CATEGORÍA DE CUALIDAD EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL

Victor Gómez Pin

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Permítaseme empezar esta ponencia evocando a Frege,quien en su artículo *¿Qué es una función?* escribe: "La matemática debería ser un modelo de claridad lógica. En realidad quizá no se ecuentran en los escritos de ninguna otra ciencia tantas expresiones equívocas y por lo tanto, tantas ideas equívocas como en los escritos matemáticos".

La ponencia tomará como punto de arranque un recurso de Newton que permitiría la demostración de un lema relativo al cálculo diferencial, a saber, que si A,B son las cantidades "en mutación" constitutivas de un rectángulo y a,b los respectivos "momentos" o velocidades de mutación, entonces el momento en el rectángulo AB sería Ab - aB.[1]

Precisemos que sobre la pista de este texto nos ha puesto, no un matemático, sino un filósofo, un filósofo a quien no tienta ni "reducir toda la filosofía a las matemáticas" ni hacer abstracción de estas últimas, un filósofo además que (contrariamente a cierto prejuicio sustentado en la negativa a confrontarse a los durísimos textos de la *Ciencia de la Lógica* relativos a la categoría de *medida*), conocía perfectamente el trabajo de los matemáticos (Lagrange, Newton, Euler, Carnot, etc.) que evoca. Conocimiento respetuoso pero jamás beato, lo que le situa en posición de fertilizar sus contradicciones, es decir, a la vez sacarlas a la luz y situarlas en el espacio conceptual del que dan testimonio:[1bis]

> *"Ha de referirse aquí un notable procedimiento de Newton (Princ. Math. phil. Nat. Lib.II Lemma II, después de la Propos.VII) - esto es, el descubrimiento de un inteligente artificio (sinnreichen Kunststücks) para apartar (beseitigen), en el hallazgo de los diferenciales, la omisión, aritméticamente injustificada (das arithmetisch unrichtige Weglasen) de los productos de las diferencias de órdenes superiores."*[2]

Encuentra Newton el diferencial del producto de donde luego se deducen los diferenciales de los cocientes, las potencias, etc.

Antes de pasar a la exposición del método justificativo del lema, citando el propio texto de Newton, sinteticemos con la mayor transparencia posible dónde reside el problema, no en el caso específico de Newton, sino en general (haciendo incluso provisionalmente abstracción de todo devenir histórico). Aún en los casos en que nos estemos refiriendo a Newton utilizaremos los símbolos heredados de Leibniz.

Si hacemos abstracción del trabajo admirable de Abraham Robinson[3], cabe decir que la historia del análisis constituye la de una renuncia (tímida y hasta inconfesada) a la categorización de los diferenciales bajo la rúbrica de la determinación inequívoca de magnitud. La ambigüedad en la determinación del estatuto ontológico de los diferenciales se hallaba inscrita en los bandazos de Leibniz, quien si en ocasiones afirma su caracter numérico (aunque imaginario), en otras sostiene que el infinito actual no puede ser asumido en matemáticas. No cabe decir que Cauchy renuncia a referirse a cantidades infinitamente pequeñas (y en su Cours d'Analyse de 1821 llega incluso a plantear como clave la determinación de las propiedades de éstas), pero sabido es que tiende a dar cuenta de ellas a partir de la noción de variable y del infinito desligamiento de ésta hacia el valor nulo. En fin la revolución ε-δ significó, por utilizar una expresión de Mario Bunge, "The execution and burial of infinitesimals".

Los manuales corrientes de análisis nos familiarizan hoy en día con la noción de una función determinada hacia cero por la tendencia de su variable, función que puede ser caracterizada como infinitésimo.

I La tendencia a evacuar los infinitesimales

El punto de arranque (la matriz de todos los vicios, ciertamente en su día inevitable) es la consideración del diferencial dx de la variable como determinación que, directa o inmediatamente (es decir, aun independientemente de la función), puede afectar a ésta; afectarla como un incremento, incremento, eso sí, sui generis, puesto que "infinitamente pequeño".

Los problemas que esta última noción acarrea, obligaron como es sabido a un esfuerzo de sofisticación a la hora de presentarla.

Lo infinitamente pequeño pasa de ser un imposible número (que contradiría las propiedades de los números reales y concretamente el caracter arquimediano de R) para convertirse en una función cuya definición sería la siguiente:

Dada una función $f(x)$, si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ entonces $f(x)$ es un infinitésimo cuando x tiende a a (o por abuso, $f(x)$ es un infinitésimo en el punto $x = a$).[4]

Tal definición de infinitésimo permite hablar de función infinitésimo de incrementos o, por abuso, de incremento infinitésimo[5] (¡aún no decimos diferencial!) de una variable x, considerando respecto a un punto de estabilización x_0 la función, que cabe designar

$$\Delta x_0(h) = x_0 + h - x_0$$

donde h es una magnitud variable en torno a cero. Pues, en efecto

$$\lim_{h\to 0} \Delta x_0(h) = \lim_{h\to 0}(x_0+h-x_0) = 0$$

Y asímismo cabe hablar de incremento infinitésimo[6] de $f(x)$ considerando respecto a un punto de estabilización $f(x_0)$

$$\Delta f(x_0)(h) = f(x_0+h) - f(x_0) \qquad \text{pues}$$

$$\lim_{h\to 0} \left[f(x_0+h) - f(x_0)\right] = 0 \qquad (7)$$

Tenemos pues dos funciones de h que constituyen respectivamente una sucesión orientada de incrementos (por abuso, incremento infinitésimo) de la variable x, y una sucesión orientada de incrementos de la función $f(x)$. ¿Tenemos ya los diferenciales de la una y de la otra?

Sabido es que al menos el diferencial $df(x)$ en un punto x_0 no es identificado al incremento infinitésimo correspondiente. Sí en cambio suele leerse que tal diferencial es la "parte principal" de este incremento[8]. Pues bien, se halla o no establecido que el diferencial de la variable coincide con el incremento infinitésimo de ésta[9], tal identificación se halla implicada en la concepción de $df(x)$ en x_0 como "parte principal" de $\Delta f(x_0)$[10].

Y como tanto el incremento Δ x como la "parte principal" de $\Delta f(x)$ son funciones de h, concluiríamos en esta perspectiva que diferencial, ya que no un número infinitamente pequeño, sí designa al menos una función que constituye un infinitésimo ... incremento (infinitésimo tomado como sucesión orientada de incrementos).

Quede claro que los diferenciales sólo pueden en todo caso ser infinitésimos-incrementos, no el límite 0 al que estos tienden, pues en tal caso $f'(x) = \frac{0}{0}$. Los diferenciales serían así propiamente funciones; condición suficiente para afirmar que nada trascendente al orden de la magnitud contiene la disciplina que sobre el diferencial se vuelca[11].

II La aporía de los infinitésimos relativos

Por mucho que sea caracterizada como infinitésimo, es evidente que la identificación de una función al diferencial aleja radicalmente a éste de su caracterización como número infinitamente pequeño. Y sin embargo la primera concepción no aparecerá nunca claramente como resultado de una denuncia de las aporías de la segunda, sino más bien como modo de encubrirlas... Se trata en suma de alcahuetes entre sí incompatibles.

Mostrémoslo con un ejemplo:

Sea la función de dos variables $F(x,y) = xy$ y consideremos, a la manera por ejemplo de Carnot, su expresión bajo la forma $(x+dx)(y+dy)$, donde dx, dy designan los respectivos diferenciales (aún no prejuzgamos sobre cómo ha de entenderse tal concepto).

Considerando ahora la diferencia entre esta nueva fórmula y la originaria

$$(x+dx)(y+dy) - xy$$

obtenemos

$$ydy + ydx + dydx$$

¿Qué ver en esta fórmula? Si dy, dx son incrementos, tenemos una simple función de varias variables (reductibles en número identificando dy a dx y estabilizando x en un punto x_0) que nos da el marco general del incremento de la función. No nos apartamos ni un ápice de la magnitud determinada u ordinaria y las operaciones propias de ésta serían aquí perfectamente legítimas.

Si por el contrario en dx y dy vemos una cantidad "infinitamente pequeña" las cosas se complican seriamente. El primer problema es cómo interpretar los dos primeros términos, en los que una cantidad potencial ordinaria se halla en factor con una cantidad indeterminada. El cálculo diferencial avanzó sin embargo fijándose en otro aspecto, a saber, que al ser el último término producto de dos cantidades infinitesimales, presenta una peculiaridad con respecto a los anteriores. Se trata de infinitesimales de <u>segundo orden</u>, infinitesimales relativos,(cuyo cociente al ser divididos por los inmediatos es un infinitesimal de primer orden) se trata en suma de infinitesimales que <u>cabe dejar de lado</u>... Obteniendo así la fórmula del diferencial de la función. El procedimiento es así resumido por Carnot en su <u>Métaphysique du Calcul differentiel</u>[12]:

> .."*Et alors pour passer de cette différence à la différentielle, il n'y aura plus qu'à réduire l'expression, en y négligeant les quantités qui s'y trouveraient infiniment petites vis à vis de celle auxquelles elles seraient ajoutées et dont elles seraient retranchées*".

Procedimiento sin embargo impotente ante las crueles objecciones de un Marquis de l'Hôpital, a saber que la razón invocada para eliminar $dx\,dy$ ($\frac{dx\,dy}{dxy} = \frac{dy}{y}$, donde dy es infinitamente pequeño, nada pesa, porque el numerador es irrelevante frente al denominador) debería haber sido tomada en cuenta desde el principio, en cuyo caso $(x+dx)(y+dy)$ quedarían indentificados respectivamente a x e y, y nos hubiéramos ahorrado toda la operación.

La sospecha de tal incoherencia mucho antes que l'Hôpital o, de una manera aún más cruel, Berkeley, la formulen, explica quizá la tendencia a hacer gozar al diferencial de la variable de las ventajas del incremento.... Con el resultado de una confusión aún mayor. Pues, cuando dx y dy reivindican su caracter de variables designativas de incrementos que se estabilizan en puntos bien determinados, entonces efectivamente las fórmulas $(x+dx)(y+dy)$ tienen sentido aritmético preciso, pero lo que pierde legitimidad es la supresión del tercer miembro constitutivo de la diferencia entre la función originaria y la función que resulta de sumar el incremento.

En suma: lo que - al final de la operación - nos empuja a hacer la identificación de dx, dy a magnitudes infinitamente pequeñas, nos lo impide la consideración de dx, dy como incrementos variables y así magnitudes propiamente dichas. Mas si renunciamos a esta última identificación no tenemos siquiera derecho a iniciar la operación.

Para escapar al pantano, se impondrá a la larga tan sólo una vía, a saber, la separación del momento en que interviene el incremento de la variable y el momento en que interviene el diferencial de la variable, haciendo emerger a ésta como polo de un lazo intrínseco o cualitativo a partir de la vinculación del primero (el incremento) en un lazo incremental, y del establecimiento de su límite.

En tal marco, sí se revelará efectivamente fertil la función infinitésimo (aunque el uso de esta expresión no es imprescindible).[13]

Lejos de suponer el sacrificio de la infinitud[14], la noción de límite constituye la única posibilidad de restaurarla en un marco que respete a la vez la revolución ontológica que el Calculus supone y las exigencias de rigor de las disciplinas matemáticas[15].

Mas aunque para tal proceder (que respetara escrupulosamente las exigencias de exactitud, que nada "despreciara" gratuitamente) será de preciosa utilidad en cierto momento la fórmula del binomio, el inventor de ésta no seguirá via tan clara. Newton en efecto se contentará con un recurso, un truco cabría decir, que permitirá soslayar la dificultad,es decir, obtener(en base a la función antes considerada) $xdx + ydy$ por medios estrictamente ortodoxos, sin tener que hacer abstracción de término alguno y por lo tanto sin necesidad de tomar partido entre la lectura diferencial y la lectura incremento; obtener en suma $xdx + ydy$ pudiendo indiferentemente leer diferencial de la función o incremento y complaciéndose en la lectura primera.

"El producto, cuando x, y son aminorados cada uno en la mitad de su diferencia infinita (jedes um die Hälfte seiner unendlichen Differenz

kleiner genommen)[16], *traspasa a*

$$xy - \frac{xdy}{2} - \frac{dxy}{2} + \frac{dxdy}{4};$$

pero cuando se hacen aumentar a x e y de otro tanto (el producto traspasa) en

$$xy + \frac{xdy}{2} + \frac{ydx}{2} + \frac{dxdy}{4}$$

Ahora bien, al sustraer de este rpoducto el primero, queda como remanente $ydx + xdy$, y esto sería lo <u>sobrante</u> <u>del</u> <u>acrecentamiento</u> <u>para</u> <u>un</u> <u>entero dx</u> <u>o dy</u> (Überschuss des Wachstums um ein ganzes dx und dy), pues los dos productos difieren por este acrecentamiento; éste por lo tanto es el diferencial de xy".

Consideremos x e y aminorados en la mitad de su diferencia infinita[17] por un lado; x e y aumentados en la mitad de su diferencia infinita por otro lado[18]; desarrollando y restando el primer resultado al segundo obtenemos:

$$\left(x + \frac{dx}{2}\right)\left(y + \frac{dy}{2}\right) - \left(x - \frac{dx}{2}\right)\left(y - \frac{dy}{2}\right) =$$

$$xy + \frac{xdx}{2} + \frac{ydx}{2} + \frac{dxdy}{4} - \left[xy - \frac{xdy}{2} - \frac{ydx}{2} + \frac{dxdy}{4}\right] =$$

$$2\,\frac{xdy}{2} + 2\,\frac{ydx}{2} = xdy + ydx.$$

Hemos empleado, no dx, dy enteros, sino $\frac{dx}{2}$, $\frac{dy}{2}$, pero lo que hemos alcanzado coincide con el diferencial de la función obtenida a partir de los "enteros" dx, dy (¿qué puede significar para un infinitesimal el hallarse entero o no?) y mediante "descuido" del relativo $dxdy$, "descuido" que aquí no ha tenido lugar:

"Es evidente que en este procedimiento (Verfahren) desaparece por sí mismo (durch sich selbst) lo que constituye la dificultad principal, es decir, el producto de las dos diferencias infinitas (das Produkt der beiden unendlichen Differenzen) dx dy".

¿Satisfactorio pues el procedimiento? No ciertamente, pues lo que nos interesaba era obtener la modificación precisa (llámesele <u>diferencial</u> o <u>incremento</u>) que en la función corresponde a las modificaciones dx, dy en las variables. Ahora bien, la fórmula de tal modificación $(x+dx)(y+dy) - xy$ no coincide con la de Newton más que si hacemos abstracción de $dxdy$, es decir, si aceptamos la tesis del caracter infinitesimal relativo. Hegel escribe asímismo:

"Pero, a pesar del nombre de Newton, debe ser permitido decir que semejante operación, si bien muy elemental, es incorrecta (unrichtig). Es inexacto (unrichtig) decir que

$$\left(x + \frac{dx}{2}\right)\left(y + \frac{dy}{2}\right) - \left(x - \frac{dx}{2}\right)\left(y - \frac{dy}{2}\right) = (x+dx)(y+dy) - xy$$

> *Sólo la necesidad de fundamentar el cálculo de las fluxiones en su importancia (den Fluxionkalkül bei seiner Wichtigkeit zu begrunden) pudo ser aquí lo que llevó a un Newton a hacerse ilusiones acerca de semejante demostración".*

Newton, de hecho, al igualar ambas fórmulas está aceptando la legitimidad del abstraer $dxdy$. Simplemente, sus escrúpulos matemáticos le mueven a encontrar una forma más presentable, en verdad encubridora,del asunto. Se trata en suma de guardar las formas, aceptando aquello que esencialmente plantea problemas.

El acceso a un concepto propio de lo que aquí se halla en juego exigirá:

I. Renunciar a la identificación de diferencial de la variable e incremento de ésta.[19]

II. Partir de la noción de incremento considerada como una variable h, proyectable sobre los diferentes puntos x_0, x_1 etc. de estabilización de la variable x.

III. Definir sin ambages $f(x + h) - f(x)$ como incremento de la función, que nada tiene que ver con el, todavía sin sentido, concepto de diferencial de la función.

IV. Establecer el vínculo fraccional

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

V. Operar en esta función con medios estrictamente aritméticos. (Cuando f sea de la forma $f(x) = x^n$ la fórmula del binomio será de gran utilidad.)

VI. Efectuar el paso al límite, del cual emergerá tanto el diferencial de la función como el diferencial de la variable.

VII. Aspecto esencial, observar que los elementos vinculados en lo que así sale, dy, dx, son incategorizables bajo el registro de la magnitud; y como aquello que no es así categorizable, lo es bajo el registro de la cualidad, revisar tal categoría y mostrar que a ella los diferenciales dy. dx responden plenamente.[20]

VIII. Poner de relieve que en la vinculación diferencial y su cifra se nos da la medida (es decir, determinación a la vez cuantitativa y cualitativa) de un devenir de relaciones de una variable de cocientes incrementales.

IX. En fin, señalar que cuando tal devenir corresponde a funciones f potenciales, entonces y sólo entonces se actualiza paradigmáticamente el concepto de variable, asténico mientras lo consideramos fuera del registro funcional y de la vinculación entre elementos e imágenes; asténico asimismo cuando se circunscribe a funciones lineales.

3. Pseudo-derivada y pseudo-diferencial (consecuencias del hacer abstracción de la cualidad.

Hemos intentado poner de relieve las dificultades que conlleva la identificación del incremento de la variable y el diferencial de ésta.

Quisiéramos ahora mostrar cómo la inadecuada concepción de la derivada de una función (es decir, concepción en la que se hace abstracción de la vinculación de orden cualitativo de lo que es indisociable) hace que se vea la derivada en el seno de una fórmula que nos ofrece tan sólo como factor en uno de sus miembros algo que corresponde a la determinación cuantitativa de la derivada. Por otra parte, cuando tal reducción se combina con la mencionada identificación de Δx a dx, entonces la fórmula en cuestión no sólo nos ofrece la derivada, sino asímismo, formando un miembro completo, el diferencial de la función. La clasificación categorial que este trabajo se propone efectuar, exige la inmediata denuncia de tales abusos.[21]

Consideremos una función potencial $f(x) = x^n$ y sea $h(= \Delta x)$ la variable que designa los diferentes incrementos de x.

Tenemos: $$\Delta f(x) = \Delta y = f(x+h) - f(x) = (x+h)^n - x^n$$

Aplicando a $(x+h)^n$ la fórmula del binomio de Newton, el incremento Δy se despliega en conformidad a las potencias sucesivas del incremento h:[22]

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} h^p - x^n =$$

$$= \frac{n!}{0!(n-0)!} x^{n-0} h^0 + \frac{n!}{1!(n-1)!} n^{n-1} h^1 + \frac{n!}{2!(n-2)!} x^{n-2} h^2 + \ldots + \frac{n!}{n!(n-n)!} x^0 h^n$$

$$- x^n = nx^{n-1}h^1 + \frac{(n-1)n}{2!} x^{n-2} h^2 + \ldots + h^n \qquad (*)$$

Hasta aquí todo perfectamente ortodoxo. Sin embargo no suele dudarse en transcribir la fórmula de la siguiente manera:

$$f'(x)\, h + f''(x) \frac{h^2}{2!} + \ldots + f^{(n}(x) \frac{h^n}{n!} \qquad (23)$$

y ahí sí que empiezan las complicaciones, pues n x^{n-1} sólo es $f'(x)$ para $f(x) = x^n$, si por $f'(x)$ entendemos tan sólo una determinación del orden de la magnitud; una determinación que estaba ahí previamente a la operación que vamos a realizar, precisamente sobre el conjunto de la fórmula. La derivada únicamente emerge como resultado de operar algebraicamente sobre la fórmula (*) y por consiguiente <u>no puede en modo alguno constituir un miembro de la fórmula previamente a tal operación</u>. Ello no es ciertamente óbice para que la fórmula ofrezca miembros cuantitativamente coincidentes con la derivada primera segunda, etc... Si a la abusiva identificación de tales miembros a la derivada, añadimos la denunciada ecuación $h = dx$, entonces la fórmula (*) presenta como primer término el diferencial de la función, o sea, entonces se justifica la conceptualmente absurda afirmación, según la cual el diferencial de la función sería la "parte principal" del incremento de la función.

Lejos de que la fórmula (*) sea una suma de diferenciales, relativos a la derivada primera, segunda, etc. diferencial ni derivada alguna se hallan presentes. La derivada va a emerger, una sólo, la primera, precisamente como resultado del sacrificio de casi todos (menos uno) los miembros de nuestra fórmula. Repasemos el procedimiento.

Teníamos: $$\Delta f(x) = n\, x^{n-1}h + \frac{(n-1)n\, x^{n-2}h^2}{2!} + \ldots + \frac{n!\, h^n}{n!}$$

dividiendo por h obtenemos el cociente incremental

$$\frac{\Delta f(x)}{h} = \frac{n\, x^{n-1}h + \frac{(n-1)n\, x^{n-2}h^2}{2!} + \ldots + \frac{n!\, h^n}{n!}}{h} \qquad (**)$$

Sólo el primer miembro del numerador tiene h elevado a la potencia unidad. Al extraer en el numerador el factor común h y al simplificar la fórmula completa obtenemos:

$$nx^{n-1} + \frac{(n-1)n\, x^{n-2}h}{2!} + \ldots + \frac{n!\, h^{n-1}}{n!} \qquad (**bis)$$

En fin, aplicando a (**bis) el procedimiento del paso al límite sobre la base que h tiende a cero, alcanzamos (dado que sólo el primer miembro se halla desprovisto de h en factor):

$$\frac{dy}{dx} = n\, x^{n-1} = f'(x) \qquad (***)$$

¡Ahora sí que tenemos la derivada f'(x)! ¡Ahora sí que tenmos el diferencial!

El diferencial, dy, dx, como simple momento de la vinculación que constituye la derivada, momento que carece *per se* de toda determinación cuantitativa y que por ende no puede ser sino de orden cualitativo.

Nótese que hemos obtenido la derivada como cifra de la intrínseca vinculación de los diferenciales (derivada como unidad de cantidad y cualidad y así como medida) sin "despreciar" nada, sin abandonar nada en camino, y en suma, respetando escrupulosamente las exigencias de la operación matemática.

Obtenemos (aspecto éste importantísimo) inmediatamente la derivada f'(x) y el diferencial dy tan sólo como momento (cualitativo) suyo, mientras que el procedimiento consistente en "descuidar", nos da por el contrario el "diferencial" (pseudo-diferencial) y sólo como factor suyo la "derivada" (asímismo pseudo-derivada).

Este último procedimiento no tiene sentido más que si el incremento h es identificado al diferencial dx,[24] es decir, si aquello que constituye una variable real (eventualmente compleja) queda homologado a lo que no es susceptible de estabilizarse en proyección numérica alguna y por ende no es una variable de magnitud.

Esta homologación de lo que es indiscutiblemente una variable a lo que <u>no puede serlo de ninguna manera</u>, constituye quizá el punto álgido de la contradicción en la que la insuficiencia conceptual ha sumergido al análisis. Naturalmente, una elemental reflexión sobre el concepto de variable haría imposibles tales identificaciones.

NOTAS

1.-(Se trata del Lema II de <u>Phil. Nat. Princip. Math.</u>, Lib. II, de Sir Isaac Newton.)

Así pues, el sentido del Lema es que si tenemos unas cantidades cualesquiera, A,B,C, etc. crecientes o decrecientes y en perpetuo movimiento, y llamamos a,b,c, etc. a los momentos o velocidades de mutación, el <u>momento</u> o mutación del rectángulo AB sería Ab+aB; y el momento de la figura ABC sería ABc + AbC + aBC; y de los valores A^2, A^3, A^4, $A^{1/2}$, $A^{3/2}$, $A^{1/3}$, $A^{2/3}$, $1/A$, y $1/A^{1/2}$, los momentos serían, respectivamente: $2Aa$, $3aA^2$, $4aA^3$, $(1/2)aA^{-1/2}$, $(3/2)aA^{1/2}$, $(1/3)aA^{-2/3}$, $(2/3)aA^{-1/3}$, $-aA^{-2}$, $-(1/2)\ aA^{-3/2}$. En general, para cualquier valor $A^{n/m}$, el momento habrá de ser $(n/m)\ a\ A^{(n-m)/m}$. Y de la misma manera, el momento de la <u>genita</u> A quad.x B, $[A^2B]$, habrá de ser $2aAB + A^2b$; y de la <u>genita</u> $A^3B^4C^2$ el momento será $3aA^2B^4C^2 + 4A^3bB^3C^2 + 2A^3B^4Cc$; y de la <u>genita</u> A^3/B^2 o sea A^3B^{-2} el momento será $3aA^2B^{-2} - 2A^3bB^{-3}$, y así sucesivamente.

El Lema se demuestra ciertamente de este modo:

Caso I.- Un rectángulo cualquiera AB aumentado mediante un movimiento perpetuo en el cual los lados A y B han sido disminuidos en la mitad de los momentos ab: (1/2)a,(1/2)b, vino a ser A -(1/2)a por B -(1/2)b [es decir, $(x-\frac{dx}{2})\cdot(y-\frac{dy}{2})$], o sea AB - (1/2)aB - (1/2)Ab + (1/4)ab [es decir, xy - (ydx)/2 - (xdx)/2 + (dxdy)/4]; y como primeramente los lados A y B fueron aumentados en la otra mitad de los momentos, resultó A + (1/2)a por B + (1/2)b, o sea AB + (1/2)aB + (1/2)Ab + (1/4)ab [es decir, xy + (ydx)/2 + (xdx)/2 + (dxdy)/4]. De este rectángulo se resta el rectángulo anterior y se obtendrá el exceso (resto) aB + Ab. De tal modo, para todos los incrementos, a y b, de los lados, se genera el incremento aB + Ab del rectángulo.

1bis.- El prejuicio relativo a la actitud de Hegel ante las matemáticas ha ganado incluso a los propios estudiosos de Hegel. Así por ejemplo, los traductores de la excelente versión francesa de la edición de 1812 de la <u>Ciencia de la Lógica</u>, llegados a la reflexión sobre el cálculo diferencial, se curan en salud afirmando que ésta provocará ciertamente la irritación del especialista. Preocupación lamentablmente vana, pues dadas las actuales y escandalosas condiciones de división del trabajo intelectual (aceptadas allí - en la Universidad - donde precisamente debería lucharse contra toda genuflexión de la razón), difícil es que un especialista en matemáticas llegue a volcarse sobre la <u>Ciencia de la Lógica</u>... Tan difícil como la recíproca. Convencidos de que despreciar lo equívoco inherente a las lenguas llamadas naturales aleja tanto de la verdad como la renuncia a la exactitud, obligados estamos a denunciar la vanidad de todo aquel que conformándose con un discurso separado intenta escindir el conocimiento matemático del substrato filosófico que en múltiples ocasiones lo legitima y le confiere sentido. No olvidemos que un Cavalieri consigue demostrar proposiciones geométricas apoyándose en la inverificable hipótesis ontológica de la reducción de toda entidad a elementos (relativamente) indivisibles. Permítasenos al respecto citar las siguientes palabras de Abraham Robinson relativas a las controversias sobre el cálculo diferencial:

> "A closer study of the history of the subject reveals that those who actually took part in this dialogue were motivated or influenced quite frequently by basic philosophical attitudes. To them the problem of the foundations of the Calculus was largely a philosophical question, just as the problem of the foundations of the Set Theory is regarded in our time as philosophical no less than technical". (The Metaphysics of the Calculus, in Problems in the Philosophy of Mathematics, North Holland Pub. Amsterdam).

No puede hallarse en efecto lejos la metafísica y aún la ética, de ser cierto que "la clasificación definitiva del infinito no concierne tan sólo al dominio de los intereses científicos especializados, sino que es necesaria para la dignidad misma del intelecto humano", según sentenció Hilbert en su célebre artículo "Sobre el infinito".

2.- Hegel: Ciencia de la Lógica, Ed. Suhrkamp Verlag, Frankfurt, 1964, p.307 Traducción española de R. Mondolfo, Madrid, Buenos Aires.

3.- Con el non-standard analysis por vez primera desde que los infinitesimales preocupan a la ciencia y a la filosofía, el caracter numérico de su esencia es afirmado en base a una construcción lógicamente irreprochable. De ahí la trascendencia ontológica de esa disciplina. De ahí asímismo el interés de confrontar la obra de Robinson con las hipótesis ontológicamente antitéticas de Hegel en su Ciencia de la Lógica. Hegel en efecto se propone asímismo superar el contraste entre indigencia técnica y fertilidad práctica que muestra el análisis ordinario. Su respuesta consistirá esencialmente en una sobredeterminación del marco categorial en el que los diferenciales deban ser interpretados. El cálculo diferencial se convertirá así para él en aval científico de su tesis especulativa según la cual cantidad y cualidad tienen su realidad concreta en la categoría de medida. Pues la fórmula de la derivada expresa un lazo en el cual aquellos que se encuentran vinculados no tienen subsistencia alguna fuera del lazo mismo. De ahí que dy como dx no puedan ser sustituidas por número alguno (a diferencia de lo que ocurre con las fracciones ordinarias); tampoco podrían ser considerados como funciones ni como límites de funciones susceptibles de ser considerados aisladamente; dy, dx remiten para Hegel realmente al infinito, pero ello no por constituir cantidades infinitamente pequeñas, sino por expresar la infinitización de la cantidad misma, es decir su superación de sí o cualificación, pues lo propio de la cualidad es la emergencia de un lazo en el que los enlazados no tienen subsistencia alguna.

Una confrontación de los textos de Robinson y Hegel constituiría la puesta a prueba en un terreno concreto de las potencias respectivas de la lógica de modelos y de la llamada lógica dialéctica. Más allá de la esteril división del trabajo intelectual ello supondría una auténtica gigantomachia peri tes ousias.

4.- El infinitésimo así concebido no puede en ningún caso ser un número. Ciertos manuales hacen excepción para el caso de cero (por ejemplo, M, Salas: Elementos de Matemáticas, p.83: "el cero es el único número al que puede considerársele como un infinitésimo, atendiendo a que el límite de una constante es ella misma") pero ello sólo como resultado del abuso de lenguaje consistente en identificar la función f(x) y la variable independiente y que la expresa.

Ciertamente si consideramos la función constante $f(x) = 0$, entonces, dado que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, cabe decir que 0 como magnitud imagen de x, como función de x, es un infinitésimo, pero no sería correcto decir simplemente que cero es un infinitésimo.

5.- La fórmula $\lim_{h\to a} f(h)=0$ es un todo indisociable. No cabe considerar aisladamente los diferentes momentos por los que pasa la variable h; no cabe pues propiamente hablar de incrementos. De ahí que la misma expresión "función infinitésimo de incrementos" sea ya incorrecta.

6.- Señalemos que el abordaje correcto de la noción de diferencial a partir del límite de cociente incremental y no a partir de cada función incremento por separado nos evitará toda esta complicación.

7.- Preferimos no escribir $\lim_{\Delta x_0\to 0} f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)$, fórmula corriente en muchos manuales (por ejemplo, M.Salas p.304) en la que se pierde de vista cuál es la variable que está determinando tal incremento infinitésimo; aunque tiene ciertamente la ventaja de mostrar que el incremento infinitésimo es una función. Mediante el infinitésimo se atribuye a cada punto x_0 e y_0 una función Δx_0, Δy_0, orientada a cero por la propia orientación de su variable.

8.- La parte restante constituiría una función $0(h)$ donde 0 es el símbolo de Landau cuando h tiende a cero, es decir, $0(h)$ es una función tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{0(h)}{h} = 0. \quad \text{Tenemos pues} \quad \Delta f(x_0) = f'(x)\, h + 0(h)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0)h + 0(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0)h}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{0(h)}{h} = f'(x_0).$$

O sea que $0(h)/h$ es un infinitésimo cuando h tiende a cero. El diferencial de la función sería así el complemento de un infinitésimo en el seno de otro infinitésimo.

9.- De hecho algunos manuales lo sostienen previamente a afirmar el caracter de $df(x)$ en x_0 como parte principal de $\Delta f(x_0)$, otros soslayan el asunto (ejemplos respectivos: el texto americano de Spiegel-Schaum y el español de M. Salas).

10.- En efecto,

1) $df(x)$ en $x_0 = f'(x_0)dx$

2) "parte principal" de $\Delta f(x_0) = f'(x_0)\ \Delta x$

3) $df(x)$ en x_0:parte principal de $\Delta f(x)$, por ende

4) $dx = \Delta x$.

11.- Antes de entrar siquiera en discusión sobre si tal presentación de diferencial se sostiene conceptualmente, quisiéramos denunciar la incompatibilidad que al respecto encontramos en unos u otros manuales de matemáticas. Contradicción que pone en tela de juicio el rigor de que hace alarde tal disciplina y justificaría la frase de Frege de 1904 citada anteriormente.

En efecto, si el diferencial es una función de h, entonces por supuesto cabe considerar la función de h que se encuentra en el polo superior de la fórmula de la derivada independientemente de la que se encuentra en el polo inferior y viceversa; cabe asimismo establecer vínculos con cada una de estas funciones por separado, con respecto a otras funciones o números; cabe eventualmente intentar simplificarlas, sea por separado, sea una respecto a la otra, etc... En definitiva cabe operar con ellas como magnitudes ordinarias y, de hecho, los manuales no se privan de hacerlo.

¿Cómo entonces seguir tolerando en la comunidad matemática y traducir su libro a múltiples lenguas, a alguien que escribe lo siguiente (y no es el único):

"No hace falta decir que las distintas partes de la expresión $\frac{df(x)}{dx}$ carecen de todo significado cuando se consideran separadamente; los d no son números, no pueden simplificarse y la expresión completa no es el cociente de otros dos números, df(x) y dx".

Este párrafo supone más de lo que explicita, a saber, no sólo que no se trata de números, sino que no se trata siquiera de funciones, por ende que no tiene pies ni cabeza afirmar que dx = Δx (función con perfecto significado fuera de $\Delta f(x)$).

12.- Evocamos a Carnot sólo como ejemplo; el problema es bien anterior a él. De ahí que no haya anacronismo en el hecho de referirse a Newton después de hablar de Carnot.

13.- La noción de función infinitésimo es una tentativa de compromiso entre el incremento variable y la referencia a la infinitud. Sin embargo para un punto x_0, la función infinitésimo $\Delta x_0(h) = x_0 + h - x_0$ es simple incremento variable mientras no se proceda al paso al límite. Mas si tal cosa hacemos, el diferencial de la variable es pura y simplemente cero. Es sabido que todo el esfuerzo del cálculo diferencial consiste en evitar tal cosa.

El diferencial no se concibe ni como un número infinitamente pequeño, ni como función infinitésimo, ni como límite de una función infinitésimo relativa a una variable x inmediata.

Diferencial se acercaría en todo caso a su concepción a partir del límite del cociente de dos funciones infinitésimos referidas a dos variables x e y de las cuales un, y, depende de la otra.

En tal límite y, como polo intrínsecamente vinculado (o sea, cualitativamente determinado), sí se da el diferencial.

La noción de límite es finitista (o sea, cuantitativa), si se entiende como límite inmediato de una función infinitésimo; deja de serlo cuando se trata del límite del cociente incremental constituido por el infinitésimo respecto a f(x) y el infinitésimo respecto a x.

14.- Como sostiene A. Badiou en un artículo, por lo demás espléndido, "La subversion infinitesimale", Cahiers pour l'Analyse, 1966, p.127.

15.- Indice de ello es el hecho de que la tentativa conceptualmente más severa para fundar el cálculo diferencial sobre base matemática impecable, sin recurrir a la noción de límite (a saber, la de Lagrange), supuso un sacrificio de la noción de infinitamente pequeño, y con ello la inserción del diferencial en un registro cuantitativo ordinario.

La omisión de miembros se hace en Lagrange: sea en base a consideraciones físicas (cuando la serie $df'(t) + \frac{d^2}{2!} f''(t) + \frac{d^3}{3!} f'''(t) \ldots$ se considera como descriptiva de los componentes del movimiento, pero que sólo a los primeros miembros se les concede un correlato preciso - Théorie des fonctions, 3^{em}p., ch.I, art.4); sea en base a la pequeñez relativa (dado que cada miembro de la serie trasciende en magnitud la suma de todos los miembros posteriores) que no exige la dimensión infinitesimal.

16.- Modificamos la traducción.

17.- Una vez más, tal mitad no tiene sentido más que si el concepto de incremento recubre al de diferencial.

18.- Aumento no menos absurdo que la anterior reducción.

19.- El carácter visiblemente absurdo de tal identificación hace, sin embargo, sospechar que fortísimas razones inclinaban a realizarla.

20.- Al respecto, podríamos justificar con facilidad el siguiente silogismo:
I) A dos polos meramente nulos corresponde como expresión cuantitativa de su lazo una indeterminación.
II) Los polos cuantitativamente nulos que son límites respectivos del infinitésimo de $\underline{y}$ (= f(x)) y del infinitésimo de $\underline{x}$ tienen como expresión cuantitativa de su lazo a $\underline{p}$. Por ende,
III) Dichos polos, cuantitalitamente nulos, no son meramente nulos.

21.- Nos apartamos en este epígrafe del texto de Hegel, pero no excesivamente, pues las fórmulas matemáticas a las que recurriremos son utilizadas por él en el próximo párrafo.

22.- Aplicamos al caso particular de nuestra función la llamada fórmula de Taylor, válida para todo polinomio de coeficientes complejos:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

Sustituyendo x por x+h en donde h es un parámetro, y desplegando cada término $(x + h)^k$, k = n, del segundo miembro, en conformidad a la fórmula de Newton, obtenemos: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n + a_0nx^{n-1}h + a_1(n-1)x^{n-2}h + \ldots$

$$+a_{n-1}h + a_0\frac{n!}{2!(n-2)!}x^{n-2}h^2 + a_1\frac{(n-1)!}{2!(n-3)!}x^{n-3}h^2 + a_0\frac{n!}{n!(n-n)!}x^{n-n}h^n.$$

Agrupando los términos de idénticas potencias de ha obtenemos la fórmula de Taylor, fórmula que evitaremos escribir bajo la forma:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n}(x),$$

y ello por la razón misma que sustenta el presente capítulo (a menos de precisar que f', f" etc. designan algo totalmente diferente de su significado en análisis).

23.- La analogía, que Lagrange creyó ser el primero en descubrir, pero que como él mismo reconoce había sido puesta ya de relieve por Leibniz (al respecto R. Taton en el artículo "Lagrange et Leibniz"), entre el desarrollo $(a+b)^m$ del binomio a+b y el desarrollo del diferencial m-ésimo de un producto xy, $d^m(xy)$, no es pues más que eso, simple analogía, coincidencia en la determinación cuantitativa, pero de ningún modo identidad conceptual.

24.- Pues sólo entonces $\frac{(n-1)n}{2!}x^{n-2}h^2$ por ejemplo, es infinitesimal relativo respecto al infinitesimal $nx^{n-1}h$.

25.- Que increiblemente, se hallan aún presentes en ciertos manuales de Análisis. Presentes sin que la imperiosa necesidad de proseguir, guiados por una intuición aún no plenamente formalizable y conceptualmente legitimada, justifique tales abusos.