Q\times Q}$ y la separación ideal es obtenida cuando $B = A^{-1}$ y, por consiguiente, Y es una estimación (ruidosa) de S.” Los ingenieros-investigadores señalan que el tamaño de A dependerá del número de electrodos que se utilicen. La pregunta que emerge es, ¿cómo se determina un número **óptimo** de electrodos? Los ingenieros-investigadores indican que “se tienen que usar suficientes electrodos para estar seguro de que se captan todas las actividades cerebrales, por lo que en general se utilizan 24 o 64, siguiendo el sistema internacional 10-20”. Esta validación del número de electrodos y, por tanto, del tamaño de la matriz A depende de que se capte “suficiente” actividad cerebral. ¿Por qué es importante reconocer esta validación del tamaño de la matriz A para el diseño de una actividad didáctica? En primer lugar,

Figura 4 Principio del método de la BSS



podría decirse que para el diseño de una actividad didáctica basado en el método de la BSS es importante reconocer que éste permite separar mezclas y, por tanto, importa reconocer *la naturaleza de la mezcla* y cómo ésta pueda ser modelizada mediante una matriz. Por ejemplo, si para el diseño de una actividad didáctica se considera una mezcla de voces o de sonidos que desea separarse, un elemento importante que debe considerarse –basado en el análisis praxeológico– es que el número de voces o sonidos debe ser igual al número de micrófonos que los captan (lo cual corresponde al caso ideal de que las fuentes **s** fueran igual al número de observaciones **x** captadas). Este elemento tecnológico propio del contexto debe ser considerado en el diseño de la actividad didáctica.

Un segundo contexto de ingeniería analizado corresponde al de teoría de control, la cual ofrece herramientas para modelar sistemas físicos. En Soto (2013) se analizó este contexto y, más en específico, el modelo de producción digital de voz. La investigación de Soto tenía por objetivo desarrollar una secuencia didáctica basada en modelización matemática para el curso de ecuaciones diferenciales. Un documento inicial que Soto analiza es la tesis doctoral de Escobedo (2006), cuyo título es: *Análisis acústico del llanto del niño recién nacido orientado al diagnóstico de patología en su neurodesarrollo debido a hipoxia*. Soto señala que la elección de esta tesis (documento de P(DI)) se debió a que se genera en la neurociencia y utiliza elementos de la Teoría de Control, en los cuales las ecuaciones diferenciales son fuertemente utilizadas como modelos matemáticos. El modelo de producción de voz presentado en Escobedo (2006) es bastante complejo como puede verse en la siguiente cita:

> Dos factores básicos entran en la producción de voz y lenguaje: el punto o zona de origen del sonido y el filtro; de hecho, toda onda de este tipo puede especificarse en función de estas dos características, esto es base de la formulación matemática de la teoría acústica para la producción de voz y lenguaje (Fant, 1960; Stevens, 1964; Flanagan, 1972); según lo anterior, la salida de voz y lenguaje puede representarse por la expresión (1.1) como: *Salida = Fuente · Filtro.* (Escobedo, 2006, p. 24)

Con el objetivo de analizar este modelo, Soto considera diferentes documentos, textos de teoría de control enfocados hacia la enseñanza de esta disciplina E(DI) –Pérez, Pérez y Pérez (2008), así como Gil y Díaz-Cordovés (2010)–, permitiéndole identificar las ecuaciones diferenciales y la función de transferencia utilizadas como modelos matemáticos "generales" para "controlar" sistemas. Un sistema puede representarse con el esquema bloque más general como se aprecia en la figura 5.

La entrada constituye algo que va a ingresar al sistema –velocidad, temperatura, tensión, etc.–, que puede modificarse y que puede elegirse por el modelador, mientras que la salida es lo que desea obtenerse. Por lo tanto, para controlar el sistema resulta fundamental reconocer la relación entre la salida (lo que desea obtenerse) y la entrada. Esta relación se define en teoría de control a través de la función de transferencia:

Figura 5 Representación de un sistema mediante un esquema bloque

Considere el sistema lineal e invariante en el tiempo descripto mediante la siguiente ecuación diferencial de n-ésimo orden con coeficientes constantes, que relaciona las variables de entrada- y salida del mismo:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \mathrm{K} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} \mathrm{K} + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)$$

Ec. (20)

Los coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ y $b_0, b_1, ..., b_m$, son constantes reales. Una vez que la entrada $r(t)$ para $t >= t_0$ y las condiciones iniciales de $y(t)$ y las derivadas de $y(t)$ se especifican en el tiempo inicial $t = t_0$, la respuesta de salida $y(t)$ para $t >= t_0$, se determina al resolver la Ec. (20). Sin embargo, desde el punto de vista del análisis y diseño de sistemas lineales, el método que emplea ecuaciones diferenciales en forma exclusiva es bastante incómodo. Por lo que las ecuaciones diferenciales de la forma de la Ec. (20) rara vez se emplean en su forma original para el análisis y diseño de sistemas de control.

Para obtener la función de transferencia del sistema lineal en el dominio de Laplace, simplemente se toma la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación y **se suponen condiciones iniciales cero**. El resultado es:

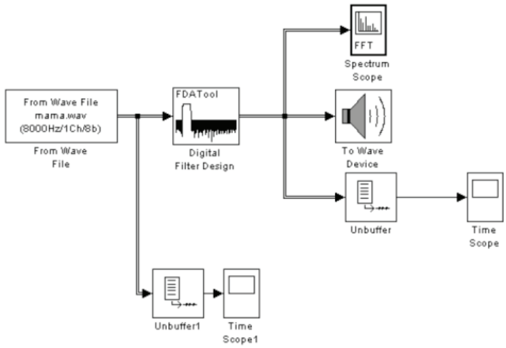
$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \mathrm{K} + a_1 s + a_0)\, Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \mathrm{K} + b_1 s + b_0)\, R(s)$$

La función de transferencia entre $r(t)$ y $y(t)$ está dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \mathrm{K} + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \mathrm{K} + a_1 s + a_0}$$

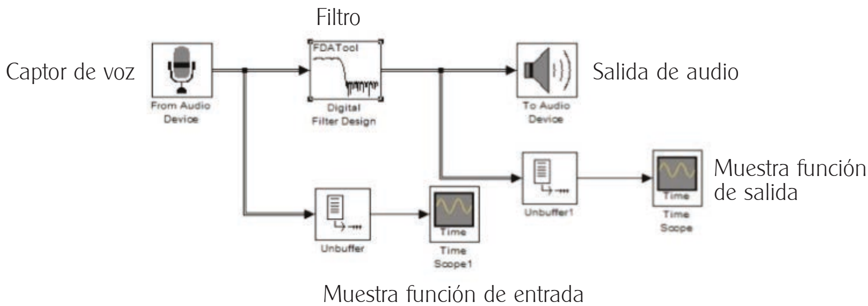
(Pérez et ál., 2008, pp. 34-35)

Figura 6 Modelo de producción digital de voz (Martínez, 2007)



Se ha reconocido hasta aquí que, en teoría de control, un sistema que desea controlarse puede verse esquematizado mediante bloques, reconociendo la salida (lo que desea obtenerse) y la entrada (lo que puede elegirse para afectar el sistema). Al analizar la definición de la función de transferencia, que es el elemento tecnológico que permitirá controlar el sistema y verificar que éste realice exactamente lo que se espera, puede verse que hay otros elementos que deben ser comprendidos, por ejemplo, sistema lineal e invariante en el tiempo. Un sistema se reconoce lineal cuando se preserva la proporcionalidad: si una entrada es multiplicada por un factor la salida también lo es; y la aditividad: la suma de las entradas es igual a la suma de la salidas. Un sistema invariante en el tiempo es que para cierta entrada se obtiene la misma salida, sin importar el momento en el que se determine y, por tanto, los coeficientes de la ecuación diferencial son constantes. Podemos notar que la noción de linealidad se adapta para describir la naturaleza de los sistemas que se están modelando; lo que resulta importante en la teoría de control es poder reconocer la relación entre las entradas y las salidas del sistema. La representación de los sistemas mediante ecuaciones diferenciales lineales es *válida* para modelar de manera general estos sistemas, aunque en el documento analizado (Pérez et ál., 2008) se reconoce que esta modelización es "incómoda" y rara vez se utiliza. Por otra parte, puede notarse que se utiliza el término "dominio de Laplace" para indicar que la transformada de Laplace será aplicada a las ecuaciones diferenciales que representan cierto sistema físico para transformarlas en ecuaciones algebraicas que puedan operarse "más fácilmente". Se considera que la función ***facilitar la aplicación de la técnica*** permite justificar la aplicación de la transformada de Laplace a estas ecuaciones para poder modelar estos sistemas a través de los esquemas bloques donde las entradas, los componentes del sistema y las salidas se representan mediante bloques. Un análisis sobre el uso de la trasformada de Laplace en la modelización de estos sistemas aparece en Castela y Romo-Vázquez (2011). La ventaja de estos esquemas es que pueden ser simulados mediante herramientas computacionales, como es la librería Simulink del programa Matlab. Para ilustrarlo consideremos el esquema bloque

Figura 7 Modelo adaptado por Soto



del modelo digital de voz que aparece en Martínez (2007) –documento de P(DI)– y representado en la figura 6. Se puede notar que las ecuaciones diferenciales y la función de transferencia que permiten controlar el sistema no aparecen en el esquema.

Para conformar el esquema, la librería Simulink ofrece una gran variedad de menús que permiten elegir los bloques (entradas, filtros, salidas que representen el tiempo, dispositivos, etc.) para representar cierto sistema. Una vez conformado el esquema, el trabajo de simulación consiste en analizar la(s) salida(s) obtenida(s) en función de la(s) entrada(s); el modelador puede agregar o suprimir bloques y modificar parámetros hasta obtener la(s) salida(s) deseada(s). Todas estas decisiones están sustentadas por ***justificaciones*** que deben ser reconocidas en el análisis praxeológico. En la secuencia diseñada por Soto se consideró como base el modelo de Martínez (2007), el cual fue adaptado como se muestra en la figura 7. Este esquema permite a los estudiantes grabar su voz una vez que se activa el ícono del micrófono y obtener como salida la voz distorsionada por un filtro. Una de las actividades consiste en cambiar parámetros para ir modificando el efecto del filtro y obtener como salida una voz clara y sin distorsión. El modelo que subyace al filtro es una ecuación diferencial de primer orden que funciona como caja negra, es decir, no se solicita a los estudiantes resolver ninguna tarea que los lleve a explicitar el modelo matemático que permita que el filtro funcione. Los estudiantes modifican parámetros y observan los efectos de las modificaciones sin necesariamente determinar qué las rige.

En la secuencia diseñada por Soto aparecen varios esquemas bloques similares al de la figura 7 pero más sencillos, que les permiten a partir de las tareas propuestas reconocer la relación de la función de salida con la función de entrada. La simulación de estos sistemas y el trabajo solicitado mantiene como caja negra a la ecuación diferencial y a la función de transferencia, excepto en la última tarea. En dicha tarea se presenta un esquema bloque y se dice que éste funciona gracias a una ecuación diferencial; una de las tareas consiste en comprobar si la función de salida (cuyas gráficas se han obtenido utilizando el bloque *scope* del programa computacional) se corresponde con la gráfica de la solución de la ecuación diferencial de primer orden $y' + 3y = 1$, que satisface la condición inicial $y(0) = 0$. Los estudiantes pueden resolverla mediante el método de su elección. Esta secuencia permite un trabajo de modelización matemática basado en la reproducción de esquemas bloques, en su simulación, en el análisis de gráficas que permitan reconocer la relación entre las funciones de entrada y salida, así como en la modificación de parámetros. Se busca, por tanto, motivar a los estudiantes a interrogarse sobre el modelo matemático que determina la relación entre la función de entrada y de salida del sistema considerado. La primera experimentación con estudiantes mostró que es necesario afinar la última tarea donde se propone el trabajo con la ecuación diferencial, para que el pasaje entre el trabajo con los esquemas bloques, el modelo digital de voz y la resolución de la ecuación diferencial sea más "suave".

5. REFLEXIONES SOBRE EL ENFOQUE TEÓRICO-METODOLÓGICO PROPUESTO

A partir del análisis de los primeros modelos de formación de la Escuela Politécnica, se mostró la existencia de tensiones entre teoría y práctica. La complejidad de conciliarlas se muestra con mayor fuerza en los modelos diseñados por Laplace y Le Verrier. Maurice d'Ocagne pone de manifiesto el papel de las matemáticas en las disciplinas intermediarias o ciencias del ingeniero que parecen equilibrar la teoría matemática, la cual es adaptada a estas disciplinas para poder resolver problemas de investigación y problemas prácticos de la ingeniería. La modelización matemática aparece ya en esta contribución pero no con este nombre, pues la matemática es vista más a un nivel de herramienta. Es con Pollak y el estudio ICMI 3 en su conjunto que se reconoce que ésta es un paradigma alternativo de la formación de ingenieros, lo cual puede confirmarse en los análisis de programas de estudio analizados por Macias (2012) y Soto (2013). La modelización matemática, aunada a los pensamientos lógico, heurístico y algorítmico, aparece como la razón de ser de la formación matemática. Sin embargo, existen pocas propuestas de enseñanza que se basen en las necesidades matemáticas de las disciplinas intermediarias (formación de especialidad) y en la práctica misma. Los cursos de matemáticas parecen concebirse con objetivos de enseñanza basados en la disciplina y lejos del paradigma de la matemática vista como disciplina de servicio.

Las herramientas teóricas y metodológicas aquí presentadas intentan ser una propuesta para el diseño de actividades didácticas de modelización. El trabajo de Bissell y Dillon (2000) pone de manifiesto que la modelización matemática en la práctica de ingenieros, lejos de crear modelos, consiste en la adaptación y refinamiento de modelos tipos. Este resultado es considerado en la propuesta metodológica y se postula que el diseño de las actividades didácticas debe estar basado en el análisis de modelos en uso. El método de la BSS ha sido el primer objeto de análisis y ha permitido estudiar matrices y vectores en tanto que modelos matemáticos en uso. La colaboración con ingenieros-investigadores se ha mantenido desde el inicio del proyecto y esto ha permitido que, en el diseño de las actividades, ellos vigilen los conocimientos asociados al uso de los modelos. Puede decirse que la modelización de mezclas a través de este método puede permitir el diseño de diferentes actividades didácticas, pues existen mezclas de notas musicales, voces y señales eléctricas que pueden ser consideradas para una actividad de modelización en el aula.

Esta propuesta metodológica, y particularmente del análisis de contextos no matemáticos, implica ingresar a otras lógicas disciplinares y prácticas. El trabajo de Soto (2013) permite mostrar que no basta acercarse a una sola fuente de análisis y que los documentos producidos en y para E(DI) son fundamentales para el análisis de los modelos en uso, pues estos documentos, al tener por objetivo difundir la modelización matemática de situaciones y fenómenos, hacen explícitas tanto las tareas, como las técnicas y, sobre todo, los discursos tecnológicos teóricos y prácticos. Sin embargo, muchas de las veces los discursos teóricos matemáticos aparecen a modo de invocación: en matemáticas existe una demostración, una definición, un teorema, pero no se muestra, **sólo se invoca**. El trabajo con ingenieros resulta fundamental para que sean ellos los vigilantes epistemológicos de los conocimientos de ingeniería. Esto implica realizar este tipo de investigaciones con un equipo multidisciplinario y en ese sentido puede resultar difícil llevarlo a cabo.

Por otra parte, se reconoce que un análisis praxeológico más fino de los modelos matemáticos en uso y el diseño de las actividades con estructura praxeológica permitiría reconocer la naturaleza de las transposiciones operadas para pasar del análisis de los modelos matemáticos en uso a su enseñanza. Asimismo, se considera que otras herramientas didácticas deben ser implementadas para analizar con mayor detalle la actividad de modelización matemática que tiene lugar en el aula cuando los estudiantes enfrentan las actividades diseñadas. Las herramientas teórico-metodológicas deben pasar por varios refinamientos, pero se considera que el análisis de modelos matemáticos en uso para basar el diseño de actividades didácticas para la formación de ingenieros es una vía que debe continuarse.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Belhoste, B. (1994), "Un modèle à l'épreuve. L'Ecole Polytechnique de 1794 au Second Empire", en B. Belhoste, A. Dahan-Dalmedico y A. Picon (eds.), *La Formation Polytechnicienne, 1774-1994*, París, Dunod, pp. 9-30.

Bissell, C. y C. Dillon (2000), "Telling tales: models, stories and meanings", *For the Learning of Mathematics*, vol. 20, núm. 3, pp. 3-11.

Blum, W., P. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (eds.) (2007), *Modelling and Applications in Mathematics Education. ICMI Study Series*, Nueva York, Springer.

Bourguignon, J. P. (2001), "Mathematics and others subjects", en D. Holton (ed.), *The*

Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI *Study*, vol. 7, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 313-320.

Castela, C. y A. Romo-Vázquez (2011), "Des mathématiques a l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 31, núm. 1, pp. 79-130.

Chevallard, Y. (1999), "La recherche en didactique et la formation des professeurs: problématiques, concepts, problèmes", en J. L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot y R. Floris (eds.), *Actes de la X*e *Ecole d'été de Didactique*, Houlgate, Académie de Caen, pp. 98-112.

D'Ocagne, M. (1914), "Le rôle des mathématiques dans les sciences de l'ingénieur", en H. Fehr (ed.), *Compte rendu de la Conférence Internationale de l'Enseignement Mathématique du 1914*, París, pp. 211-222.

Escobedo, D. (2006), *Análisis acústico del llanto del niño recién nacido orientado al diagnóstico de patología en su neurodesarrollo debido a hipoxia*, tesis de doctorado no publicada, Santiago de Cuba, Universidad de Oriente.

Gil, J. y A. Díaz-Cordovés (2010), *Fundamentos de Control Automático de Sistemas Continuos y Muestreados*, San Sebastián, Unicopia.

Howson, A. G., J. P. Kahane, P. Lauginie y E. de Turckheim (eds.) (1988), *Mathematics as a Service Subject.* ICMI *Study Series*, Cambridge, Cambridge University Press.

Kent, P. y R. Noss (2002), "The mathematical components of engineering expertise: The relationship between doing and understanding mathematics", *Proceedings of the* IEE *Second Annual Symposium on Engineering Education: Professional Engineering Scenarios*, vol. 2, Londres, pp. 39/1 -39/7.

Kent, P. (2007), "Learning Advanced Mathematics: The case of engineering courses. Contribution to the NCTM Handbook chapter: Mathematics thinking and learning at post-secondary level", en F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*, Charlotte, Information Age Pub, pp. 1042-1051.

Macias, C. (2012), *Uso de las nuevas tecnologías en la formación matemática de ingenieros*, tesis de maestría no publicada, México, CICATA-IPN.

Martínez, M. (2007), *Detector de partes vocalizadas de la voz esofágica en dispositivos* FPGA, tesis de maestría no publicada, México, CIDETEC-IPN.

Pérez, M., A. Pérez y E. Pérez (2008), "Introducción a los sistemas de control y modelo matemático para sistemas lineales invariantes en el tiempo", Facultad de Ingeniería, Departamento de Electrónica y Automática, Universidad Nacional de San Juan.

Pollak, H. O. (1988), "Mathematics as a service subject – Why?", en A. G. Howson et ál. (eds.), *Mathematics as a Service Subject*, Series: ICMI Studies, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 28-34.

Romo-Vázquez, A. (2009), *Les mathématiques dans la formation d'ingénieurs*, París, IREM de Paris.

Romo-Vázquez, A., R. Romo-Vázquez y H. Vélez-Pérez (2012), "De la ingeniería biomédica al aula de matemáticas", *Revista Electrónica de Computación, Informática, Biomédica y Electrónica*, vol. 1, núm. 1. [http://recibe.cucei.udg.mx/revista/es/vol1-no1/biomedica.html]

Romo-Vázquez, R., H. Vélez-Pérez, R. Ranta, V. Louis-Dorr, D. Maquin, L. Maillard (2012), "Blind source separation, wavelet denoising and discriminant analysis for eeg artefacts and noise cancelling", *Biomedical Signal Processing and Control*, vol. 7, núm. 4, pp. 389-400.

Vergnaud, G. (1996), "Au fond de l'action, la conceptualisation", en J.-M. Barbier (ed.), *Savoirs théoriques et savoirs d'action*, París, Presses Universitaires de France, pp. 275-292.

Soto, S. (2013), *Una secuencia didáctica basada en modelación matemática*, tesis de maestría no publicada, México, CICATA-IPN.

DATOS DE LA AUTORA

Avenilde Romo-Vázquez
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada,
Instituto Politécnico Nacional, México
aromov@ipn.mx

Comité evaluador

Nombre	Institución	País
Gustavo Barallobres	Université de Québec à Montreal	Canadá
Isabelle Bloch	Université de Bourdeaux	Francia
David Block	Dirección de Investigación Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional	México
Mariana Bosch	Universidad Ramón Llull	España
Leonor Camargo	Universidad Pedagógica Nacional	Colombia
Corine Castela	Université de Rouen	Francia
María Fernanda Delprato	Universidad de Córdoba	Argentina
Juan Díaz Godino	Universidad de Granada	España
Conceiçao Ferreira-Reis-Fonseca	Universidade de Minas Geraes	Brasil
Fernando Flores	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Rosa del Carmen Flores	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Leticia Gallegos	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Rosa María González	Universidad Pedagógica Nacional	México
Fernando Hitt	Université de Quebec à Montreal	Canadá

Nombre	Institución	País
Eduardo Mancera	Colegio Nacional de Matemáticas	México
Rita Otero	Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil	Argentina
Ana Isabel Sacristán	Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional	México
Irma Sáiz	Universidad Nacional del Nordeste	Argentina
Ernesto Sánchez	Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional	México
Armando Solares	Universidad Pedagógica Nacional	México
Diana Solares	Universidad Autónoma de Querétaro	México
Manuel Santos Trigo	Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional	México

Política editorial

La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA es una publicación internacional arbitrada que ofrece un foro académico para la presentación y discusión de ideas, conceptos, propuestas y modelos que puedan contribuir a la comprensión y la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diversos contextos y latitudes. La revista aparece tres veces al año y publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática. Adicionalmente, difunde reseñas y contribuciones para la docencia en matemáticas.

OBJETIVOS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA se propone:

- Actuar como un foro académico internacional en lengua española en el que se discutan problemáticas y hallazgos en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diferentes contextos.
- Facilitar la comunicación entre investigadores, estudiantes de posgrado y maestros de matemáticas.
- Promover la investigación en educación matemática en los países iberoamericanos.
- Colaborar en la comprensión de la naturaleza, la teoría y la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

LECTORES

EDUCACIÓN MATEMÁTICA está dirigida a investigadores de la educación matemática, maestros en formación y en ejercicio, estudiantes de posgrado, diseñadores de programas y proyectos educativos, evaluadores, administradores y cuadros técnicos vinculados con la educación matemática.

PRINCIPALES TEMÁTICAS

El contenido de EDUCACIÓN MATEMÁTICA se orienta principalmente a los siguientes temas:

- Educación matemática en el nivel básico.
- Educación matemática en el nivel preuniversitario.
- Educación matemática en el nivel universitario.
- Los sistemas educativos y las políticas educativas en educación matemática.
- Saberes matemáticos y procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en contextos no escolares.
- Historia y epistemología de las matemáticas y de la educación matemática.

INFORMACIÓN PARA LOS AUTORES

- La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica artículos de investigación y otras contribuciones (ensayos, reseñas y contribuciones para la docencia) en español, en las temáticas enlistadas en esta Política Editorial.
- Todos los escritos que se reciben se someten a un proceso de evaluación doble-ciego.
- El Comité Editorial, con base en los resultados de la evaluación de los escritos, se reserva el derecho de aceptar o rechazar un material o hacer sugerencias de corrección para su publicación.
- El Comité Editorial y el Consejo Mexicano de Investigación Educativa tendrán los derechos de publicación de los artículos aceptados, para lo cual el autor debe firmar una licencia de publicación no exclusiva que se hará llegar a los autores una vez aprobada la publicación.

PREPARACIÓN DE LOS ESCRITOS

La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica los artículos en español y, eventualmente, artículos de investigación en portugués.

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN:

- Deberán tener originalidad y rigor, y mostrar, explícitamente, el aparato conceptual y metodológico utilizado.
- Prepararse electrónicamente, en *Word* o en algún otro procesador compatible.
- Deberá tener un máximo de 10 000 palabras, incluidas notas, referencias bibliográficas, tablas, gráficas y figuras. Se recomienda ampliamente que en total la extensión del artículo no sea mayor a 30 cuartillas.

- Deberá incluir, también, un resumen de entre 150 y 180 palabras en el idioma en que se haya escrito el artículo (español o portugués). Además, se incluirá una versión en inglés o francés del resumen, y cinco palabras clave en los dos idiomas elegidos.
- En archivo aparte, deberá prepararse una carátula que contenga: *a)* título del artículo; *b)* declaración de que el material es original e inédito y que no se encuentra en proceso de revisión para otra publicación (debe mencionarse, explícitamente, si el material ha sido presentado previamente en congresos y ha aparecido de manera sintética [máximo seis cuartillas] en las memorias del mismo), y *c)* el nombre, institución de adscripción, dirección electrónica, teléfono, domicilio completo (incluyendo código postal) del autor o los autores.
- Las figuras, tablas e ilustraciones contenidas en el texto deberán ir incluidas en el archivo del escrito. En caso de que el artículo sea aprobado, se enviarán en blanco y negro las fotografías o ilustraciones en formatos .jpg, .tif o .eps, insertos en el documento y también en archivo aparte, con una resolución mínima de 300 dpi.
- Deberá evitarse el uso de siglas, acrónimos o referencias locales que no sean conocidas por un lector internacional; si éstas se utilizan, deberá explicitarse su significado a pie de página, la primera vez que aparezcan.
- Las referencias dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas (Freudenthal, 1991, p. 51).
- Al final del artículo se debe incluir la ficha bibliográfica completa de todas las referencias citadas en el texto de acuerdo con el siguiente modelo.

Briand, J. (2011), "El lugar de la experiencia en la construcción de las matemáticas en clase", *Educación Matemática*, vol. 23, núm. 1, pp. 5-36.

Fuenlabrada, I. (compiladora) (2008), *Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg,* México, DIE-CINVESTAV/COMIE/UPN.

Stigler, J. W. y J. Hiebert (1999), *The Teaching Gap. Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*, Nueva York, Free Press.

Moreno, L y J. Kaput (2005), "Aspectos semióticos de la evolución histórica de la aritmética y el álgebra", en M. Alvarado y B. Brizuela (compiladoras), *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia,* México, Paidós (Col. Educador 179).

Hernández, S. y H. Jacobo (2011), "Descripción de algunas tesis de maestría en

educación matemática", *Revista Electrónica de Investigación Educativa,* vol. 13, núm. 1. Consultado el 28 de marzo de 2012 en: http://redie.uabc.mx/vol11no1/contenido-hdezjacobo.html

ENSAYOS

Educación matemática publica ensayos de alta calidad con un máximo de 6 000 palabras (y 12 cuartillas incluyendo imágenes y bibliografía), que aborden de manera rigurosa y original algún tema relevante en el campo de la educación matemática. A diferencia de los artículos, los ensayos implican la interpretación de un tema desde el punto de vista del autor, sin que sea necesario explicitar el aparato metodológico o documental específico que lo sustenta, ni aportar datos empíricos. Los ensayos se someten al mismo proceso de arbitraje que los artículos de investigación.

CONTRIBUCIONES PARA LA DOCENCIA

Educación matemática considera para su publicación un número limitado de contribuciones para la docencia, consistentes en propuestas originales de presentación de un tema, acercamientos novedosos que hayan sido probados en clase, lecciones, prácticas, ejercicios, puntos de vista sobre algún material educativo y, en general, cualquier producto de la experiencia en el aula o de planeación de proyectos en educación matemática que se considere valioso compartir con los docentes de los distintos niveles educativos. Las contribuciones para la docencia no deberán exceder 4 000 palabras o 10 cuartillas incluyendo tablas, gráficas y figuras, y deberán enviarse en formato Word, con los mismos lineamientos que para la presentación de artículos.

RESEÑAS

Educación Matemática publica también reseñas de libros especializados, libros de texto, *software*, tesis de doctorado y eventos relevantes relacionados con las temáticas de la revista y que hayan aparecido recientemente. Las reseñas deben expresar el punto de vista de su autor; es decir, que no serán meramente descriptivas, y no excederán 2 000 palabras. Asimismo, deben incluir la ficha completa del texto o *software* reseñado; el nombre, institución de adscripción y el correo electrónico del autor. En el caso de las reseñas de tesis de doctorado, se incluirá también el grado, institución, director de tesis y fecha de defensa.

PROCESO DE ARBITRAJE

Aspectos generales

Todos los manuscritos recibidos están sujetos al siguiente proceso de arbitraje.

El Comité Editorial hace una primera revisión del manuscrito para verificar si cumple los requisitos básicos para publicarse en Educación Matemática. Esta revisión interna se realiza en un plazo aproximado de un mes. En este término, se notificará por correo electrónico al autor si su manuscrito será enviado a evaluadores externos. En el caso en el que el manuscrito no se considere adecuado para su eventual publicación en Educación Matemática, se expondrán, por escrito, las razones al autor.

Artículos y ensayos

Las contribuciones que cumplan los requisitos básicos para ser evaluados serán enviadas para arbitraje doble-ciego de al menos dos expertos en el tema. Este proceso de arbitraje se realizará en un plazo máximo de tres meses. Después de este periodo, el autor recibirá los comentarios de los revisores y se le notificará la decisión del Comité Editorial: Aceptado en su versión original, Aceptado con modificaciones menores, Aceptación condicionada a incorporación de modificaciones mayores, o Rechazado.

El autor deberá responder electrónicamente si está de acuerdo o no en elaborar una segunda versión de su contribución, incorporando los cambios propuestos. La versión revisada, que incluya una relación de los cambios efectuados, deberá enviarse en un periodo no mayor de tres meses. Si el autor o autores envían su segunda versión en un plazo mayor al estipulado, el escrito será considerado como Nueva contribución, y se reiniciará el proceso de arbitraje.

En e l caso en que un árbitro apruebe una contribución con modificaciones menores y otro la rechace, la contribución se enviará a un tercer revisor. Prevalecerá la opinión de dos, de los tres árbitros.

Contribuciones para la docencia

Las contribuciones para la docencia se someten a un proceso de arbitraje en el que participan como árbitros un miembro del Comité Editorial y un árbitro externo. Los plazos del proceso son los mismos que para los artículos y los ensayos. En caso de discordancia en las evaluaciones, se seguirá un proceso similar al de artículos y ensayos.

Reseñas

Las reseñas son evaluadas por un miembro del Comité Editorial y el resultado de su evaluación se comunica al autor una vez que haya sido discutido en el pleno del Comité Editorial. Para hacer la evaluación, en este caso, se consideran la actualidad y relevancia del objeto de la reseña y la calidad de la perspectiva personal que el autor incorpora en su escrito.

ENVÍO DE LOS ESCRITOS

Los escritos deberán enviarse en archivo electrónico a la siguiente dirección electrónica: revedumat@yahoo.com.mx.

Precio del ejemplar en papel	Institucional	Personal
Número normal	$500.00 más gastos de envío	$250.00 más gastos de envío
Número especial	$300.00 más gastos de envío	$150.00 más gastos de envío

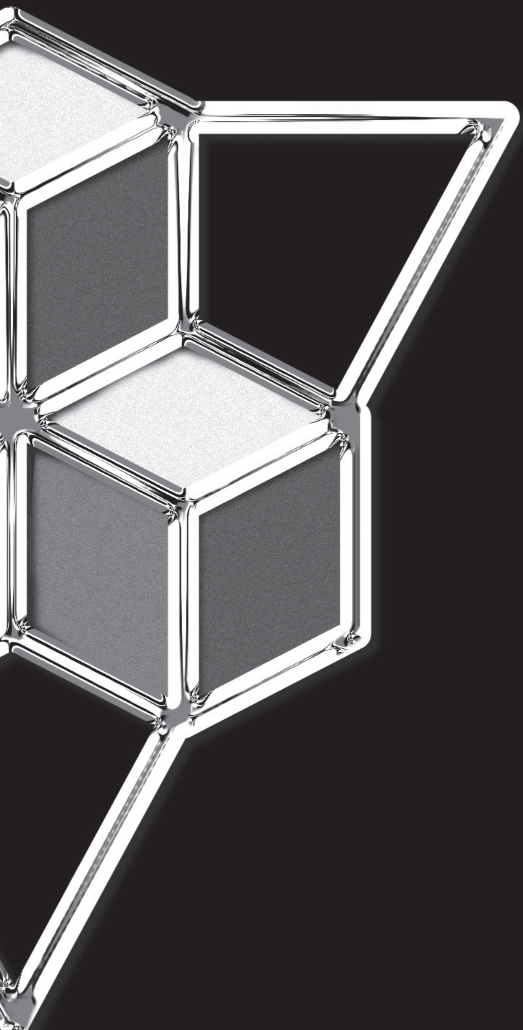
Educación Matemática

Se terminó de imprimir en los talleres
de Alta Resolución, S. A. de C. V.,
en el mes de marzo de 2014.
Tel.: (55) 1497-3970

Se imprimieron 100 ejemplares
más sobrantes para su reposición.

Colaboradores internacionales

- *Michele Artigue*, Université Paris 7, IUFM de Reims y equipo DIDIREM, Francia
- *Carmen Azcárate*, Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales, España
- *Luis Balbuena*, Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas, España
- *Sergio Ballerteros Pedrozo*, Universidad Pedagógica Enrique José Varona, Cuba
- *Edgar José Becerra Bertram*, CENEVAL, México
- *Carlos Bosch*, Instituto Tecnológico Autónomo de México, Departamento de Matemáticas, México
- *Alberto Camacho Ríos*, Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México
- *José Contreras Francia*, University of Southern Mississipi, Estados Unidos
- *César Cristóbal Escalante*, Universidad de Quintana Roo, México
- *Miguel de Guzmán*, Universidad Complutense de Madrid, España
- *José Ángel Dorta Díaz*, Universidad de La Laguna, Departamento Análisis Matemático, España
- *Daniel Eudave Muñoz*, Universidad Autónoma de Aguascalientes, Departamento de Educación, México
- *Eugenio Filloy Yagüe*, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *Alfinio Flores Peñafiel*, Arizona State University, Estados Unidos
- *Grecia Gálvez*, Ministerio de Educación de Chile, Chile
- *Jesús Roberto García Pérez*, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Departamento de Matemática Educativa, México
- *Fredy González*, Instituto Pedagógico de Maracay, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Venezuela
- *Ángel Gutiérrez*, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia, España
- *Nelson Hein*, Universidade Regional de Blumenau, Brasil
- *José Ramón Jiménez*, Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas, México
- *Moisés Ledesma Ruiz*, Escuela Normal Superior de Jalisco, México
- *Antonio Jose Lopes*, Centro de Educaço Matematica, Brasil
- *Eduardo Luna*, Barry University, Department of Mathematics and Computer Science, School of Arts and Sciences, Estados Unidos
- *Bertha Alicia Madrid Núñez*, Universidad Iberoamericana, México
- *Armando Martínez Cruz*, Californa State University Fullerton, Estados Unidos
- *Jorge Martínez Sánchez*, Universidad Iberoamericana, México
- *Leonel Morales Aldana*, Universidad de San Carlos de Guatemala, Guatemala
- *Luis Enrique Moreno Armella*, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *María del Rocío Nava Álvarez*, Instituto de Educación del Estado de México, México
- *Josefina Ontiveros Quiroz*, Universidad Autónoma de Querétaro, Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas, México
- *Fidel Oteiza*, Universidad de Santiago de Chile, Departamento de Matemática y Ciencias de la Computación, Chile
- *François Pluvinage*, Universidad de Estrasburgo, Francia
- *Ángel Ruiz*, Universidad de Costa Rica, Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, Costa Rica
- *Luisa Ruiz Higueras*, Universidad de Jaén, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Fac. de Ciencias de la Educación, España
- *María Teresa Rojano Ceballos*, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *Jorge Sagula*, Universidad Nacional de Luján, Departamento de Ciencias Básicas, División Matemática, Argentina
- *Patrick Scott*, University of New Mexico, Estados Unidos
- *Isabel Soto*, Centro de Investigación y Desarrollo de la Educación, Chile
- *Guadalupe T. de Castillo*, Universidad de Panamá, República de Panamá
- *Santiago Valiente Barderas*, Escuela Normal Superior de México, México



www.revista-educacion-matematica.com