

PARADOJAS QUE SUSCITA EL ESPACIO ABSOLUTO DE NEWTON

Carmen Mataix [REDACTED] Loma
Universidad Complutense de Madrid

Muchos han sido los análisis que se han hecho del espacio newtoniano y muchas también las críticas que ha suscitado, a partir sobre todo de la revisión de la Mecánica llevada a cabo por Mach. Sin embargo, todas ellas han ido en su mayoría dirigidas a analizar la validez del espacio absoluto como centro de referencia de los movimientos, planteamiento que hiciera el propio Newton con la pretensión de superar el relativismo producido por la cinemática galileana.

Ahora bien, hay otro género de problemas que no han sido tan analizados porque no forman parte del ámbito de la Física, sino más bien del de la Filosofía, y son estos los que queremos recoger aquí. Comenzaremos partiendo de la definición del espacio dada por Giordano Bruno, quien tiene una concepción en ciertos aspectos similar y, por tanto, precedente de la de Newton. En los Diálogos sobre el infinito universo y los mundos escribe:

"El espacio inmenso, el seno, el continente universal, la región etérea a través de la cual discurre y se mueve todo. Allí innumerables estrellas, astros, globos, soles y tierras se perciben con los sentidos y otros infinitos se infieren con la razón. El universo inmenso es el compuesto que resulta de tal espacio y de tantos cuerpos en éste comprendidos".

El texto de G. Bruno muestra de una manera clara la existencia simultánea de dos realidades: 1. Por un lado, el espacio inmenso, el continente universal. 2. Por otro, la totalidad, el contenido, el conjunto de astros, soles, tierras, etc... que están dentro de él. Para Bruno ambas entidades tienen que ser infinitas. Esto naturalmente traía como consecuencia dos problemas: uno de carácter teológico, ¿qué papel juega Dios en medio de tantos infinitos? Otro de carácter filosófico, ¿cómo se coordinan ambos

El espacio absoluto de Newton

infinitos?

Como decíamos antes, el texto de Bruno es ya un precedente (como lo fué por ejemplo, Nicolas de Oresme en el siglo XIV) del espacio absoluto de Newton, cuya definición de espacio al comienzo de los Principia no repetimos aquí por ser sobradamente conocida. En ambos casos el espacio juega un papel primordial: el hacer de receptáculo, de continente de todo lo demás o sea, del universo.

Sin embargo en Giordano Bruno, a pesar de los problemas que plantean ambas realidades, el continente y su contenido, ellas son infinitas; pero en Newton la materia es creada por Dios y como tal limitada y finita frente a la infinitud del espacio absoluto; el espacio, entonces, ha de tener condiciones tales que permitan considerarle ante todo en su función principal: como continente, como receptáculo. Ya no se trata, pues, de la extensión como una propiedad exclusiva de la materia - como sería en Descartes, haciendo coincidir espacio y materia - sino de la extensión hipostasiada para que quede solamente como un receptáculo vacío.

Así, el espacio es el continente vacío para un universo que se localiza en él y para el cual es la referencia última, como hace saber Clarke en su correspondencia con Leibniz:

"... supuesto que el espacio es uniforme o igual y no difiere una parte de otra, si los cuerpos creados en un lugar hubieran sido creados en otro (suponiendo que guardasen la misma situación el uno respecto del otro), seguirían habiendo sido creados en el mismo lugar que antes, lo cual es una contradicción manifiesta." (Correspondencia Leibniz-Clarke, 5, 3^{er} escrito de Clarke, Taurus, Madrid, pag. 74).

Pues bien, si hemos insistido en este carácter del espacio es para señalar dos cosas que nos parecen importantes:

1.- Que el espacio newtoniano, siendo el ámbito de la extensión pura y el correlato físico del espacio euclídeo, está integrado por un conjunto infinito de puntos inextensos, ¿cómo se llega a sus partes simples, cuando tales puntos están ocupados por la materia? Si, en el propio sistema de Newton, la materia está formada de partes simples, partículas últimas, átomos a los que se llega en el proceso de división, ¿cómo se compagina entonces esta división finita de la materia que termina en los átomos con la infinita divisibilidad del espacio que ocupa? La solución dada por Newton al respecto elude el problema tal como se plantea y acude a asegurar la indivisibilidad de las partículas por sus características propiamente mecánicas:

"Tras considerar todas estas cosas, me parece muy probable que Dios ha-

*ya creado desde el comienzo la materia en forma de partículas sólidas, masivas, duras, impenetrables y móviles, con tales tamaños y figuras, con tales otras propiedades y en una proporción tal al espacio, que resulten lo más apropiado al fin para el que fueron creadas. Estas partículas primitivas, al ser sólidas, son incomparablemente más duras que cualesquiera cuerpos porosos formados a partir de ellas. Tan duras, incluso, como para no gastarse ni romperse nunca en pedazos, pues ningún poder ordinario es capaz de dividir lo que el mismo Dios ha hecho uno en la primera creación. En tanto en cuanto las partículas permanezcan enteras, pueden formar cuerpos de una y la misma naturaleza y textura en todo momento. Sin embargo, si se gastasen o rompiesen en pedazos, la naturaleza de las cosas que de ellas depende habría de cambiar." (Newton, *Optica*, ed. Alaguara, Madrid, pag. 345)*

El segundo problema que subsiste es de otra índole pero tiene relación con el primero: como hemos visto, el espacio se entiende como receptáculo absoluto, continente de todo lo que es, y la materia queda dentro de él. Así el espacio se convierte en un conjunto de elementos, lo puntos, algunos de los cuales están rellenos por el contenido material que constituye el universo. El universo es pues, en este caso, un subconjunto, un elemento del conjunto total que es el espacio. Pero si es así, el universo propiamente hablando ya no engloba en sí todo lo que existe, todo lo real; el término universo, que quiere decir totalidad, ha perdido así su significado. Ha quedado fuera de él una realidad que es el espacio. "La realidad del espacio - afirma Clarke - no es una hipótesis, sino que es probada por los argumentos anteriormente dados, a los cuales no se ha dado respuesta". (*Leibniz-Clarke, Correspondencia*, Taurus, Madrid, 4ª réplica de Clarke, 14, pag. 93). Así pues el universo como tal, entonces, no comprende al espacio, sino solamente al conjunto de realidades materiales que, a su vez, están contenidas dentro de ese receptáculo que es el universo.

Entonces el problema es: si por un lado, el universo es todo lo que hay, todo lo que existe, el espacio como una realidad tendría que estar comprendido e incluido dentro del universo. La totalidad no tiene excepciones y todo quiere decir totalidad sin dejar nada fuera. Esto lo supo ver muy claro Aristóteles al hablar del lugar, en el libro IV de la *Física*: todo tiene un lugar en el universo, cada cosa tiene su lugar propio, pero ¿qué sentido tiene preguntar por el lugar de todo el universo? Para Aristóteles supondría que no hemos entendido bien qué queremos decir con el término universo, totalidad, y nos hemos dejado una realidad fuera de él: el espacio.

Quiere decirse entonces que lo que creíamos ser los límites del universo no lo eran y hemos de desplazar éstos más allá, hasta que abarquen todo lo que hay:

"... las cosas están en un lugar por sí (...) pero el cielo en su conjunto no está en ninguna parte; ni en un cierto lugar ya que ningún cuerpo lo envuelve (...) la parte superior se mueve circularmente; pero el todo no está en ninguna parte. En efecto, la cosa que está en alguna parte es primero por ella misma, una cosa; entonces supone otra al otro lado en la cual consiste el envolvente; pero al lado de todo el universo no hay nada fuera del todo pues el cielo, por supuesto, es el todo."
(Aristóteles, *Física IV*, 212b, pag.134.)

Aristóteles, como queda patente en sus obras, tenía perfecto conocimiento de la tesis mantenida por los pitagóricos de la existencia de un espacio más allá del universo - tesis que nosotros conocemos precisamente a través del propio Aristóteles - y por supuesto, de la defensa que hacían los atomistas de la existencia del vacío; sin embargo, era perfectamente consciente de la opción que se plantea en este tema: o el universo se entiende como totalidad, que es en definitiva lo que significa el término universo, en cuyo caso tiene que incluir dentro de él al espacio, que queda entonces como parte de un todo, o el espacio se entiende como continente, en cuyo seno incluye al universo de modo que éste sea sólo una mínima parte del infinito espacio vacío.

Por lo tanto hay que optar, entre la totalidad que supone al universo y que incluye dentro de sí al espacio como una realidad más de esta totalidad, o el continente que es el espacio; entre la primacía del universo o la del espacio, pero en cualquier caso uno de los pasa a ser un subconjunto del otro, ¿pero cuál?

La paradoja surgirá, pues, en dos ámbitos:

1. De estas dos realidades mencionadas, ¿cuál es propiamente subconjunto de cuál? ¿cuál incluye a la otra? Históricamente la elección se ha dado en las dos posibilidades: la postura de Aristóteles, Descartes o incluso el mismo Einstein a la hora de explicar una imagen o un modelo del universo ha supuesto una opción por la totalidad, por el universo en su conjunto, renunciando al espacio como continente vacío. Pero, por otro lado, toda la mecánica clásica se decidió por la primacía del espacio haciendo de éste el receptáculo de todo lo demás y otorgándole primacía lógica, ontológica y temporal sobre la materia. Esto tenía enormes ventajas para el sistema newtoniano, pues el espacio reunía una serie de cualidades que el universo como tal no parecía tener: inmutable, eterno, absoluto, etc. y por

eso se asemejaba a la realidad divina. Además resolvía uno de los problemas que se suele plantear en este tema con más frecuencia y es el que nos explica Moles en un artículo sobre "Cosmología y observaciones":

"Cuando se habla de cosmología suele considerarse ésta como el estudio del universo en su conjunto, definición que presenta un grave inconveniente. Este consiste en que nuestras conclusiones globales arrancan de observaciones que se refieren a una región espacio-temporal limitada; región de la que no podemos afirmar si contiene una muestra fiel y representativa de todo el universo[.]En estas condiciones, hacer un modelo global que coincida localmente con lo que se observa es un problema con múltiples soluciones. Con la terminología de la teoría de conjuntos podríamos decir que la acepción habitual de la cosmología supone una definición intensiva del universo; esta definición nos parece no operativa, pues afirmar que el universo es todo lo que existe, constituye obviamente una tautología [...] En definitiva, el núcleo del problema cosmológico lo constituye la dualidad escala local-estudio global". (Investigación y Ciencia, Julio, 1981, pag. 122-123).

En las palabras de Moles, vemos que el problema que plantea hace referencia al universo como totalidad y este problema precisamente se pretendía salvar si esa totalidad fuera referida a una realidad ajena al universo y con propiedades distintas e incluso, dando un paso más, con carácter absoluto frente al relativismo del universo. Dicho de otro modo, el concepto de universo plantea una alternativa:

- O bien el universo es en efecto la totalidad que incluye todo, hasta el espacio, - identificando espacio y materia como en Descartes o Einstein - y entonces es marco de referencia último y no tiene sentido preguntarse qué hay más allá, qué hay después de los límites del universo. Pierde también sentido el término límite, ya que límite significa limitar con algo.

- O bien el universo no es la totalidad, el término ha perdido su contenido y por encima de él hay una realidad que juega el papel de punto de referencia último y en el cual el universo está contenido. En tal caso, sí que puede tener sentido preguntarse por los límites del universo, querer saber qué hay más allá, o al menos cómo son esos límites. Por eso la opción no resulta fácil cuando se trata del espacio y del universo, porque ambas realidades se incluyen mutuamente: el universo es la totalidad de todas las realidades; el espacio es el receptáculo de todo lo que hay, pero ¿cuál incluye a cuál?

2. Existen además los problemas que afectan propiamente a la extensión ya que, si el espacio es un conjunto de puntos, se concreta después en la

extensión material, a la cual se le pone un límite en el proceso de división de la materia y surgen todas las paradojas relativas a la continuidad del espacio frente a la discontinuidad de la materia. ¿Por qué la extensión material es limitada y la espacial no? La respuesta de Newton, como quedó patente en las páginas finales de la Optica, pretende atribuir esta limitación a las condiciones propias de la materia (dureza, solidez, etc...) pero no a sus condiciones geométricas que es donde se plantea el problema.

Pues bien, centrándonos en el tema que nos ocupa, el de la relación entre la totalidad y el absoluto, que da lugar a una de las paradojas más notables en el espacio de Newton, podemos llegar a la conclusión de que tal problema puede analizarse desde los planteamientos que Cantor o Russell hicieron para la llamada paradoja de los conjuntos, como ya consideró Gottfried Martin con respecto a las antinomias de Kant: "La única fuente de las antinomias reside en la posibilidad de presentar los mismos hechos en diferentes maneras e incluso, en algunas circunstancias, en maneras mutuamente contradictorias y por otro lado, en el concepto de totalidad". (Martin, Kant's

Sin embargo, no es solamente el concepto de totalidad, como dice Martin, el que causa problemas a los que nos hemos referido cuando la totalidad se aplica al universo, sino también el concepto de inclusión o pertenencia, que supone el espacio como receptáculo o continente, pues habría que saber cuál es el criterio sobre el que se asienta este concepto que se requiere para la axiomática de conjuntos. En el caso de la mecánica, el absoluto, el continente, ha quedado seleccionado como criterio por encima de la totalidad. "La mecánica newtoniana - escribe Martin - puede ser presentada de dos formas diferentes, una es la mecánica como un sistema de puntos, la otra la mecánica del continuo". (Martin, pag.53). Sin embargo, no siempre la solución es tan obvia ya que el problema, insistimos, es previo y está en la opción, porque no se pueden aceptar ambas cosas a la vez: el espacio como receptáculo que incluye en sí al universo y que es un continuo y el universo como totalidad que engloba al espacio como una realidad más y es además discontinuo. (Hemos sintetizado las dos paradojas a las que aludimos en este trabajo, la del continuo, que no desarrollamos, y la de la totalidad de la que estamos tratando esencialmente). Afirmar estas dos cosas lleva implícito postular la inclusión de una en otra, sin haber decidido previamente cuál - decisión que implica ya no postularlas a la vez - lo cual supone entonces haber admitido la idea de un conjunto de todos los conjuntos que es a la vez, subconjunto de sí mismo.

Así lo explica el propio Martin respecto a las antinomias kantianas: "La segunda región de los problemas de las antinomias - escribe Martin - son las antinomias de la moderna matemática". Y él mismo explica brevemente estas antinomias:

"Escogemos para nuestra consideración la clase de todas las clases, que puede mostrarse que contiene una antinomia. Si uno se imagina que hay una clase de todas las clases, $M = \{A, B, C, \dots\}$, esta clase de todas las clases no es la clase de todas las clases, puesto que yo puedo al momento dar una clase que no pueda ser contenida en esta clase de todas las clases. En orden a esto, yo solamente necesito extraer de M un elemento, por ejemplo A , y hacer una nueva clase (M, A) fuera de este elemento y de la clase misma M . Esta clase (M, A) está contenida en la clase M , entonces puede mostrarse fácilmente que la clase M misma está contenida en M , pero si se permite que una clase pueda ser contenida en sí misma la contradicción continúa".

"Se verá - prosigue Martin - que los dos lados están estrechamente conectados. Ambos descansan en considerar la clase de todas las clases que tiene las clases particulares como sus elementos, como un elemento ella misma, a su vez, en la nueva formación de una clase. Un lado de la antinomia descansa en el hecho de que M es considerado como un elemento en la nueva clase (M, A) y el otro lado de la antinomia descansa sobre el que una clase es considerada en general como un elemento de sí misma. Estamos enfrentados con el concepto de totalidad. Yo considero todas las clases y formo el concepto de su totalidad, o sea la clase de todas las clases. Pero entonces yo considero esta totalidad como elemento en la formación de la nueva clase. Un concepto de totalidad se ha formado otra vez, y esta nueva totalidad es de nuevo usada como un elemento. Este conflicto entre concluir y comenzar de nuevo, entre formar una totalidad y usar esa totalidad con un nuevo elemento, es la actual base de la antinomia (...) Kant vio muy claramente que las antinomias residen en esta antítesis entre llegar a una conclusión e ir más allá de esa conclusión. En principio esto ya fue visto por Arquitas de Tarento cuando él quería ir más allá del fin del mundo y alargar un brazo, y las antinomias de Zenón se apoyan en la misma base". (G. Martin, *op. cit.*, pag. 55)

En efecto, Arquitas de Tarento tropezó ya con el problema de la totalidad planteado por Aristóteles, y con la exigencia de que ésta ponga un límite a la realidad y a nuestra imaginación. Pero en el caso de las paradojas de Zenon no es la totalidad sino la extensión la que juega este papel.

Es decir, que no es sólo la totalidad, como afirma Martin, la que crea la paradoja, sino también la infinita extensión del espacio, ya que si la clase de todas las clases es el espacio como continente de todo lo que hay, debe incluir dentro de él al universo como un subconjunto suyo (Newton), pero si al contrario, la clase de todas las clases es el universo por su carácter de totalidad, entonces el espacio ha de quedar incluido en él (Aristóteles). El problema reside no sólo en el concepto de totalidad, sino también en el de inclusión. ¿Qué clase es la que contiene y cuál la contenida? ¿Cuál es subconjunto de cuál? Si Arquitas de Tarento no aceptaba la conclusión de Aristóteles de considerar el universo como una totalidad, fuera de la cual no hay nada, pretenderá siempre ir más allá hasta los límites del universo para comprobar qué hay. Frente a la respuesta aristotélica de que más allá no hay nada y que incluso la pregunta carece de sentido, está la respuesta newtoniana de que más allá hay espacio vacío, ilimitado, eterno.

"Tres principales soluciones - comentará Martin - han sido propuestas: la teoría intuicionista de las matemáticas de Brouwer, la teoría de Zermelo y la teoría de los tipos de Russell. Ellas prohíben utilizar una determinada totalidad como un elemento". (Martin, op. cit. pag.55)

Pues bien, el concepto de totalidad y el concepto de inclusión plantean antinomias en todos los casos, no sólo en matemáticas, sino también en la interpretación de la naturaleza y se basan, por lo tanto, en el mismo conflicto que la antinomia de Russell. Quiere decirse entonces que su solución también puede ser la misma: prohibir, como dice Martin, el uso de la totalidad nuevamente como elemento. En el caso que hemos propuesto, se trata entonces de evitar que el concepto de totalidad aplicado al universo entre a su vez en el concepto de continente aplicado al espacio. Pero entonces, como dijimos al principio, hay que optar entre la primacía del universo o la del espacio. Lo que está claro es que no se pueden admitir ambos conceptos sin analizar, como aparecen en la mecánica de Newton, la totalidad que es el universo y el receptáculo que es el espacio, porque los dos participan de dos - y no de uno sólo, como afirma Martin - de los conceptos que dan lugar a la paradoja de Russell: el de totalidad y el de inclusión.

Además, hemos visto también que ambos conceptos llevan implícito otro tipo de paradojas, las del continuo, que aquí sólo vamos a señalar. Pero como hemos apuntado al principio, el espacio absoluto de Newton representa el espacio geométrico, la extensión ilimitada y, por lo tanto, una de sus propiedades fundamentales es la continua divisibilidad matemática como apa-

rece muchas veces en la correspondencia de Leibniz y Clarke, es decir, su esencial indivisibilidad:

"Las partes, en el sentido corporal de la palabra, son separables, compuestas, desunidas, independientes y movibles entre sí. Pero el espacio infinito, aunque puede ser sólo parcialmente aprehendido por nosotros, puede ser concebido en nuestra imaginación como compuesto de partes, (llamadas así impropriadamente) esencialmente indiscernibles e inamovibles entre sí y no divisibles sin que haya una contradicción expresa entre los términos: es en sí mismo uno y absolutamente indivisible". (Leibniz-Clarke, Correspondencia, Taurus, Madrid, 4^a respuesta de Clarke, 11 y 12, pag.92.)

Sin embargo la materia, como hemos visto, tiene como una de sus propiedades esenciales el llegar a un límite en su división, apoyándose precisamente en sus propiedades mecánicas.

"Pues una de dos, o hay o no hay partículas de materia perfectamente sólidas. Si las hay, entonces las partes de tales partículas perfectamente sólidas tomadas en iguales figura y dimensión (hipotéticamente siempre será posible), son átomos físicos perfectamente iguales. Pero si no hay partículas perfectamente sólidas, entonces no hay materia en absoluto en el universo. Pues cuantas más divisiones y subdivisiones de un cuerpo se realicen para llegar a partes perfectamente sólidas y sin poros, mayor es la proporción, en dicho cuerpo, de los poros sobre la materia sólida. Si entonces continuamos la subdivisión in infinitum no se llega a una partes perfectamente sólidas y sin poros; de aquí se seguirá que todos los cuerpos constarán sólo de poros, sin materia alguna, lo que es un absurdo evidente. Y el argumento es el mismo con respecto a la materia de que está compuesta cualquier clase concreta de cuerpo, tanto si sus poros se suponen vacíos como llenos de cualquier materia extraña". (Leibniz-Clarke, Corresp. Taurus, 4^a carta de Clarke, pag. 98).

Pues bien, ¿cómo se conjugan las dos cosas? ¿Cómo se corresponde la indivisibilidad del espacio con la divisibilidad de la materia? En una palabra, ¿qué relación puede establecerse entre ambas extensiones? Este segundo problema puede también analizarse desde el planteamiento clásico de las paradojas del infinito, en las que no vamos a entrar aquí. Así nos encontramos que el problema del espacio absoluto de Newton nos enfrenta, al menos con dos tipos de paradojas clásicas: las paradojas que podríamos llamar de la totalidad, las de los conjuntos y las paradojas del infinito, que si bien aquí no desarrollamos, quedan no obstante, planteadas.