LA GEOMETRIA LEIBNICIANA:

DE LA PERSPECTIVA AL ANALYSIS SITUS*

Javier ECHEVERRIA EZPONDA
Facultad de Filosofía y CCEE de San Sebastián
II Congreso Sociedad Española Historia de la Ciencias.

Leibniz permaneció cuatro años de su vida en París (1672-1676) y esta época fue decisiva para su formación como matemático. Josef Ehrenfield Hofmann (*Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris,* Leibniz Verlag, Munich 1949; Introducción al primer tomo de correpondencia matemática de la edición de obras completas de la Academia de Berlín, *Mathematischer, Naturwissenshaftlicher und technischer Breifwechsel,* Akademie Verlag, vol. II, 1, pág. XIX-LXXV, Berlín 1976) ha contribuído enormemente a desentrañar esta época de la actividad leibniciana. Jean Mesnard (*Leibniz et les papiers de Pascal,* Studia Leibnitiana Supplementa. XVII, pág. 45-58, 1981) y René Taton (*L'initiation de Leibniz a la Géométrie, Ibid.,* pág. 103-129) han estudiado más recientemente su formación como geómetra, que también tuvo lugar durante esta etapa de su vida. Pese a que Hofmann centra su atención en el descubrimiento del cálculo diferencial y en la polémica posterior sobre la prioridad del hallazgo entre Leibniz y los discípulos de Newton, lo cierto es que, de soslayo, también aporta datos muy importantes para comprender las diversas influencias que actuaron en la mente del filósofo y matemático alemán ayudándole a concebir su idea de una nueva Geometría, a la que solía llamar *Analysis Situs.*

De acuerdo con los estudios recién mencionados, en 1673 Leibniz todavía no había estudiado a fondo los *Elementos* de Euclides y la *Geometría* de Descartes la comenzó a leer en 1674. Durante su estancia en París se entrevistó en más de una ocasión con Roberval, antes de la muerte de éste,

* La base documental de esta comunicación fue realizada bajo la subvención de la *Fundación Alexander von Himboldt.*

a quien pretendió suceder como miembro de la Academia de Ciencias de París. Roberval fue uno de los escasos críticos, en aquellos tiempos, de la naciente geometría cartesiana, y Leibniz siempre se interesó en su pretensión, entonces tomada a broma, de analizar e intentar demostrar los axiomas y postulados de Euclides, es decir una de las labores previas a la construcción de un *Analysis Situs,* sobre la cual volvió Leibniz en numerosas épocas de su vida.

En tanto crítico de la geometría cartesiana, cuya médula consistía en expresar las figuras geométricas clásicas por medio de ecuaciones, Leibniz descubrió la importancia de las series numéricas (incluído el triángulo de Pascal) como instrumento de una geometría nueva que desbordaba los estrechos límites en la que Descartes la había situado: el *Calcul des Tanscendantes* habilitaba un método para tratar geométricamente figuras que no podían ser reducidas a ecuaciones polinómicas. El convencimiento de que el Algebra cartesiana era insuficiente para dar cuenta de la rica variedad de las figuras geométricas posibles, y por lo tanto la ampliación del concepto de objeto geométrico, fue, durante estos años, el motor de muchas de las investigaciones leibnicianas, que confluyeron, en el ámbito de la Geometría, en la idea de que había que construir una nueva Característica.

Pascal es otra de sus fuentes de inspiración. Desde marzo de 1673, y por consejo de Huygens, Leibniz conoció las *Lettres* del precoz matemático, y a finales del 1675 consiguió acceder, a través de sus depositarios, los hermanos Périer, a diversos manuscritos inéditos de Pascal, entre ellos el célebre *Traité des Coniques* y la *Introduction à la Géometrie,* cuyo texto se conserva gracias a la copia que tomó Leibniz, por haber desaparecido éste y otros originales que Leibniz consultó: para Jean Ytard (*L'introduction à la Géométrie de Pascal, Revue d'Histoire des Sciences XV* (1962), pág. 253-268 y 269-286) este último fragmento pascaliano podría haber sido (aunque no llega a afirmarlo tajantemente) el origen de las ideas leibnizianas de un Cálculo de la Situación. En los manuscritos relativos a la Cónicas se retomaban las ideas del *Brouillon-Project* de Desargues, de quien Pascal se consideró un discípulo en esta materia y cuyos escritos siempre buscó Leibniz, intuyendo en la obra del geómetra de Lyon la posibilidad de una Geometría distinta, que se desarrolló efectivamente en el siglo XIX bajo la denominación de Geometría Proyectiva, o de Situación. En el XVII, sin embargo, los escritos de Desargues quedaron oscurecidos por el éxito del álgebra cartesiana, y fueron entendidos como una contribución técnica al arte de la perspectiva, tal y como éste se aplicaba a la pintura, a la talla de piedras, al trazado de planos de fortificaciones, al sombreado de dibujos, etc.

Tal y como he intentado mostrar en mi comunicación al *Symposium Leibniz de Seyllac* (junio 1981), Leibniz llegó a conocer (sobre todo a través del grabador Abraham des Bosses, pero también por lectura directa) las teorías arguesianas, viendo en ellas un nuevo método para el estudio de las figuras geométricas e interesándose sobre todo en la noción de las rectas paralelas como convergentes en el infinito. A partir de ellas Leibniz concibió una *Ciencia Perspectiva* enormemente general (véase el manuscrito inédito *Scientia Perspectiva* L. Hd. XXXV, vol. XI, Nr. 1, Bl. 1^r, parte del cual aparece transcrita en la mencionada comunicación). Sus tentativas de construirla efectivamente, sin embargo, quedaron en simples bosquejos, pues entre tanto sus propias concepciones sobre una posible Matemática Simbólica (expresión que aparece ya en la *Dissertatio de Arte Combinatoria* de 1666) se habían ido configurando hasta confluir, juntamente con las influencias recién mencionadas, en su célebre proyecto de la *Characteristica Universalis,* en la que se incluye tanto su nueva Geometría (es decir la *Characteristica Geometrica* de 1679, más tarde *Analysis Situs*) como sus Cálculos Lógicos o incluso su Cálculo de las Diferencias: por lo tanto también el Arte Perspectiva, pues para Leibniz los dibujos y las distintas técnicas para el trazado de los mismos están incluidos en dicho proyecto.

En la presente comunicación quiero aportar, entre los diversos manuscritos inéditos relevantes al respecto, un borrador de carta a un destinatario desconocido, a través del cual se puede comprender bastante bien de qué manera Leibniz, sin renunciar a elaborar una Geometría Perspectiva propiamente dicha, logra sintetizar el nuevo método de Desargues y de Pascal con sus propias ideas y en particular con sus críticas a la geometría cartesiana, enunciando a partir de entonces con toda claridad las bases de su *Geometria Situs,* de la que se ocupó, bajo diferentes denominaciones y en función de ideas básicas distintas (congruencia, semejanza, homogeneidad, etc.), durante toda su vida. El fragmento al que alude es el L. Hd. XXXV, vol. 2, 1 Bl. 119 de la catalogación Bodemann y su referencia primera la dio Rivaud en el *Catalogue Critique*, vol. 2, Nr. 1227. Tras una serie de consideraciones que no hacen al caso, dicho fragmento dice así:

LEIBNIZ, L. Hd. XXXV, vol. 2, 1, F. 119. (RIVAUD Cc 2, 1227)

"Los que han buscado la cuadratura del círculo no han encontrado siquiera las vías para intentarlo. La que presento es prometedora y, si no nos llega a dar todo, por lo menos nos permite dar un paso. Como se sabe, la mejor vía para que los problemas de geometría puedan ser tratados, consiste en referirlos a los números. Vieta y Descartes han hecho eso en el caso de los problemas rectilíneos[1], al reducirlos a las ecuaciones de álgebra como si no hubiese que buscar más que números. Pero en el caso de los problemas curvilíneos, cuando se trata de encontrar los centros de gravedad y la dimensión de las líneas curvas, de las figuras y de los sólidos, todavía no se puede introducir en una ecuación la incógnita que se busca. Y las promesas, demasiado optimistas, del Sr. Descartes, quien habla en su Geometría como si todos los problemas se redujesen a ecuaciones, resultan cortas. Esto no pudo dejar de saberlo, pero él creía que la mayor parte de los problemas curvilíneos no pueden ser resueltos; de lo cual se hubiera desengañado si todavía estuviese vivo. Allá donde las ecuaciones fallan, en efecto, la naturaleza nos ha proporcionado otro medio para referir los problemas a números, que consiste en las *progresiones* de números[2], cuya suma hay que encontrar para determinar la magnitud[3] de algunas figuras curvilíneas. Arquímedes fue el primero en utilizarlas para la cuadratura de la parábola: en nuestra época Cavalieri, así como los Sres. Fermat y Wallis, han llevado la cosa más allá. Pero nadie ha podido encontrar una hilera de números que expresase las ordenadas del círculo, que son siempre irracionales. Por eso yo me puse a indagar la existencia de una *figura* equivalente al círculo que fuese racional, *y he tenido la dicha de encontrar una sola. Llamo figura racional* a aquella cuyas ordenadas son racionales cuando las abscisas son racionales. La razón por la cual los que han escrito sobre la geometría de los indivisibles[4] y sobre la aritmética de los infinitos[5] no han hecho la misma observación, estriba en que se está acostumbrado a resolver las figuras únicamente mediante ordenadas paralelas en una infinidad de rectángulos pequeños, mientras que yo he encontrado un medio general de resolver útilmente toda figura en una infinidad de triángulos pequeños confluyentes en un punto, mediante ordenadas convergentes. Pues los Sres. Desargues y Pascal han hecho muy bien en tomar las ordenadas, en su forma general, como líneas convergentes o paralelas, tanto más cuanto que las paralelas pueden ser consideradas como una especie de las convergentes, cuyo punto de concurrencia está infinitamente alejado.

He llegado a esta nueva manera de resolver las figuras gracias al lema: Si por los tres ángulos de un triángulo etc., etc., del cual no doy aquí demostración , ya que cualquier geómetra puede lograrlo por sí mismo"[6].

En el método de Desargues y de Pascal, por lo tanto, Leibniz fue el único que supo vislumbrar, con la enorme claridad que acabamos de ver, la existencia de un nuevo sistema de coordenadas, más general que el sistema cartesiano. La geometría arguesiana contiene virtualemente a la geometría propuesta por Descartes y, al sustituir la figura racional 1 de los dos (o tres) ejes perpendiculares, numerados en función de una unidad de medida, por la figura racional 2, que también constituye un sistema geométrico de referencia (aparte de remitirse directamente al triángulo aritmético de Pascal, y por lo tanto con las series numéricas), la amplía. Desde el punto de vista de Leibniz, la cuadratura del círculo (es decir la definición de 1 o de n mediante una serie convergente) es factible gracias a que el método de análisis, y por lo tanto la figura racional que lo encarna como *organon,* ha cambiado y ha pasado a ser más general.

Leibniz buscó y conoció los manuscritos de Pascal y, en lo que respecta a Desargues, fue una de las personas que más intentó rastrear el destino de sus escritos, buena parte de los cuales se fueron perdiendo tras la decisión

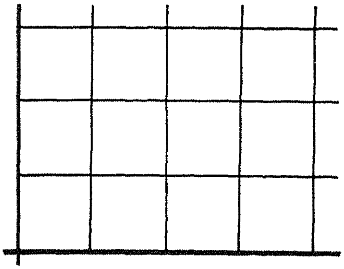


Fig. 1

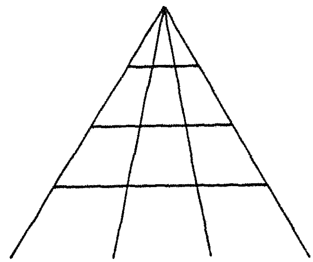


Fig. 2

arguesiana de abandonar la Geometría, a partir de su desdichada polémica con Beaugrand, secretario del rey, y sobre todo con el poderoso editor Langlois, que estaba al servicio de la Casa Real y orquestó una tremenda campaña para desacreditar a Lyonnés, acusándolo de que su *Manière universelle pour faire la perspective* (es decir el método mismo descubierto por Desargues, que implica una Geometría proyectiva naciente) era un plagio de Aleaune, quien estuvo muy lejos de atisbar la generalidad que Desargues (y tras él Pascal) aportaron a la Geometría. El impacto del cartesianismo en Geometría, a partir de 1637, sin embargo, fue tan fuerte que el siglo XVII (con la casi única excepción de Leibniz y La Hire) no llegó a tomar conciencia, ni del nuevo método de análisis geométrico de las figuras clásicas griegas, ni de algunas de sus ideas resultantes más novedosas, como puede ser la noción de punto del infinito.

Las conclusiones que sacó Leibniz de esta fase de su investigación geométrica (que cabe fechar a primeros de 1676, aunque tras su llegada a Hannover todavía trabajó algo en esta dirección) fueron, sin embargo, todavía más generales. Pascal y Desargues mostraban que era posible una geometría más general que la de Descartes, mediante la cual se ofrecía un tratamiento determinado, no sólo de la relación de alineación (en su sentido más amplio de configuración proyectiva), sino también de la relación de curvatura, a través de las series numéricas. La cuadratura de la circunferencia descubierta por Leibniz en 1672 (que fue el origen del Cálculo diferencial tras la invención de las notaciones leibnizianas, que Hofmann sitúa en 1674) y la perspectiva arguesiana, junto con otras influencias, entre las cuales no es de desdeñar la confianza en la Combinatoria como método algorítmico útil para el análisis de las más diversas cuestiones, produjeron un proyecto geométrico más amplio y general al que Leibniz llama *Característica Geométrica* ya en enero de 1676, y al que va a dedicar importantes trabajos en 1679, es decir en el mismo año en que intentó construir una nueva Característica para la Lógica aristotélica. Si estos últimos trabajos, los célebres *Cálculos Lógicos* de abril de 1679, le han convertido en el precursor de la Lógica formal moderna, su Característica Geométrica, rebautizada *Analysis Situs* y *Geometria Situs* en épocas posteriores de su vida, ha suscitado la polémica de si Leibniz ha de ser considerado o no como precursor de la Topología[7].

He intentado mostrar en otros trabajos[8] que, efectivamente, según se desprende de diversos inéditos geométricos que se conservan en Hannover, Leibniz concibió una geometría enormemente general, que desborda las relaciones métricas y que toca cuestiones importantes de topología general (conexión, interior-exterior-frontera, entornos). En la carta a Huygens del 8 de septiembre de 1679 esta pretensión se anuncia explícitamente:

> "Nos hace falta todavía otro análisis propiamente geométrico o lineal que nos exprese directamente *situm* como el álgebra expresa *magnitudinem*. Y creo tener el medio de ello, y que podrían representarse figuras e incluso máquinas y movimientos mediante caracteres, como el Algebra representa los números y magnitudes, y os envío un ensayo que me parece considerable"[9].

Algunos de los borradores inéditos conectados con el Apéndice que Leibniz adjuntó a Huygens en esta carta evidencian con mucha mayor claridad que en el texto mismo del Apéndice que Leibniz buscaba una Geometría que no dependiese de una métrica determinada, sino que resultase válida para infinitas métricas. La noción de distancia medida sobre una recta con una escala punteada no es ya la base de la geometría, puesto que Leibniz *define* la recta en función de otra noción más simple, para él, que no es sino la noción de *situs*. Dicho de otra manera, la noción de recta no es una *noción común*, indefinible, sino que puede ser delimitada junto con las nociones de otras figuras (planos, esfera, circunferencia, punto y espacio) como especie de un género común que sería el *situs*. Al analizar esta última noción (conforme al método puesto en práctica continuamente por Leibniz cada vez se trata de buscar la Característica Universal, el Análisis de las nociones mediante definiciones), surgen sucesivamente, por pura combinatoria, las principales figuras de dos y de tres dimensiones.

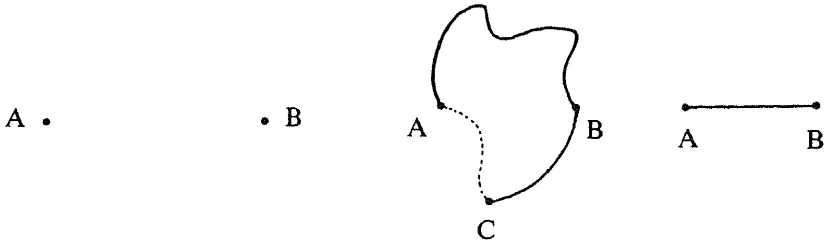
El fragmento 32 de estos inéditos[9] puede dar una idea de la enorme generalidad de la noción leibniziana de *situs*, puesto que, partiendo de la relación de congruencia como primitiva junto con la de *situs*, la recta puede ser definida con todo rigor:

Fragmento 32 (L. Hd. XXXV, vol. I, Nr. 11, f. 47 y 50)

A Designa al puntos A. y B designa al punto B.

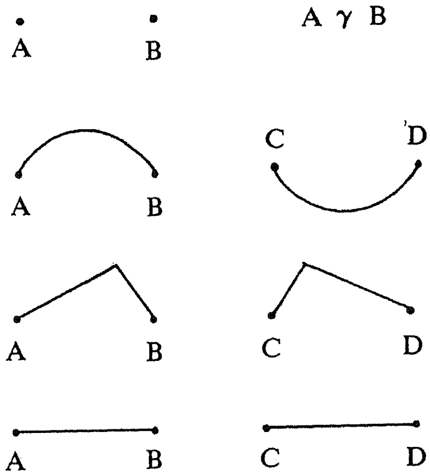
A.B significa el sitio de los puntos A y B entre sí, es decir un cierto extenso que los conecta (no cuenta para nada que sea rectilíneo o curvilíneo), y que en tanto no se mueve, el sitio de los dos puntos entre sí permanece el mismo.

A.B.C., de la misma manera, significa el sitio de los tres puntos A, B y C entre sí, es decir un extenso rígido que los conecta. Y así sucesivamente se puede decir lo mismo de varios puntos.



El signo γ significa congruencia. Así, A γ B significa que el punto A es congruente con el punto B, es decir que puede ser sustituído por dicho punto sin que aparezca ninguna distinción. La proposición A γ B es por consiguiente, siempre verdadera, ya que cualquier punto es congruente con cualquiera otro.

A.B. γ C.D. significa que el sitio entre los puntos A y B es el mismo que el sitio entre los puntos C y D, es decir que el extenso que conecta a A y B también puede conectar al C y D o que otro extenso congruente con el extenso que conecta A y B también puede conectar los puntos C y D. O, dicho de otra manera, los puntos A y B pueden ser transportados al lugar de los puntos C y D sin que varíe el sitio o extenso rígido que los conecta.



Al introducir, poco después, puntos indeterminados, designados mediante las letras X, Y, Z, Leibniz puede definir el plano en función de dos puntos dados, como el lugar expresado por la fórmula A.X γ B.X, y en cuanto a la recta, es definida a partir de tres puntos dados: A.Y γ B.Y γ C.Y. Tal y como lo subrayó Lechalas, estas definiciones leibnicianas de la recta y del plano anticipan en casi dos siglos las que luego permitieron a Lobatchevski descubrir su geometría no euclídea[10].

La relación *situm* entre dos o más puntos aparece en este fragmento (y en otros varios de este período) como una relación de equivalencia entre todos los extensos rígidos que pueden conectar entre sí a dos o más puntos. La longitud de dichos extensos (que se suponen lineales y de ahí que, en el fondo, se trate auténticamente de una Característica geométrica o *lineal*) es indiferente, pues cualquiera de ellos vale como representante de la clase de equivalencia. Ciertamente, en un momento ulterior de su desarrollo teórico, el *Analysis situs* tomará la recta como el extenso rígido más simple entre todos los posibles. Pero la definición *situm* no depende de la idea de recta. La Geometrìa leibniciana puede ser construída perfectamente en un espacio en el que las reglas para medir fuesen curvadas, es decir en un espacio relativístico en el sentido de Einstein.

No voy a insistir, en esta comunicación, en la importancia de este planteamiento, puesto que le he dedicado trabajos más amplios. Tampoco se trata de la opción definitiva elegida por Leibniz, ya que en los inéditos del 1682 y 1684 esta idea se precisa todavía más, y se mejora, superando todavía más la noción de una geometría exclusivamente métrica y aproximándose considerablemente a la noción de topología: puede mostrarse que las bases de entornos son el núcleo que permite el análisis del sitio de un punto, y de sus conexiones con otros puntos que puedan plasmarse en figuras geométricas.

Terminaré pues con unas breves consideraciones sobre el paso dado desde la perspectiva hasta esta nueva geometría naciente, que intenta pensar mediante símbolos las relaciones geométricas cualitativas, por utilizar el lenguaje clásico.

Así como Descartes analizaba y definía las figuras geométricas en función de la figura racional 1, que Desargues y Pascal intentaron mejorar con la figura 2, Leibniz quiere prescindir por completo de los números y de las líneas geométricas como instrumentos de análisis (es decir de los sistemas de coordenadas), definiendo la recta, el plano, la circunferencia, la esfera y en general el resto de las curvas y cuerpos geométricos en función de un nuevo instrumento conceptual, que se compone exclusivamente de signos y fórmulas. El fue el primero que recurrió a lo que hoy en día se llama un sistema formal, y enunció las reglas de escritura del mismo, así como los convenios y las leyes que se derivan de éstos últimos. Un objeto geométrico puede ser pensado por medio de los términos de las lenguas naturales, pero este método de análisis induce numerosos errores, lo mismo en la geometría que en otras ciencias. Descartes tuvo pues razón al prescindir de las palabras (o intentarlo, al menos), reemplazándolas en la medida de lo posible por fórmulas algebraicas, por ecuaciones. Pero Leibniz quere dar un paso más, y por eso pretende construir un instrumento de análisis que permita expresar y estudiar, no sólo las relaciones cuantitativas que mantienen los objetos geométricos entre sí, sino también las relaciones cualitativas: situación, homegeneidad, igualdad de forma, etc. La Característica Geométrica de 1679, y en general el resto de sus investigaciones en torno al *Analysis Situs*, van siempre en esta dirección, y precisamente por ello Leibniz aparece, desde el punto de vista de la historia de la ciencia, ya que no por su influencia efectiva en el desarrollo de la geometría pura, como un precursor de buena parte de las ideas que son constitutivas de esta ciencia en el siglo XX. La concepción según la cual son las letras del alfabeto (junto con otros signos) las que, articuladas en un sistema de escritura esencialmente combinatorio, pueden expresar mejor (más amplia y adecuadamente) la multiplicidad de interrelaciones que caracteriza la geometría de los cuerpos y de las curvas, supone un salto importantísimo con respecto al propio Pascal (o Desargues). Salvo que, como pudo comprobarse en el caso de Huygens, quien no se interesó lo más mínimo en el ensayo geométrico que le envió Leibniz y le aconsejó explícitamente que dedicase su tiempo a otras investigaciones, se produjo fuera de tiempo, cuando nadie estaba en condiciones de entender mínimamente la pretensión misma de la geometría leibniciana. Resulta más extraño, en cambio, que tres siglos después los historiadores de la ciencia sigan en la misma disposición, y la ignorancia respecto a esta geometría leibniciana siga siendo prácticamente general.

NOTAS

1 Es decir las ecuaciones de primer grado.
2 Las series numéricas.
3 *Dimensión* en el texto: el término todavía no tenía un significado técnico.
4 Es decir, Cavalieri.
5 Es decir Wallis.
6 A continuación viene un fragmento tachado en el manuscrito, y se termina el texto, que evidentemente es un borrador de carta.

7 Véase Freudenthal, *Leibniz und die Analysis situs,*, Studia Leibnitiana V. 4 (1972), pág. 61-69.

8 Ver J. Echeverría: *L'Analyse Géométrique de Grassmann et la Caractéristique Géometrique de Leibniz*, Studia Leibnitiana XI/2 (1979), pág. 223-273.

9 Cito en mi propia edición de estos inéditos, contenida en el segundo volumen (*Edition critiques des manuscrits concernant la Caractéristique Céométrique de Leibniz en 1679*) de ,la tesis para el Doctorado de Estado defendida en la Universidad París I (Panthéon-Sorbonne) en junio de 1980 bajo el título *"La Caractéristique Géométrique de Leibniz en 1679"*. Esta tesis está actualmente en curso de edición.

10 G. Lechalas, *Une définition géométrique du plan et de la ligne droite d'après Leibniz et Lobatchevski,* Revue de Métaphysique et de Morale, vol. 20 (1912), pág. 718-721.