FRAGMENTOS DE HISTORIA DE LA TEORIA GENERAL DE MODELOS : DE BOLZANO A ROBINSON (1837-1974).

J.M.LARRAZABAL
UPV / EHU

Resulta necesario delimitar con suficiente precisión lo que entendemos por teoría general de modelos. Habitualmente la teoría de modelos se define, en términos generales, como la teoría lógico-matemática que trata de la relación de interpretación de lenguajes formales por estructuras (relacionales) matemáticas. Si particularizamos esta definición al caso de los lenguajes formales construidos en los límites de la lógica de predicados de primer orden con identidad, podemos entonces hablar de la teoría general de modelos.

Si la caracterización que hacen Chang y Keisler de la teoría de modelos, como "suma" del álgebra universal más la lógica, restringe excesivamente la teoría, por lo que a la utilización de los medios matemáticos se refiere, un acertado modo pragmático de fijar suficientemente los límites de la teoría puede consistir en aceptar en su interior, pongamos por caso, los campos temáticos especificados bajo el epígrafe C de la Sección 03 de la clasificación temática de Matemática (1980) de la American Mathematical Society (o los campos temáticos especificados en cualquier sistema equivalente a éste). Conviene añadir, en todo caso, que un trabajo,para que sea considerado como relativo a la teoría de modelos, debe hacer un uso "esencial" (en el sentido de ADDISON(1965) tanto de los lenguajes formales como de las estructuras matemáticas que los interpretan, de manera que el carácter semántico-matemático de la teoría lo distinga claramente de las teorías matemáticas específicas.

La interpretación de un lenguaje formal lógico-predicativo por estructuras relacionales de determinado tipo(de similaridad) tiene como objetivo el establecimiento del concepto de satisfacción de una fórmula cualquiera del lenguaje por una sucesión de elementos del dominio de una estructura fijada y, de ahí, del concepto de enunciado (fórmula cerrada) verdadero en determinada estructura, esto es, del concepto de modelo de un enunciado arbitrariamente dado del lenguaje formal en cuestión (y, por simple extensión, del concepto de modelo de un conjunto cualquiera de enunciados del lenguaje formal considerado).

El texto que desde su publicación viene siendo considerado como el manual básico de teoría de modelos (CHANGKEISLER (1973) ilustra el carácter de los teoremas de la teoría, señalando tres ejemplos : el teorema de Löwenheim 1915, el teorema de compacidad de Gödel 1930 y Mal´cev 1936 y, finalmente, el teorema de categoricidad de Morley 1965. Los tres teoremas establecen (dicho en los términos de Chang y Keisler) algo negativo por lo que concierne al "poder de expresión" de la lógica de predicados de primer orden. Es decir, los tres teoremas mencionados vienen a marcar límites a la semántica del lenguaje formal lógico-predicativo, al tiempo que en la demostración de los mismos nos vemos obligados a elaborar métodos de construcción de los modelos adecuados a cada caso. No es, pues, otro el cometido de la teoría de modelos : determinación de técnicas de construcción (en el sentido amplio del término) de modelos y señalamiento de límites a la potencia expresiva de los lenguajes formales.

Los orígenes de la teoría de modelos se sitúan en las investigaciones de metalógica del segundo decenio del presente siglo (el teorema de Löwenheim 1915 y la extensión correspondiente de Skolem 1920), siendo obligado reconocer el momento fundacional de la teoría en el célebre artículo de Tarski 1933 (presentado por Lukasiewicz a la Sociedad de Letras y Ciencias de Varsovia en 1931; traducido al alemán en 1936), continuación de sus trabajos de Seminario durante 1926-1928 en la Universidad de Varsovia, aunque la manifestación teorética plena no tenga lugar hasta las contribuciones de Tarski 1954-1955 a la Sección de Ciencias de la Akademie van Wetenschappen de Amsterdam (donde se emplea por vez primera el términó "teoría de modelos" y en su mayor parte se recogen los resultados obtenidos por el autor en 1949-1950 y discutidos en el seminario de otoño de 1950 en la Universidad de Berkeley). Ahora bien, no cabe duda de que "avant la lettre" (esto es, "avant le sujet") hay que considerar a toda una tradición lógica-algebraico-semántica iniciada por Boole y De Morgan y desarrollada por Peirce y Schröder, tradición que tiene lugar en paralelo a las investigaciones primariamente lógico-sintácticas de Frege, Peano y Russell (van HEIJENOORT (1967).

Löwenheim reconoce en sus notas autobiográficas que su inicio en la lógica fue a través de los escritos de Schröder (VAUGHT (1974)), principalmente de "Vorlesungen über die Algebra der Logik (1890-1905). También es sabio que Schröder conoció y apreció la "Wissenschaftslehre" (1837) de Bolzano, siendo precisamente en esta obra donde encontramos por vez primera un concepto riguroso de "interpretación" aplicado a la idea de "consecuencia lógica", si bien no para un lenguaje formal, como es el caso de Tarski 1936. Conviene, por tanto, comenzar la "prehistoria" de la teoría de modelos haciendo referencia a Bolzano y Schröder.

BERKA und KREISER (1963), al destacar el carácter de Bolzano como precursor de los trabajos que independientemente llevaron adelante Gentzen y Tarski, afirman que la aportación más importante de Bolzano radica en sus investigaciones sobre la derivabilidad y la consecuencia. Veamos, pues, cómo define la relación de "derivabilidad". Bolzano, seguidor de Leibniz y crítico de la analítica kantiana, define la lógica como teoría de la ciencia, esto es, como "La ciencia que se ocupa de la "representación" de las ciencias en tratados adecuados"[1]. No sólo es lo que se entiende por lógica formal, sino que su campo se extiende al "conjunto de todas las reglas que deben seguirse para la división del dominio de las verdades en ciencias específicas y para su representación en sus respectivos tratados"[1]. Este objetivo de clasificación y organización de las ciencias anima la obra de Bolzano, quien considera a la ciencia como un conjunto de verdades objetivas, es decir, como un conjunto de proposiciones-en-si verdaderas, haciendo que la lógica se separe de todo interés retórico o psicológico. (Digamos de paso que este aspecto es importante por la influencia que ejerció más tarde. Así, Husserl, que conoció la obra de Bolzano a través de Franz Brentano, señala la influencia de aquél en la perspectiva antipsicologista del primer volumen de las Investigaciones Lógicas, llegando a afirmar que Bolzano "debe ser considerado como uno de los más grandes lógicos de todos los tiempos" y asimismo que "la lógica como ciencia ha de edificarse sobre la obra de Bolzano; en ella ha de aprender lo que necesita : rigor matemático en las distinciones, exactitud matemática en las teorías".) La utilización de los términos Sätze (Sätze-an-sich) y Satzformen, en vez de Urteile y Urteilsformen, indica claramente la pretensión de objetividad y el rechazo del psicologismo en Bolzano. Por otro lado, Bolzano confiesa que nunca ha llegado a descubrir sentido alguno en la definición de la lógica por parte de Hegel y que lo mismo le sucede con Schelling y, en parte, con Fichte.

Ciñiéndose a su teoría de la deducibilidad, Bolzano define la relación de consecuencia entre proposiciones("derivabilidad" en su terminología) del modo siguiente : "Digo que las proposiciones M,N,O,... son de rivables de las proposiciones A,B,C,D,..., con respecto a las partes variables i,j,...,si todo conjunto de ideas cuya sustitución en lugar de i,j,...,hace de A,B,C,D,..., verdaderas,también hace de M,N, O,...,verdaderas. Para variar, a veces, siguiendo lo usual, diré que las proposiciones M,N,O,...,se siguen, pueden ser inferidas o derivadas, del conjunto de las proposiciones A,B,C,D,...; a las proposiciones A,B,C,D,..., las llamaré premisas; a las M,N,O,... conclusiones" (155.a.2).No entraremos aquí en el análisis de esta definición ni en la comparación con otra relación entre proposiciones definida por Bolzano, precisamente la relación de fundamento u origen (Abfolge), que sólo se da entre proposiones verdaderas. Unicamente compararemos la definición de consecuencia (derivabilidad) de Bolzano con la que proporciona Tarski en 1936 : "El enunciado X se sigue logicamente de los enunciados de la clase K si y sólo si todo modelo de la clase K es también un modelo del enunciado X".

La definición de Bolzano es, por un lado, más amplia que la de

Tarski, por cuanto que no hay una clara distinción entre los componentes lógicos y los extralógicos de las proposiciones y, además, por esa referencia en el concepto de derivabilidad a algún conjunto variable de ideas, lo que imposibilita, a falta de una neta diferencia entre lo formal y lo material, una clasificación de los esquemas válidos de inferencia, de modo que su propuesta de los diversos tipos de argumentos válidos no tiene relevancia. Ahora bien, la diferencia más importante entre ambas definiciones radica en que en la definición de Tarski si no existe modelo ninguno de la clase K, el definiens resulta verdadero y, por tanto, X se sigue lógicamente de K (es decir, de un conjunto contradictorio de premisas se sigue una proposición cualquiera), mientras que en el caso de Bolzano, debido a su concepción de las proposiciones universales afirmativas (a las que considera falsas -no simplemente indeterminadas-, si los términos que las componen no tienen referencia), si no existe conjunto ninguno de ideas cuya sustitución en lugar de i,j,...,haga verdaderas a A,B,C,D,..., entonces el definiens resulta falso. Dicho de otra manera, para Bolzano nada se sigue de un conjunto contradictorio de premisas. Más aún, puede afirmarse que una proposición es consecuencia de unas premisas en el caso de que entre aquella y éstas no haya componentes (de ideas) comunes y simplemente aquella sea verdadera, independientemente de que lo sean éstas.

Aunque la definición de Bolzano prefigure la de Tarski, es esta última la que sirve de base al estudio de la deducibilidad en teoría de modelos, debido a las ventajas arriba señaladas para el lenguaje matemático. (Hay quien defiende que la definición de Bolzano presenta ciertas ventajas para una semántica formal del lenguaje natural).

Schröder hace de puente hacia Löwenheim. La sistematización de la lógica que, en la línea de Jevons y Peirce, lleva a cabo en las "Vorlesungen", tiene gran importancia para la lógica algebraica posterior y, en particular, para la teoría de modelos. Schröder, al igual que Peirce, considera conjuntos de individuos donde quedan definidas (interpretadas) las propiedades y relaciones (predicados) de las fórmulas del lenguaje de la lógica, dejando de lado el interés por las demostraciones en sistemas formales. En lo que concierne a la lógica proposicional, Schröder establece, vía teorema de dualidad, su estructura algebraico-booleana, proporcionando los axiomas de la teoría de retículos y de la de álgebras booleanas. Asimismo, en la lógica de predicados, el tratamiento que da a los cuantificadores existencial y universal, interpretándolos respectivamente como disyunciones y conjunciones en el dominio de los individuos (siguiendo en ello a Peirce), permitirá distinguir netamente la diferencia de complejidad entre la lógica de orden superior y la de primer orden, concentrando sus esfuerzos en esta última, lo cual a su vez será esencial para el origen y el desarrollo inicial de la teoría de modelos. Debemos también citar la prefiguración de las "funciones de Skolem" por parte de Schröder, a quien expresamente citan Löwenheim 1915 (usando además notación y terminología schröderianas) y Skolem 1920. Hay que buscar la razón de estas aportaciones de Schröder en su marcado interés por el álgebra de la lógica de relaciones.

Löwenheim 1915 constituye el inicio de la teoría de modelos. Tomando como objeto de estudio la lógica de primer orden con identidad, en la sección primera de su papel utiliza (sin previa definición, dándolos por sabidos) los conceptos semánticos básicos de interpretación, satisfactibilidad y validez, clasificando las fórmulas en válidas ("ecuaciones idénticas"),n-válidas para n finito y no-válidas para algún n finito. El teorema 2 de la sección segunda es el que a nosotros nos interesa. Dice así : "Si el dominio es al menos infinito enumerable, entonces una fórmula de primer orden n-válida no es ya satisfecha para valores arbitrarios de los coeficientes relacionales (en tal dominio)". Es decir, en terminología actual, si una fórmula de la lógica elemental finitivamente válida no es válida, entonces no es $\aleph_0$-válida. O, equivalentemente, si una fórmula finitamente válida es $\aleph_0$-válida, entonces es válida. No vamos a entrar en el análisis de la demostración de este teorema. Unicamente indicaremos que, a pesar de sus omisiones y lagunas, las innovaciones introducidas por Löwenheim van a convertirse más tarde en instrumentos semánticos de uso común. Citaremos la reducción de una fórmula a formas normales prenexas, la prefiguración de las funciones de Skolem y de las expansiones de Herbrand y la utilización de una forma especial del lema de infinitud de König. Löwenheim aplica el teorema al cálculo de clases de Schröder, Muller y Huntington(que es un pequeño fragmento de la teoría de conjuntos), estableciendo que la cuestión de la "dependencia o independencia" de sus axiomas, supuesta decidible, lo es en un dominio enumerable. Otras aportaciones de Löwenheim en este papel son la solución positiva al problema de decisión de la lógica de primer orden con identidad y únicamente con predicados monádicos (sección tercera del papel) y asimismo la reducción del problema de decisión de la lógica elemental con predicados n-ádicos para $n\geq 2$ al caso de la lógica elemental con predicados diádicos.

Skolem 1920, en su sección primera, tras definir lo que con posterioridad se denominarán las formas normales de Skolem, proporciona una demostración totalmente correcta del teorema de Löwenheim, haciendo uso no obstante del axioma de elección, que no será eliminado para la demostración de dicho teorema hasta Skolem 1929. Conviene destacar la generalización que Skolem 1920 hace del teorema de Löwenheim a un conjunto infinito enumerable de enunciados y asimismo el establecimiento, utilizando el axioma de elección, de una forma más fuerte del teorema de Löwenheim que, en terminología actual dice que "si un conjunto Σ de enunciados (de primer orden) tiene un modelo $\mathfrak{A}$, entonces Σ tiene un modelo enumerable $\mathfrak{A}'$ que es submodelo de $\mathfrak{A}$ ". El teorema de Löwenheim es demostrado en su forma original sin recurrir al axioma de elección en Skolem 1922, donde se hacen aplicaciones a la teoría axiomática de conjuntos (llegando a la denominada "paradoja de Skolem"), se propone el axioma de remplazamiento -Fraenkel 1921- y se abren las vías para los modelos no-standard de la aritmética (Skolem 1933 y 1934). Skolem 1928 se acerca a la cuestión de la completud, pero, a falta de una concepción explícita de la idea de sistema formal, queda sin poder superar este obstáculo.

Hilbert-Ackerman 1928 plantea el problema de la completud semántica de la lógica lemental como un problema abierto (solucionado ya por Post 1920 para la lógica proposicional). Dos años más tarde la tesis doctoral de Gödel 1930 ofrece la demostración del teorema de completud para la lógica elemental. Desde la perspectiva que aquí nos interesa, es obligado destacar el teorema de compacidad de la lógica elemental (teorema X del papel de 1930 (que recoge la tesis doctoral) debido a Gödel. Dice así : "Para que un sistema infinito de fórmulas sea satisfactible es condición necesaria y suficiente que todo subsistema finito sea satisfactible". Mal'cev 1936, sin conocer el trabajo de Gödel 1931 ni el teorema de representación de Stone 1936, estableció la compacidad para la lógica proposicional con un lenguaje infinito cualquiera y, aunque no logró la forma general del teorema X de Gödel 1930, llegó a formular formas especiales de la compacidad para la lógica elemental. Conviene subrayar Mal'cev 1941 por las aplicaciones que de la compacidad hace el álgebra.

El teorema de compacidad va a jugar un papel muy relevante en la teoría general de modelos. Recuérdese que, junto al teorema de Löwenheim-Skolem,caracteriza (teorema de Lindström) semánticamente a la lógica de primer orden. Además , la lectura topológica del teorema de compacidad aplicada a espacios de teorías va a permitir, junto con otros recursos topológicos, la resolución de la conjetura de 1954 por Morley 1965 (tesis doctoral de 1962), dando un gran impulso a la teoría de la categoricidad (concepto éste introducido por Veblen en 1904).

No cabe duda de que la teoría general de modelos emerge definitivamente (aún sin el nombre) con los trabajos iniciados por Tarski alrededor de 1926. Durante los cursos académicos 1926-1928 en el seminario de lógica que Tarski dirige en la Universidad de Varsovia se pone a punto de eliminación de los cuantificadores, consiguiendo aplicarlo a teorías formales diversas (teoría de los ordenes discretos, aritmética aditiva (Presburger 1930), cuerpos reales cerrados, etc,). Este método será aplicado con posterioridad a la teoría de las álgebras booleanas (Tarski 1949), a la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados (Tarski 1948), a la teoría de los modelos bien ordenados (Mostowski y Tarski 1949),etc.,dando paso al estudio de cuestiones como las de la completud sintáctica (respecto de la negación) y de la decidibilidad para algunas teorías formales, sin que resultara aplicable a un gran número de teorías matemáticas básicas por ser indecidibles; por ejemplo, la teoría de números, la teoría de conjuntos, la teoría de grupos o la de cuerpos,etc. En todo caso, este estudio permitió llegar a conceptualizar nociones como las de extensión, extensión completa de una teoría, equivalencia y equivalencia elemental entre estructuras correspondientes a un lenguaje formal lógico-predicativo dado.

Aunqué no quedó constancia escrita de ello, Tarski en su seminario de 1928 llegó a establecer el teorema ascendente de Löwenheim-Skolem, que es debido a Mal´cev 1936. Asimismo Tarski 1931 se adentró en las cuestiones de definibilidad, que tanta relevancia cobraron más tarde (Tarski 1952) para poder definir en términos puramente matemáticos ciertos conceptos semánticos básicos.

El desarrollo de estos trabajos (además de otros intereses filosóficos) obligó a Tarski a ocuparse en la precisión de una noción indefinida e intuitiva como era la de verdad. No hace falta insistir en la importancia que a este respecto tiene el célebre papel de Tarski 1933(traducción alemana en 1936). El concepto de verdad quedaba así formulados en el marco de la matemática ordinaria (teoría de conjuntos ZF) y permitía asentar la teoría de modelos sobre una sólida base conjuntivista. Si, junto a Tarski 1933, tenemos en cuenta a tarski 1936, donde se define el concepto de consecuencia lógica, tendremos que afirmar que en estas fechas quedaron fijados los cimientos de la teoría de modelos, provocando de inmediato un considerable caudal de implicaciones tanto en el terreno matemático como en el filosófico. Ejemplos en uno y en otro pueden ser Mostowski 1937 en topología y Carnap 1942 en semántica.

En estos comienzos de la teoría general de modelos, precisamente en la frontera entre el álgebra y la semántica lógica, conviene citar a Birkhoff 1935, po su influencia en el desarrollo del álgebra universal a partir de la postguerra y el efecto que los procedimientos algebraico-universales tendrán en la evolución de la teoría de los modelos. Asimismo hay que citar a Mal'cev 1941, por su perspectiva de aplicación de los resultados modelísticos al Álgebra.

Siguiendo la periodización propuesta por MACINTYRE (1980), con el límite que nos hemos impuesto en 1974 (año de la muerte de A.Robinson), distinguimos tres periodos :(a) 1945-1955; (b) 1955-1968; (c) 1968-1974 (CHANG (1974)).

(a) Señalemos brevemente los papeles más importantes en las diversas direcciones que toma la teoría general de modelos. En teoría de la definibilidad, Beth 1953 establece el teorema converso al fijado por el método clásico de Padoa. Por otro lado, con la nueva demostración de la completud de la lógica elemental en Henkin 1949 se pone en marcha el método de construcción de modelos mediante constantes (método de diagramas), que tiene continuación en Robinson 1951.

Sobre la base de los trabajos de Birkhoff aparecen los primeros teoremas de preservación. Así Tarski 1954 y 1955 (los enunciados preservados por subestructura son equivalentes a enunciados universales). Nótese que en Tarski 1954 se utiliza por vez primera el término "teoría de modelos". Además Horn 1951, Mostowski 1952 y Vaught 1954 se ocupan de la preservación por productos directos, de modo que resulta demostrado que la teoría de un producto de dos estructuras depende sólo de las teorías respectivas de ambas estructuras. Tarski 1952 y Fraïssé 1954 proporcionan las bases de la teoría de las clases elementales ("clases aritméticas") y pseudoelementales de estructuras. 1954 y Vaught 1954 permiten llegar al test de Vaught para determinar si una teoría es completa.

Merece indicación especial Robinson 1951 por su interés en lograr resultados positivos para el Álgebra mediante el recurso a la teoría de modelos. En particular, hay que citar sus estudios de generalización de determinados conceptos algebraicos (extensión algebraica, cierre algebraico, etc.) y sobre la completud de la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de carecterística dada.

(b) Mencionemos en primer lugar los teoremas de interpolación de Craig 1957 y Lyndon 1959, así como el teorema de consistencia conjunta de Robinson 1956, que se vinculan con los teoremas de preservación correspondientes. Además entre éstos señalemos el de preservación por uniones de cadenas, Suszko 1957 y Chang 1959, quedando establecido que los enunciados preservados por límites directos son equivalentes a enunciados universal-existenciales. Señalemos también los teoremas de definibilidad de Vaught 1964 y Makkai 1964.

En la línea de Mostowski 1952 citemos a Feferman-Vaught 1959, donde se consideran productos generalizados de estrucutras, con aplicaciones de interés para sistemas algebraicos, así como Keisler 1965, donde se consideran productos reducidos de estructuras. La cuestión de la $\aleph_0$-categoricidad es estudiada por Engeler 1959, Ryll-Nardzewski 1959 y Svenonius 1959.

Entre las potentes técnicas que se desarrollan en este periodo, merece ser citada especialmente la de los ultraproductos. 1955 está en su origen y mediante los papeles de Keisler 1961,1964 y 1965,Frayne-Morel-Scott 1962 y Chang 1967 esta técnica ha permitido grandes simplificaciones, gracias a la utilización de diversos tipos de ultrafiltros.

La conjetura de 1954 ha estado en la base de importantes resultados. Por un lado, la puesta en marcha del método de los indiscernibles por Ehrenfeucht-Mostowski 1956 para la generación de modelos, hasta llegar al teorema de omisión de tipos en Vaught 1961, con aplicaciones a los modelos saturados y especiales en Morley-Vaught 1962 y a los modelos primos en Vaught 1961 y Morley 1965. Por otro lado, los estudios sobre categoricidad que solucionan la conjetura de en Morley 1965, abriendo paso a lo que en el decenio siguiente comenzará a conocerse como teoría de la estabilidad.

Es preciso indicar también los trabajos sobre modelos ordenados en Fuhrken 1965 y Keisler 1968. Asimismo a partir de 1960 Robinson inicia sus trabajos en análisis no-standard, Robinson 1966, con implicaciones que van más allá del análisis hacia otras teorías matemáticas.

(c) Puesto que sólo consideramos la teoría clásica de modelos, dejamos de lado los estudios de semántica lógica que se hacen sobre extensiones de lógica elemental clásica. Indicamos las generalizaciones de los teoremas de interpolación y de definibilidad en Kueker 1970 y Chang 1971, el desarrollo de la técnica de los ultrafiltros buenos en Kunen 1972, de los ultrafiltros regulares en Chang 1972 y Prikry-Jensen 1972 y de los ultrafiltros descendientemente completos en Kunen-Prikry 1971 y Prikry 1973.

Con especial fuerza surge la técnica de construcción de modelos genéricos(finita o infinitamente genéricos), mediante el forzamiento de Robinson 1971, definido sobre el patrón del forzamiento de Cohen para teoría de conjuntos. El forzamiento finito y el infinito vienen a resultar instrumentos muy poderosos para analizar los conceptos de modelo-completud y de compañera-completud en el caso de las teorías algebraicas.

Finalmente es obligado citar por un lado los trabajos de Shelah en teoría de la clasificación y de la estabilidad a partir de 1971, que tienen un amplio exponente en Shelah 1978, y por otro lado la aparición con BARWISE (1974) de lo que se denomina como teoría abstracta de modelos, que supone una generalización de la vía abierta por Lindström 1969.

NOTA FINAL.

Abraham Robinson (1918-1974) en teoría de modelos.

Tanto MACINTYRE (1977) como KEISLER (1979) señalan que las aportaciones fundamentales de Robinson en teoría de modelos son las tres siguientes:

a)estudio de la modelo-completud en álgebra, con aplicación a una solución simplificada del problema 17 de Hilbert y generación de un nuevo concepto como es el de los cuerpos diferencialmente cerrados.

b)estudio del forzamiento con aplicaciones al álgebra.

c)estudio del análisis no-standard, con aplicaciones a los espacios de Hilbert, a la teoría de números, a la teoría del potencial, al análisis complejo, a la teoría económica y a la teoría cuántica.

Los trabajos de Robinson entre 1949 y 1955 dan lugar a lo que más tarde será conocido con el nombre de test de Robinson. La generalización de los teoremas de Tarski sobre cuerpos algebraicos cerrados y cuerpos reales cerrados le llevó a estudiar las operaciones de cierre sobre clases de estructuras y de aquí el concepto de modelo-completud, para lo cual tuvo que basarse en el estudio de ideas tales como la de diagrama de una estructura, extensiones simples de una estructura y cierres operacionales sobre las estructuras, que fueron inmediatamente aplicadas al álgebra. El concepto de modelo-compañera(introducido por Bers 1969) vino a complementar el **de modelo-complet**a, para ser aplicado a teorías que no disponían de modelo-completud[1].

La siguiente aportación modelística es la de forzamiento finito (de carácter sintáctico) e infinito (de carácter semántico), que permitió construir los modelos genéricos, de modo que la teoría de estos modelos queda vinculada a los conceptos de modelo-compañía y modelo-completud y sobre esta base al estudio de las teorías de estructuras existencialmente cerradas.

En 1961 Robinson pone en marcha el análisis no-standard, mediante la consideración de un modelo no-standard de los números reales, que constituye una extensión elemental de los mismos, bajo la forma de una estructura de cuerpo n-oarquimediano totalmente ordenado, al que se le transfieren las propiedades y las operaciones del análisis standard. Esta contribución robinsoniana tiene, si no especial aceptación en la práctica matemática ordinaria, sí aplicaciones matemáticas e implicaciones filosófico-matemáticas importantes.

NOTAS.

1.- Remitimos a la introducción de Keisler a ROBINSON (1977) (se trata de una segunda edición) para una descripción breve de la evolución y aplicación de estos conceptos desde 1956 a 1976.

BIBLIOGRAFIA.

. J.W. ADDISON(1965); Some notes on the theory of models, in : J.W. Addison,L. Henkin, and A.Tarski (editors),The theory of models. Amsterdam : North-Holland.

. J. BARWISE(1974); Axioms for Abstract Model Theory,Ann.Math. Logic 7, 221-265.

. K. BERKA und L.KREISER (1983); Logik-Texte (3.Auflage).Berlin : Akademie-Verlag.

. C.C. CHANG (1974); Model Theory 1945-1971, in : L. Henkin et al. (editors), Proceedings of the Tarski Symposium. Providence,RI : American Mathematical Society.

. C.C. CHANG and H.J. KEISLER (1973); Model Theory. Amsterdam : North-Holland.

. J. van HEIJENOORT (1967): From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic,1879-1931. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

. H.J. KEISLER (1979); Introduction, in:A.Robinson, Selected Papers. Vol.1. Amsterdam : North-Holland.

. A. MACINTYRE ;(1977) Abraham Robinson (1918-1974), Bull. Am.Math. Soc. 83, 646-666.

. A. MACINTYRE ;(1980) Model Theory, in : E.Agazzi (ed.),Modern Logic. A Survey. Dordrecht : Reidel.

. A. ROBINSON (1977); Complete Theories, 2nd edition. Amsterdam : North-Holland.

. R.L. VAUGHT (1974); Model Theory before 1945, in : L.Henkin et al. (editors), Proceedings of the Tarski Symposium. Providence, RI : American Mathematical Society.