

<i>Nereis. Revista Iberoamericana Interdisciplinar de Métodos, Modelización y Simulación</i>	8	83-102	Universidad Católica de Valencia San Vicente Mártir	Valencia (España)	ISSN 1888-8550
--	---	--------	---	-------------------	----------------

Una nueva visita a la aproximación de Arquímedes a π y su relación con las fracciones continuas

Fecha de recepción y aceptación: 30 de octubre de 2015, 26 de noviembre de 2015

Juan Luis González-Santander^{1*}, German Martín González¹

¹ Departamento de Ciencias Experimentales y Matemáticas, Facultad de Ciencias Experimentales y Veterinaria. Universidad Católica de Valencia San Vicente Mártir.

* Correspondencia: Universidad Católica de Valencia San Vicente Mártir. Facultad de Ciencias Experimentales y Veterinaria. Calle Guillem de Castro, 94. 46001 Valencia. España. *E-mail*: martinez.gonzalez@ucv.es



RESUMEN

Se presenta el algoritmo de Arquímedes para la aproximación de π , así como su demostración utilizando funciones trigonométricas. A partir de este algoritmo, se ofrece un sencillo método iterativo para determinar el número mínimo de lados de un polígono regular, tanto inscrito como circunscrito, para que su perímetro se aproxime a π con un error dado. Arquímedes, a lo largo del cálculo en su algoritmo, realiza una serie de aproximaciones racionales: en la iteración inicial (aproximando la raíz cuadrada de 3), en cada una de las aproximaciones racionales de raíces cuadradas de números elevados y en la aproximación final de los racionales obtenidos convirtiéndolos en racionales más simples. Presentamos demostraciones matemáticas de todas estas aproximaciones racionales haciendo uso de las propiedades de las fracciones continuas.

PALABRAS CLAVE: *aproximación a pi, Arquímedes, fracciones continuas.*

ABSTRACT

Archimedes algorithm for approximating π is presented as well as a proof using trigonometric functions. From this algorithm, a simple iterative method for calculating the minimum number of sides of a regular polygon, both inscribed and circumscribed, is provided, so that its perimeter approaches π for a given error. Archimedes, along the calculation in its algorithm, performs a series of rational approximations: in the initial iteration (approximating the square root of 3), in each of the rational approximations of square roots of large numbers and in the approximation of the rationals obtained into more simple rationals. We present mathematical proofs for all these rational approximations by using the properties of continued fractions.

KEYWORDS: *pi approximation, Archimedes, continued fractions.*

INTRODUCCIÓN

Los primeros testimonios escritos sobre una aproximación al número π se encuentran en Egipto y en Babilonia, siendo el error en ambos menor del 1%. En Babilonia, una tablilla de arcilla datada entre el 1900 y el 1600 a. C. contiene un enunciado geométrico que implica el valor de $25/8 = 3,125$ como aproximación a π [1] (p. 167). En Egipto, el papiro de Rhynd, datado alrededor del 1650 a. C. (aunque copiado de un documento fechado en el 1850 a. C.) contiene una fórmula para el área del círculo que aproxima π por el valor $(16/9)^2 \approx 3,16049$ [1] (p. 167). A pesar de ser un testimonio escrito muy posterior a estos primeros testimonios de Egipto y Babilonia, en la Biblia encontramos una aproximación a π mucho más inexacta con un valor de 3 (Cf. 2 Cro 4, 4)¹.

¹ El autor del libro de las Crónicas debió escribir su libro a finales del s. IV a. C. o en la primera mitad del s. III a. C.



La gran contribución de Arquímedes al cómputo de π reside en que propone un método iterativo para su cálculo. Los matemáticos chinos de la Antigüedad ya habían hecho uso de este tipo de métodos para aproximar el valor de ciertas raíces cuadradas. Sin embargo, podemos considerar a Arquímedes como el primero en utilizar, dentro de la cultura helénica, un método iterativo para llevar a cabo este tipo de aproximación para la razón entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia dada.

Este artículo se estructura de la siguiente manera. En la primera sección se describe el algoritmo de Arquímedes para aproximar el valor de π , así como una demostración trigonométrica de este. En la segunda sección se aborda el problema de cómo calcular el número mínimo de lados que ha de tener un polígono, tanto inscrito como circunscrito, a fin de obtener una aproximación de π con un error absoluto dado. En la tercera sección se explica cómo Arquímedes debió de aproximar con racionales el valor de $\sqrt{3}$, tanto por exceso como por defecto, para poder empezar a iterar su famoso algoritmo de aproximación a π . En la cuarta sección se aborda el método con el que Arquímedes debió de aproximar fracciones con numeradores y denominadores elevados utilizando el algoritmo de división de Euclides. En la siguiente sección se aborda el modo que Arquímedes debió de usar para la aproximación de raíces cuadradas de números grandes. Tanto el método de aproximación de fracciones como el de raíces de números grandes son usados repetidamente en el algoritmo de Arquímedes de aproximación a π . Por último, en la última sección se recogen las conclusiones.

EL ALGORITMO DE ARQUÍMEDES

A diferencia de los métodos anteriores para la determinación de π , que proporcionaban un cálculo separado para el perímetro de cada polígono, Arquímedes [2] (p. 93) usa la prop. 3 del libro VI de *Los Elementos de Euclides* [3] (p. 195) para formular un algoritmo que permite calcular el perímetro de un polígono circunscrito de $2n$ lados, sabiendo el perímetro del polígono de n lados. En notación moderna, el método iterativo se describe con el siguiente teorema [4].

Teorema 1 (Arquímedes). Sean p_n y P_n los perímetros de los polígonos regulares de n lados, inscrito y circunscrito respectivamente, en la circunferencia de diámetro unidad. Entonces, se cumple que

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{3}{2}\sqrt{3}, \\ P_3 &= 3\sqrt{3}, \end{aligned} \tag{1}$$

y se satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{2n}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{P_n} + \frac{1}{p_n} \right), \\ p_{2n} &= \sqrt{P_n P_{2n}}, \end{aligned} \tag{2}$$

de tal manera que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \pi. \tag{3}$$

Realizando $k = 5$ iteraciones sobre las relaciones de recurrencia (2) y partiendo de la iteración inicial (1), Arquímedes construyó los polígonos regulares, inscrito y circunscrito, de

$$n = 3 \times 2^k = 96 \text{ lados}, \tag{4}$$



siendo así capaz de establecer la siguiente acotación del número π

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}, \quad (5)$$

lo cual supone un error $< 0,05\%$. Cabe señalar que Arquímedes, a lo largo de su demostración, utiliza aproximaciones racionales de ciertas raíces cuadradas sin proporcionar ningún tipo de prueba. Por ejemplo, para la iteración inicial, utiliza la siguiente acotación

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}, \quad (6)$$

lo cual supone una aproximación excelente, con un error $< 1,5 \times 10^{-5}$. Más adelante proporcionaremos una demostración basada en las fracciones continuas para explicar cómo Arquímedes pudo llegar a (6).

Demostración. Aunque Arquímedes demuestra el teorema 1 de un modo puramente geométrico, para el objetivo de este artículo procederemos a demostrarlo utilizando la notación moderna de las funciones trigonométricas.

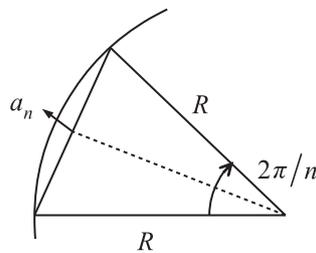


Figura 1. Construcción del polígono inscrito.

Sea a_n el lado del polígono regular inscrito en una circunferencia de radio R . Entonces, debido a que el triángulo de la figura 1 es isósceles, resulta que

$$a_n = 2R \sin\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (7)$$

Por tanto, la aproximación por defecto a π vendrá dada por

$$p_n = \frac{n a_n}{2R} = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (8)$$

Observemos que cuando el número de lados del polígono tiende a infinito, obtenemos precisamente el número π

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \pi, \quad (9)$$



aunque, según la construcción geométrica de la figura 1, es claro que

$$p_n < \pi, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

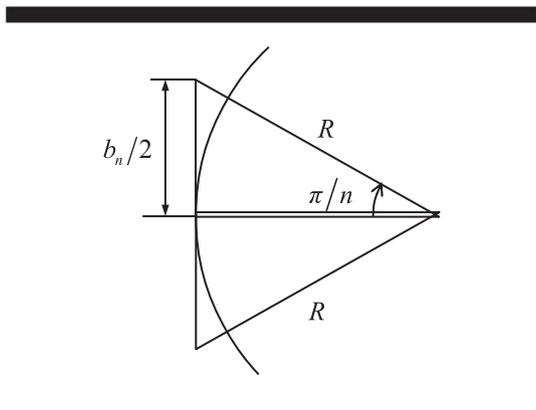


Figura 2. Construcción del polígono circunscrito.

Sea ahora b_n el lado del polígono regular circunscrito en una circunferencia de radio R . Entonces, según la figura 2 resulta que

$$b_n = 2R \tan\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{11}$$

Por tanto, la aproximación por exceso a π vendrá dada por

$$P_n = \frac{nb_n}{2R} = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{12}$$

Observemos que cuando el número de lados del polígono tiende a infinito, volvemos a obtener el número π

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \pi, \tag{13}$$

aunque, según la construcción geométrica de la figura 2, es claro que

$$P_n > \pi, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Es fácil ver que (8) y (12) satisfacen las relaciones de recurrencia dadas en (2). Para comprobarlo, podemos sustituir (8) y (12) en la primera ecuación de (2), para obtener la siguiente identidad trigonométrica

$$\frac{1}{2n \tan x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n \tan 2x} + \frac{1}{n \sin 2x} \right), \quad x = \frac{\pi}{2n}. \tag{15}$$



Ahora, despejando de (15) y haciendo uso de las fórmulas del seno y del coseno del ángulo doble [5] (Ecs. 35:5:2-3), resulta clara dicha identidad

$$\tan x = \frac{\tan 2x \sin 2x}{\tan 2x + \sin 2x} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x}. \quad (16)$$

Lo mismo cabe comprobar sustituyendo (8) y (12) en la segunda ecuación de (2)

$$2n \sin x = \sqrt{2n \tan x \cdot n \sin 2x}, \quad x = \frac{\pi}{2n}, \quad (17)$$

de tal manera que, haciendo uso de nuevo de la fórmula del seno del ángulo doble, la identidad es inmediata

$$2 \sin x = \sqrt{2 \frac{\sin x}{\cos x} 2 \sin x \cos x}. \quad (18)$$

Falta comprobar que la iteración inicial dada en (1) también se satisfice. Efectivamente, particularizando (8) y (12) para $n = 3$ obtenemos (1)

$$p_3 = 3 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3},$$

$$P_3 = 3 \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}. \quad (19)$$

De este modo (8) y (12) son las soluciones para las relaciones de recurrencia dadas en (2) con la iteración inicial que aparece en (1). Debido entonces a (9) y (13), concluimos que se satisfacen los límites dados en (3), tal y como queríamos demostrar.

NÚMERO DE LADOS PARA UN ERROR DADO

A continuación se plantea determinar el número mínimo de lados que ha de tener un polígono, ya sea inscrito o circunscrito, para obtener una aproximación a π con un error absoluto dado ε .

Aproximación por polígonos inscritos

Aproximando con polígonos inscritos, de acuerdo con (10), necesitamos hallar el número mínimo de lados n que cumpla

$$0 < \pi - p_n \leq \varepsilon. \quad (20)$$

Sustituyendo (8) en (20) y operando, resulta que

$$\frac{\sin x}{x} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{\pi}, \quad x = \frac{\pi}{n} > 0. \quad (21)$$



Tomando la igualdad en (21), podemos resolver aproximadamente esta ecuación cuando $x \approx 0$ ($n \rightarrow \infty$), haciendo uso del desarrollo de Maclaurin de la función seno hasta cuarto orden [5] (Ec. 32:6:2), es decir

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \approx \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{\varepsilon}{\pi}, \quad x \approx 0, (x \neq 0). \quad (22)$$

De este modo, resulta la siguiente ecuación bicuadrática

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma \approx 0, \quad (23)$$

cuyas soluciones vienen dadas por

$$x \approx \pm B^\pm(\beta, \gamma) = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma} \right)}. \quad (24)$$

Debido a (21) y a (22), estamos buscando una solución de (24) que cumpla $x \geq 0$ para valores de ε positivos y pequeños, digamos $0 < \varepsilon \leq 10^{-1}$. Por tanto, tenemos que

$$x \approx B^- \left(-20, 120 \frac{\varepsilon}{\pi} \right) = \sqrt{10 - \sqrt{20 \left(5 - \frac{6\varepsilon}{\pi} \right)}}, \quad (25)$$

por lo que el mínimo número de lados n_{\min} que ha de tener un polígono inscrito para que su perímetro se aproxime a π con un error absoluto menor que ε viene dado por

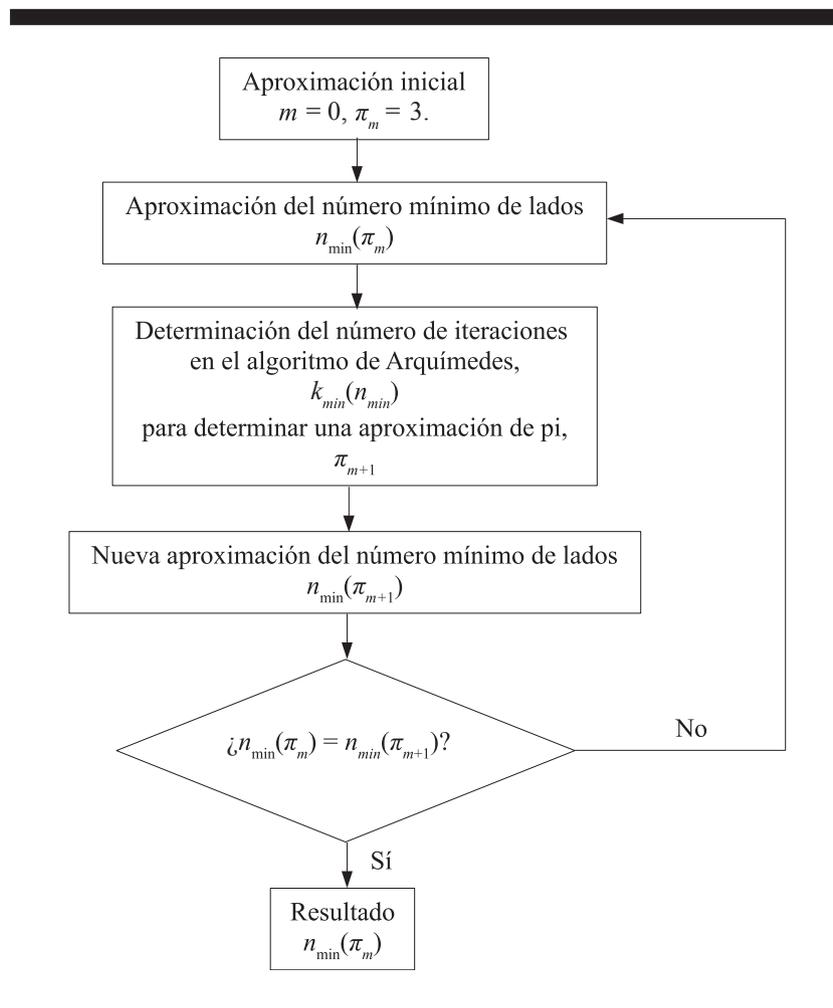
$$n_{\min} \approx \left\lceil \frac{\pi}{\sqrt{10 - \sqrt{20 \left(5 - \frac{6\varepsilon}{\pi} \right)}}} \right\rceil + 1. \quad (26)$$

Para calcular el número mínimo de iteraciones k que necesitamos en el algoritmo de Arquímedes para conseguir un polígono de al menos n_{\min} lados, basta despejar de (4), obteniendo

$$k_{\min} = \left\lceil \log_2 \left(\frac{n_{\min}}{3} \right) \right\rceil + 1. \quad (27)$$

La fórmula (26) resulta ser exacta para el cálculo aproximado de π con tan solo una cifra exacta ($\varepsilon = 0,1$), por lo que también resulta ser exacta si queremos determinar π con más cifras decimales. El gran inconveniente de (26) reside en que necesitamos conocer el valor de π de antemano. Una manera de evitar este inconveniente es realizar un método iterativo en el que se parta inicialmente de la aproximación $\pi \approx 3$, tal y como aparece en la figura 3.



Figura 3. Diagrama de flujo para el cálculo de n_{\min} .

En la tabla 1 podemos ver cómo se van obteniendo las sucesivas cifras de π según vamos reduciendo exponencialmente el valor del error ε . Asimismo, la tabla 1 presenta el número mínimo de lados n_{\min} del polígono regular inscrito para obtener dichas aproximaciones. Merece destacar que el algoritmo propuesto en la figura 3 converge siempre en 1 iteración.

Tabla 1: Número mínimo de lados para un polígono inscrito.

ε	n_{\min}	Aprox. π	iteraciones
10^{-1}	8	3,0284	1
10^{-2}	23	3,12295	1
10^{-3}	72	3,14004	1
10^{-4}	228	3,14146	1
10^{-5}	719	3,14157	1
10^{-6}	2274	3,14159	1
10^{-7}	7189	3,14159	1



Aproximación por polígonos circunscritos

Análogamente a la sección anterior, de acuerdo con (14), tenemos que resolver el mínimo n que satisfaga

$$0 < P_n - \pi \leq \varepsilon. \quad (28)$$

Sustituyendo (12) en (28) y operando, resulta que

$$\frac{\tan x}{x} \geq 1 + \frac{\varepsilon}{\pi}, \quad x = \frac{\pi}{n} > 0. \quad (29)$$

La ecuación que resulta de tomar la igualdad en (29) se podría resolver aproximadamente tomando el desarrollo de Maclaurin de la función tangente, a semejanza de lo que se hizo en la sección anterior. Sin embargo, resulta mejor aproximación utilizar el desarrollo dado en [5] (Ec. 34:6:3) hasta cuarto orden, de tal manera que

$$\exp\left(\frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{90}\right) \approx \frac{\tan x}{x} = 1 + \frac{\varepsilon}{\pi}, \quad x \approx 0, (x \neq 0). \quad (30)$$

Volvemos entonces a obtener una ecuación bicuadrática, en donde, debido a (29) y (30), solo estamos interesados en aquella solución que cumpla $x \geq 0$ para valores de ε pequeños y positivos, es decir

$$x \approx B^+ \left(\frac{30}{7}, \frac{-90}{7} \log \left(1 + \frac{\varepsilon}{\pi} \right) \right) = \sqrt{\frac{3}{7} \left(-5 + \sqrt{25 + 70 \log \left(1 + \frac{\varepsilon}{\pi} \right)} \right)}, \quad (31)$$

por lo que el mínimo número de lados n_{\min} que ha de tener un polígono circunscrito para que su perímetro se aproxime a π con un error absoluto menor que ε viene dado por

$$n_{\min} \approx \left\lceil \frac{\pi}{\sqrt{\frac{3}{7} \left(-5 + \sqrt{25 + 70 \log \left(1 + \frac{\varepsilon}{\pi} \right)} \right)}} \right\rceil + 1. \quad (32)$$

Al igual que en el apartado anterior, podemos aplicar el algoritmo de la figura 3. En la tabla 2 se presentan las sucesivas aproximaciones a π para el caso de un polígono regular circunscrito, así como el número mínimo de lados de dicho polígono para aproximar π con un error absoluto ε .

Tabla 2: Número mínimo de lados para un polígono circunscrito.

ε	n_{\min}	Aprox. π	iteraciones
10^{-1}	11	3,31021	1
10^{-2}	33	3,15165	1
10^{-3}	102	3,14287	1
10^{-4}	322	3,14176	1
10^{-5}	1017	3,14161	1
10^{-6}	3215	3,14159	1
10^{-7}	10167	3,14159	1



APROXIMACIÓN RACIONAL DE RAÍCES CUADRADAS PEQUEÑAS

La acotación de Arquímedes para la $\sqrt{3}$ ha dado lugar a muchas especulaciones [6] (p. 51). Quizás, la explicación más convincente está basada en el desarrollo de una fracción continua equivalente a los números “lado y diámetro” [7] (pp. 91-93). A continuación, detallamos un desarrollo matemático para justificar esta equivalencia para acotar superior e inferiormente con racionales la raíz cuadrada de un número dado $c > 0$. Sea

$$x = \sqrt{c}. \quad (33)$$

Haciendo uso de la identidad

$$(x+1)(x-1) = x^2 - 1 \quad (34)$$

podemos despejar x de la siguiente manera y sustituir recursivamente, obteniendo la siguiente fracción continua

$$x = 1 + \frac{x^2 - 1}{1 + x} = 1 + \frac{x^2 - 1}{2 + \frac{x^2 - 1}{1 + x}} = \dots = 1 + \frac{x^2 - 1}{2 + \frac{x^2 - 1}{2 + \frac{x^2 - 1}{2 + \dots}}}. \quad (35)$$

Teniendo en cuenta (33) en (35), resulta que

$$\sqrt{c} = 1 + \frac{c-1}{2 + \frac{c-1}{2 + \frac{c-1}{2 + \dots}}}. \quad (36)$$

Según la teoría de las fracciones continuas, el n -ésimo aproximante se define como

$$\frac{A_n}{B_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}}}, \quad (37)$$

de tal manera que si la fracción continua es convergente, el valor de dicha fracción continua viene dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n}. \quad (38)$$

Para el cálculo de los sucesivos aproximantes de una fracción continua, tenemos las siguientes relaciones de recurrencia [9] (Ec. 1.4)



$$\begin{cases} A_{n+1} = b_{n+1}A_n + a_{n+1}A_{n-1} \\ A_{-1} = 1, A_0 = b_0 \\ B_{n+1} = b_{n+1}B_n + a_{n+1}B_{n-1} \\ B_{-1} = 0, B_0 = 1 \\ \forall n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (39)$$

Cabe destacar que Wallis en [10] (prop. 191) ya había obtenido expresiones equivalentes a (39). En nuestro caso, según (36) y (37), tenemos que

$$\begin{cases} a_k = c - 1 \\ b_0 = 1, b_k = 2 \end{cases} \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (40)$$

por lo que las ecuaciones de recurrencia (39) tienen coeficientes constantes y se pueden resolver probando soluciones del tipo α^n , llegando a

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{(1 + \sqrt{c})^{n+1} + (1 - \sqrt{c})^{n+1}}{2}, \\ B_n &= \frac{(1 + \sqrt{c})^{n+1} - (1 - \sqrt{c})^{n+1}}{2\sqrt{c}}. \end{aligned} \quad (41)$$

De este modo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = \sqrt{c} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + r^{n+1}}{1 - r^{n+1}} = \sqrt{c}, \quad (42)$$

siendo

$$r = \frac{1 - \sqrt{c}}{1 + \sqrt{c}} < 1. \quad (43)$$

Por tanto, siempre que $c > 0$, la fracción continua dada en (36) converge al valor deseado. Es más,

$$c > 1 \rightarrow r < 0 \rightarrow \frac{A_n}{B_n} = \sqrt{c} \frac{1 + (-1)^{n+1} |r|^{n+1}}{1 - (-1)^{n+1} |r|^{n+1}}, \quad (44)$$

de tal manera que los aproximantes pares quedan por debajo del valor límite \sqrt{c} y viceversa,



$$\frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \sqrt{c} \frac{1-|r|^{2k+1}}{1+|r|^{2k+1}} < \sqrt{c},$$

$$\frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} = \sqrt{c} \frac{1+|r|^{2k+2}}{1-|r|^{2k+2}} > \sqrt{c}.$$
(45)

De todas maneras, las ecuaciones dadas en (41) no son útiles para dar una aproximación racional de \sqrt{c} , pues tenemos que conocer \sqrt{c} de antemano. Sin embargo, podemos utilizar la siguiente fórmula recurrente que relaciona dos aproximantes sucesivos [11] (Ec. 2.2.12),

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = \frac{A_n}{B_n} + \frac{(-1)^n}{B_{n+1}B_n} \prod_{k=1}^{n+1} a_k, \quad \frac{A_0}{B_0} = b_0,$$
(46)

que en nuestro caso, de acuerdo con (40), se reduce a

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = \frac{A_n}{B_n} + \frac{(-1)^n}{B_{n+1}B_n} (c-1)^{n+1}, \quad \frac{A_0}{B_0} = 1,$$
(47)

con

$$B_{n+1} = 2B_n + (c-1)B_{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$B_{-1} = 0, B_0 = 1.$$
(48)

Computando los aproximantes para el caso de $\sqrt{3}$ y teniendo en cuenta (45), resulta que

$$\frac{A_8}{B_8} = \frac{265}{153} < \sqrt{3}, \quad \frac{A_{11}}{B_{11}} = \frac{1351}{780} > \sqrt{3},$$
(49)

lo cual coincide con (6).

¿Quiere decir todo esto que Arquímedes ya conocía las propiedades de las fracciones continuas? No necesariamente. Zeón de Esmirna explica un procedimiento iterativo para la aproximación racional a $\sqrt{2}$ por medio de los números “lado y diámetro” [7] (pp. 91-93). Estos números vienen dados por el sistema de ecuaciones recurrentes dado en (50) (Zeón de Esmirna considera solo $c = 2$) y cumplen el siguiente teorema.

Teorema 2 (Zeón de Esmirna). Considérese el siguiente sistema lineal de ecuaciones recurrente:

$$\begin{cases} d_{n+1} = d_n + c s_n \\ s_{n+1} = d_n + s_n \end{cases} \quad d_1 = s_1 = 1.$$
(50)



Entonces, se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{s_n} = \sqrt{c}, \quad (51)$$

Demostración. Pasaremos a demostrar que los aproximantes d_n/s_n no solo satisfacen (51), sino que coinciden con los aproximantes dados en (41) de la fracción continua (36), por lo que se cumplirá (51) debido a (42). Efectivamente, expresando (50) en forma matricial, tenemos que

$$\begin{pmatrix} d_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n \\ s_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (52)$$

es decir

$$\begin{pmatrix} d_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Diagonalizando, podemos calcular la potencia enésima de la matriz dada en (53) del siguiente modo

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{c} & \sqrt{c} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{c} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{c} & \sqrt{c} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \quad (54)$$

por tanto,

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -\sqrt{c} & \sqrt{c} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-\sqrt{c})^n & 0 \\ 0 & (1+\sqrt{c})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{c} & \sqrt{c} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}. \quad (55)$$

Sustituyendo (55) en (53) y operando, llegamos a

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= \frac{(1+\sqrt{c})^{n+1} + (1-\sqrt{c})^{n+1}}{2}, \\ s_{n+1} &= \frac{(1+\sqrt{c})^{n+1} - (1-\sqrt{c})^{n+1}}{2\sqrt{c}}, \end{aligned} \quad (56)$$

por lo que, comparando (41) con (56), resulta la misma sucesión de aproximantes

$$\frac{d_{n+1}}{s_{n+1}} = \frac{A_n}{B_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (57)$$

tal y como queríamos demostrar. ■



Es muy plausible entonces que Arquímedes haya utilizado el método de Zeón de Esmirna tomando $c = 3$ para la acotación de $\sqrt{3}$ dada en (6).

Observemos, por último, que tanto la fracción continua dada en (36) como el método de Zeón de Esmirna son únicamente útiles para la aproximación racional de raíces pequeñas, pues la convergencia se hace arbitrariamente lenta a medida que el valor de $c \rightarrow \infty$. Podemos comprobar esto viendo el comportamiento del error relativo de la aproximación en cada iteración, el cual definimos como

$$\delta_n = \frac{|A_n/B_n - A_{n-1}/B_{n-1}|}{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n/B_n}, \quad (58)$$

dado que en nuestro caso, según (45), tenemos que los sucesivos aproximantes acotan superior e inferiormente el valor límite, es decir

$$\frac{A_{2n}}{B_{2n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} \leq \frac{A_{2n+1}}{B_{n+1}}. \quad (59)$$

Teniendo en cuenta (42) en (58) y operando llegamos a

$$\delta_n = \left| \frac{1+r^{n+1}}{1-r^{n+1}} - \frac{1+r^n}{1-r^n} \right| = 2 \left| \frac{1}{1-r^{n+1}} - \frac{1}{1-r^n} \right|. \quad (60)$$

Teniendo en cuenta (44), resulta que para $c > 1$

$$\begin{aligned} \delta_n &= 2 \left| \frac{1}{1-(-1)^{n+1}|r|^{n+1}} - \frac{1}{1-(-1)^n|r|^n} \right| \\ &= 2 \left| \frac{1}{(-1)^{n+1}-|r|^{n+1}} + \frac{1}{(-1)^n-|r|^n} \right|. \end{aligned} \quad (61)$$

Ahora bien, como según la definición de r dada en (43), tenemos que

$$\lim_{c \rightarrow \infty} |r| = \lim_{c \rightarrow \infty} \left| \frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}} \right| = 1, \quad (62)$$

resulta que

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{|r| \rightarrow 1} \delta_n = \infty. \quad (63)$$

Por tanto, para valores grandes de c , el error relativo δ_n cometido en el n -ésimo aproximante de la fracción continua (36) se va haciendo arbitrariamente grande, tal y como queríamos comprobar.



SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

La acotación final de π que proporciona Arquímedes en (5) es, en realidad, una simplificación del siguiente resultado

$$3 + \frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} < \pi < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}. \quad (64)$$

Se han propuesto distintos métodos para explicar cómo pudo obtener Arquímedes (5) a partir de (64) (véase, por ejemplo [2] (p. lxxxix)). Probablemente, la explicación más convincente es la que se basa en el algoritmo para la división de Euclides [8]. En esta sección vamos a presentar una justificación matemática para utilizar este algoritmo a fin de acotar superior e inferiormente fracciones con numeradores y denominadores elevados. El algoritmo para la división de Euclides consiste en que si queremos dividir un dividendo $D \in \mathbb{N}$ entre un divisor $d \in \mathbb{N}$, obtenemos un cociente Q_0 y un resto R_0 , tal que

$$\begin{aligned} \frac{D}{d} &= Q_0 + \frac{R_0}{d}, \\ R_0 &= 0, 1, \dots, d-1, \\ Q_0 &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (65)$$

Sustituyendo recursivamente en (65), obtenemos

$$\frac{D}{d} = Q_0 + \frac{1}{\frac{d}{R_0}} = Q_0 + \frac{1}{Q_1 + \frac{R_1}{R_0}} = Q_0 + \frac{1}{Q_1 + \frac{1}{\frac{R_0}{R_1}}} = \dots = Q_0 + \frac{1}{Q_1 + \frac{1}{Q_2 + \dots + \frac{1}{Q_n}}}, \quad (66)$$

donde

$$\begin{aligned} Q_0 &= \left\lfloor \frac{D}{d} \right\rfloor, & R_0 &= D - Q_0 d, \\ Q_1 &= \left\lfloor \frac{d}{R_0} \right\rfloor, & R_1 &= d - Q_1 R_0, \\ Q_{k+1} &= \left\lfloor \frac{R_{k-1}}{R_k} \right\rfloor, & R_{k+1} &= R_{k-1} - Q_{k+1} R_k, \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned} \quad (67)$$

Obsérvese que el algoritmo de Euclides es finito, es decir, $\exists n$ tal que $R_n = 0$. Efectivamente, en cada iteración, el resto es menor que el divisor, por lo que, a semejanza de (65), tenemos que

$$R_{k+1} = 0, 1, \dots, R_k - 1 \rightarrow R_{k+1} < R_k, \quad (68)$$

De este modo, R_k es una sucesión estrictamente decreciente de números enteros no negativos que en algún momento tendrá que anularse. Por tanto,



$$\frac{D}{d} = \frac{A_n}{B_n}. \quad (69)$$

Para ver el comportamiento de los sucesivos aproximantes a la fracción continua finita dada en (66), podemos partir de la siguiente identidad

$$\frac{A_k}{B_k} = \frac{A_0}{B_0} + \sum_{p=1}^k \left(\frac{A_p}{B_p} - \frac{A_{p-1}}{B_{p-1}} \right), \quad (70)$$

de tal manera que, haciendo uso de (46), obtenemos

$$\frac{A_k}{B_k} = b_0 + \sum_{p=1}^k \frac{(-1)^{p+1}}{B_p B_{p-1}} \prod_{\ell=1}^p a_\ell. \quad (71)$$

En nuestro caso, para obtener la fracción continua finita (66) del algoritmo de Euclides, basta tomar los siguientes coeficientes

$$b_p = \begin{cases} Q_p, & 0 \leq p \leq k \\ 0, & p > k \end{cases} \quad a_\ell = \begin{cases} 1, & 1 \leq \ell \leq k \\ 0, & \ell > k \end{cases} \quad (72)$$

de tal manera que

$$\frac{A_k}{B_k} = Q_0 + \sum_{p=1}^k \frac{(-1)^{p+1}}{B_p B_{p-1}}, \quad (73)$$

y la ecuación de recurrencia para los denominadores de los aproximantes dada en (39), se puede expresar como

$$\begin{cases} B_p = Q_p B_{p-1} + B_{p-2}, & p = 1, 2, \dots, k, \\ B_{-1} = 0, B_0 = 1. \end{cases} \quad (74)$$

Observemos que según (67) y (68), $Q_p > 1$, por lo que la sucesión B_p es de términos positivos. De este modo, multiplicando en (74) por B_{p-1} , resulta que

$$B_p B_{p-1} = Q_p B_{p-1}^2 + B_{p-1} B_{p-2} > B_{p-1} B_{p-2} \geq 0, \quad (75)$$

es decir

$$0 < \frac{1}{B_p B_{p-1}} < \frac{1}{B_{p-1} B_{p-2}}. \quad (76)$$



Definiendo ahora

$$h_p = \begin{cases} \frac{1}{B_p B_{p-1}}, & 1 \leq p \leq n \\ 0, & p > n \end{cases} \quad (77)$$

donde n es el índice del último aproximante, en virtud de (76) resulta que $\{h_p\}$ es una sucesión monótona decreciente

$$0 < h_{p+1} \leq h_p, \quad p = 1, 2, \dots \quad (78)$$

y (73), de acuerdo con (69), se puede reescribir como una serie

$$\frac{D}{d} = Q_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} h_p. \quad (79)$$

Podemos aplicar ahora la regla de Leibniz para series alternadas [12] (teorema 10.14), que enunciamos a continuación.

Teorema 3 (Leibniz). Si $\{h_p\}$ es una sucesión de términos no negativos monótona decreciente con límite nulo, entonces

$$S = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} h_p < \infty. \quad (80)$$

Además, si S_k denota la k -ésima suma parcial, tenemos que

$$0 < (-1)^k (S - S_k) < h_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (81)$$

Obsérvese que aplicando el teorema 3 a (79), resulta que

$$S = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} h_p = \sum_{p=1}^n (-1)^{p+1} h_p = S_n. \quad (82)$$

por lo que (81) se escribe como

$$0 \leq (-1)^k (S_n - S_k) \leq h_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (83)$$

obteniéndose la igualdad cuando $k \geq n$. Ahora bien, como según (73) $A_\ell / B_\ell = Q_0 + S_\ell$, a partir de (83) resulta que

$$\frac{A_{2k}}{B_{2k}} \leq \frac{D}{d} \leq \frac{A_{2k+1}}{A_{2k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (84)$$



Es decir, los aproximantes pares subestiman la fracción de partida y los impares la sobrestiman. Aplicando (84) a las fracciones dadas en (64), tenemos que

$$\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < \frac{A_1}{B_1} = \frac{1}{7}, \quad \frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} > \frac{A_2}{B_2} = \frac{10}{71}, \quad (85)$$

por lo que la acotación final de π dada en (5) queda justificada.

APROXIMACIÓN DE RAÍCES CUADRADAS DE NÚMEROS GRANDES

En la sucesivas iteraciones del algoritmo dado en el teorema 1, Arquímedes tiene que aproximar con racionales raíces cuadradas de números grandes (véase tabla 3). Dado que el método descrito anteriormente para la aproximación racional de $\sqrt{3}$ no es numéricamente eficiente para radicandos grandes, a continuación proponemos un método para dicha aproximación, siguiendo estos pasos:

1. Cálculo de la parte entera más próxima de la raíz buscada.
2. Aproximación racional de la raíz a partir del paso 1.
3. Simplificación del racional obtenido en el paso 2 a partir del método explicado en la sección anterior.

Cálculo de la parte entera de una raíz cuadrada

Si la representación decimal de un número $p > 0$ es

$$\begin{aligned} p &= \alpha_0 + \alpha_1 10 + \alpha_2 10^2 + \dots + \alpha_m 10^m, \\ \alpha_k &= 0, 1, \dots, 9, \quad (k = 1, \dots, m-1), \\ \alpha_0 &\in \mathbb{R}, \quad \alpha_m = 1, 2, \dots, 9, \end{aligned} \quad (86)$$

entonces, es fácil ver que se cumple que

$$\sqrt{p} \leq 10^t, \quad t = \lfloor m/2 \rfloor. \quad (87)$$

Por ensayo y error podemos ir probando valores $\beta_t = 1, 2, \dots, 9$, hasta encontrar un valor que satisfaga

$$0 < [\beta_t 10^t]^2 \leq p \leq [(\beta_t + 1) 10^t]^2 \rightarrow \beta_t 10^t \leq \sqrt{p} \leq (\beta_t + 1) 10^t. \quad (88)$$

donde al extraer la raíz cuadrada en (88), el sentido de la inecuación no se ve alterado². Una vez obtenido el valor de β_t , podemos ir probando valores $\beta_{t-1} = 0, 1, 2, \dots, 9$, hasta encontrar un valor que satisfaga

² Por definición, si $f(x)$ es una función creciente en $[a, b]$, entonces si $x > y$ tal que $x, y \in [a, b] \rightarrow f(x) > f(y)$. Aquí hemos considerado que $f(x) = \sqrt{x}$ es una función creciente para $x > 0$.



$$\begin{aligned}
0 < [\beta_i 10^i + \beta_{i-1} 10^{i-1}]^2 \leq p \leq [\beta_i 10^i + (\beta_{i-1} + 1) 10^{i-1}]^2 \\
\rightarrow \beta_i 10^i + \beta_{i-1} 10^{i-1} \leq \sqrt{p} \leq \beta_i 10^i + (\beta_{i-1} + 1) 10^{i-1}.
\end{aligned}
\tag{89}$$

Podemos reiterar este proceso hasta encontrar un valor

$$a = \beta_i 10^i + \beta_{i-1} 10^{i-1} + \dots + \beta_0, \quad a \in \mathbb{N}, \tag{90}$$

de tal modo que

$$a \leq \sqrt{p} \leq a+1 \leftrightarrow a = \lfloor \sqrt{p} \rfloor. \tag{91}$$

Aproximación racional de una raíz

Una vez que hemos encontrado la parte entera de la raíz, podemos afinar el resultado con este lema para obtener una aproximación racional a la raíz buscada (véase [2] (p. lxxxiii) para una justificación de cómo Arquímedes pudo llegar a este lema).

Lema 1. Si $p > 0$, entonces

$$a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{p} < a + \frac{b}{2a}, \tag{92}$$

donde

$$a = \lfloor \sqrt{p} \rfloor, \quad b = p - a^2. \tag{93}$$

Demostración. Notemos que $a, b > 0$, por lo que la acotación superior en (92) se puede escribir como

$$0 < \sqrt{a^2 + b} < a + \frac{b}{2a}, \tag{94}$$

por lo que elevando al cuadrado en (94), el sentido de la desigualdad se conserva³ y simplificando se llega a

$$0 < \left(\frac{b}{2a} \right)^2, \tag{95}$$

que obviamente se cumple. Para demostrar la acotación inferior de (92), observemos, por un lado, que

$$a = \lfloor \sqrt{p} \rfloor \rightarrow 0 < a < \sqrt{p} < a+1, \tag{96}$$

³ Véase nota 2 considerando considerado que $f(x) = x^2$ es una función creciente para $x > 0$.



por lo que elevando al cuadrado en (96), el sentido de la desigualdad se conserva y teniendo en cuenta (93) resulta que

$$0 < b < 2a + 1. \quad (97)$$

Por otro lado, escribiendo la acotación inferior de (92) como

$$0 < a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2 + b}, \quad (98)$$

y elevando al cuadrado, al simplificar obtenemos (97), que ya hemos obtenido que se cumple. ■

En la tabla 3 aparecen las aproximaciones racionales que realiza Arquímedes cuando aplica su algoritmo de aproximación a π . En la segunda columna se ha presentado la acotación debida al cálculo de la parte entera de la raíz y a la aplicación de la desigualdad dada en (92). En la tercera columna aparecen entre llaves los sucesivos aproximantes del algoritmo de división de Euclides para la parte fraccionaria de la raíz. Nótese que aparece recuadrado el aproximante que respeta el sentido de la acotación y que resulta ser el más parecido a la aproximación ofrecida por Arquímedes, produciéndose en tres casos una plena coincidencia. En los casos en que se produce discrepancia, la acotación de Arquímedes va en el sentido adecuado con respecto al valor recuadrado, es decir: $\frac{9}{13} < \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} < \frac{9}{11}$ y $\frac{1}{7} > \frac{1}{8}$.

Tabla 3: Aproximaciones a raíces de números grandes que aparecen en el algoritmo de Arquímedes.

Raíz	Pasos 1 y 2	Paso 3 Algoritmo Euclides	Aproximación Arquímedes
$\sqrt{9082321}$	$< 3013 \frac{2076}{3013}$	$\approx 3013 \left\{ 0, 1, \frac{2}{3}, \frac{9}{13} \dots \right\}$	$< 3013 \frac{3}{4}$
$\sqrt{3380929}$	$< 1838 \frac{2685}{3676}$	$\approx 1838 \left\{ 0, 1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{11} \dots \right\}$	$< 1838 \frac{9}{11}$
$\sqrt{1018405}$	$< 1009 \frac{162}{1009}$	$\approx 1009 \left\{ 0, \frac{1}{6}, \frac{4}{25}, \frac{9}{56} \dots \right\}$	$= 1009 \frac{1}{6}$
$\sqrt{4069284 \frac{1}{36}}$	$< 2017 \frac{35821}{145224}$	$\approx 2017 \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{18}{73} \dots \right\}$	$= 2017 \frac{1}{4}$
$\sqrt{349450}$	$> 591 \frac{1}{7}$	$\approx 3013 \left\{ 0, \frac{1}{7} \right\}$	$> 591 \frac{1}{8}$
$\sqrt{1373943 \frac{33}{64}}$	$> 1172 \frac{3287}{21440}$	$\approx 1172 \left\{ 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{13} \dots \right\}$	$> 1172 \frac{1}{8}$
$\sqrt{5472132 \frac{1}{16}}$	$> 2339 \frac{19377}{74864}$	$\approx 2339 \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{7}{27} \dots \right\}$	$= 2339 \frac{1}{4}$

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado el algoritmo de Arquímedes para la aproximación de π por medio de polígonos regulares inscritos y circunscritos. La gran novedad que presenta este método con respecto a los anteriores es su recursividad.



Utilizando este algoritmo, se ha proporcionado un método iterativo para determinar el número mínimo de lados que ha de tener un polígono regular, tanto inscrito como circunscrito, para poder calcular π con un error dado. Este método resulta ser muy eficiente, porque solo precisa de 1 iteración para converger.

Asimismo, se ha propuesto una fracción continua para el cálculo de raíces cuadradas de números pequeños como el método que debió de utilizar Arquímedes para aproximar racionalmente $\sqrt{3}$, ya que los aproximantes octavo y undécimo de esta fracción continua acotan inferior y superiormente dicha raíz cuadrada. Asimismo, se ha argumentado cómo Arquímedes pudo llegar a este resultado a partir de los números “lado y diámetro” de Zeón de Esmirna.

Por otro lado, se ha argumentado cómo Arquímedes debió de utilizar el algoritmo de la división de Euclides para la simplificación de fracciones con numeradores y denominadores elevados, así como su uso para la aproximación racional de raíces cuadradas de números grandes.

Aunque muchas de las ideas de este artículo se hallan en la bibliografía citada, su gran aportación reside en la demostración matemática de las propiedades de las fracciones continuas para la acotación correcta tanto de raíces como de fracciones, así como su conexión con resultados conocidos para Arquímedes, como los números “lado y diámetro”, el algoritmo de la división de Euclides o la acotación ofrecida en el lema 1.

BIBLIOGRAFÍA CITADA

- [1] J. Arndt, C. Haenel. *Pi Unleashed*. Springer-Verlag, 2006.
- [2] T. L. Heath (ed.). *The Works of Archimedes*. Cambridge University Press, 1897.
- [3] T. L. Heath (ed.). *The thirteen books of Euclid's Elements*, vol 2. Cambridge University Press, 1908.
- [4] G. M. Phillips. Archimedes the numerical analyst. *American Mathematical Monthly* (1981) 165-169.
- [5] K. Oldham, J. Myland, J. Spanier. *An Atlas of functions*. 2.^a ed. Springer, 2009.
- [6] T. L. Heath. *A History of Greek Mathematics*, vol. 2. Clarendon Press, Oxford, 1921.
- [7] T. L. Heath. *A History of Greek Mathematics*, vol. 1. Clarendon Press, Oxford, 1921.
- [8] R. W. Knorr. Archimedes and the measurement of the circle: a new interpretation. *Archive for history of exact sciences* 15 (2) (1976) 115-140.
- [9] H. S. Wall. *Analytic Theory of Continued Fractions*. Chelsea Publishing Company, New York, 1967.
- [10] J. Wallis. *Arithmetica Infinitorum*. Oxford, 1656.
- [11] A. Cuyt, V. Brevik Petersen, B. Verdonk, H. Waadeland, W. B. Jones. *Handbook of continued fractions for special functions*. Springer, 2008.
- [12] T. M. Apostol. *Calculus*, vol. 1. John Wiley & Sons, 1967.

