EL ANALISIS NUMERICO Y LA TEORIA DE LA APROXIMACION EN LA OBRA DE REY PASTOR

Eduardo L. Ortiz

Imperial College

Londres

Introducción

En este trabajo consideramos dos contribuciones matemáticas de Julio Rey Pastor, la primera al Análisis Numérico y la segunda a la Teoría de la Aproximación.

En el primero de esos trabajos Rey Pastor se ocupa del problema de la convergencia del método de Graeffe para la aproximación simultánea de todas las raíces de una ecuación algebraica y en el segundo de un problema de sumación de series que es relevante al estudio de los polinomios degenerados de Bernstein en el campo complejo. Ambos trabajos, aunque de manera diferente, han encontrado eco en la literatura matemática internacional.

El trabajo sobre el método de Graeffe fue publicado en las obras que recogían sus cursos universitarios a partir de 1913 y aunque bien conocido y utilizado por astrónomos en España, sólo tuvo trascendencia internacional a consecuencia de una polémica que únicamente podía atribuirle ya un valor histórico. El segundo, publicado en los canales corrientes de la comunicación científica internacional, tuvo mejor suerte.

No son éstos los únicos trabajos de Rey Pastor en el área de la Matemática de la Aproximación. Sus estudios sobre el problema de Dirichlet en el círculo [1] y sobre la aproximación de raíces complejas y el problema de Kelvin [2], son contribuciones igualmente interesantes. De la primera se ha ocupado en detalle el Profesor A. Dou en la exposición que realizó en este Simposio y del segundo aparecerá próximamente un trabajo de este autor en la Revista de la Sociedad Española de Historia de la Ciencia [3].

Aproximación simultánea de las raíces de ecuaciones algébraicas

El método de Graeffe [4] se propone reducir la resolución de una ecuación algebraica dada, $f(x) = 0$, de grado n al de otra ecuación $F(X) = 0$, también de grado n y llamada transformada de Graeffe de la anterior. Sus raíces están relacionadas por una expresión del tipo $X = x^m$, donde m generalmente se elije igual a 2^k, $k = 1,2,3,...$ Esta elección permite calcular fácilmente los coeficientes de F a partir de los de f.

El método de Graeffe tiene una larga tradición en España; fue introducido por el astrónomo don Miguel Merino y Melchor hacia 1880 [5], en un período de intensa renovación en la matemática española.

Rey Pastor se ocupó de los fundamentos del método de Graeffe en sus lecciones de análisis matemático en la Universidad de Oviedo, dictadas en el curso académico de 1912-1913 a su regreso de una estadía de 11 meses en Alemania. Esas lecciones fueron litografiadas en Madrid en 1915-16 [6] cuando Rey Pastor se trasladó a esa Universidad. Su demostración utiliza solamente recursos elementales y es posiblemente la primera prueba del teorema de fragmentación, corrientemente atribuido a Polya [7], que lo publicó en 1915. Al mencionar esta casi simultaneidad, que es favorable a Rey Pastor, no pretendemos abrir un debate sobre prioridades, pero si nos interesa aportar elementos para caracterizar el estado de desarrollo de la actividad matemática en España en ese período.

La demostración de Rey Pastor y algunos procedimientos prácticos para el uso de ese método fueron utilizados en sus cursos universitarios e incluidos en sus Lecciones de Algebra a partir de la primera edición, en 1924 [8]. Han sido reproducidos nuevamente en la edición de 1931 - 1935 [9], que los contiene en el fascículo I, publicado en 1931.

Su alumno Ricardo San Juan publicó en 1935 una nota anunciando resultados sobre el método de Graeffe en el Boletín del Seminario Matemático Argentino [10] y casi simultáneamente en el Boletín de la Sociedad Matemática de Francia [11]. En 1939 apareció un artículo de San Juan que contenía demostraciones detalladas de los resultados que había anunciado en 1935. Su trabajo se publicó en la Revista Matemática Hispano-Americana [12].

En 1940 Alexander Ostrowski publicó una larga y profunda memoria en Acta Mathematica [13] en la que hacía un análisis detallado del método de Graeffe utilizando recursos de la teoría de las funciones enteras elaborados por Dumas [14], Hadamard [15] y Valiron [16] y hacía uso sistemático de los diagramas de Newton. Entre los puntos discutidos por Ostrowski se encontraban el problema de la determinación del módulo de las raíces de $f(x) = O$ en términos de sus sucesivas transformadas de Graeffe $F(X) = O$; el estudio del efecto del redondeo en las multiplicaciones (requeridas para construir los coeficientes de las sucesivas transformadas) sobre el error en el cálculo de las raíces y el análisis del fenómeno de fragmentación, es decir, la partición de la ecuación original en ecuaciones de grados más bajos, observada ya por los calculistas y que tenía un obvio interés práctico. Con su trabajo Ostrowki enriqueció considerablemente la teoría del método de Graeffe y estableció interesantes conexiones entre éste y otros problemas de la teoría de funciones.

Sin embargo, en su memoria –muy sobria en sus referencias– Ostrowski no daba cuenta del trabajo de Rey Pastor ni del más reciente de San Juan. Este último, que tenía un trabajo sobre otro tema analítico en proceso de publicación en Acta Mathematica, escribió a Ostrowski señalándole la existencia de aquellos trabajos y posiblemente enviándole copias.

Ostrowski publicó en Acta Mathematica de 1942 una nota [17] (que apareció en 1943) en la que agradecía a San Juan por sus observaciones, pero señalaba que la prueba de Rey Pastor se basaba en una acotación del error entre las raíces de $f(x) = O$ y $f(x) = r$ en términos del valor absoluto de r que no era válida raíz a raíz, es decir, que no establecía una correpondencia biunívoca entre las raíces de una y otra ecuación. Justamente, Ostrowski había dado en su memoria un contra-ejemplo (referente a una ecuación cúbica con raíces dobles) que mostraba que una acotación similar del error de las raíces en términos del error en la ecuación no era raíz a raíz. Como el teorema de fragmentación de Rey Pastor se apoyaba en este resultado Ostrowski, lo rechazó como inválido a menos de ser interpretado en un sentido más débil. Con referencia a las cotas obtenidas por San Juan, Ostrowski expresó que eran menos finas que las contenidas en su trabajo, una vez reducidas las de uno y otro autor a una misma nomenclatura.

En una nota que Acta Mathematica publicó conjuntamente con la de Ostrowki, San Juan [18], sin dejar de expresar que la memoria de aquél cubre un área mucho más amplia que la de la suya propia, puntualizó sus discrepancias. En relación con la prueba de Rey Pastor, San Juan se limitó a traducir al alemán el breve trozo de Lecciones de Algebra relevante a la discusión, comentando solamente que la concisión con que está redactada esa obra puede haber sido causa de confusión (efectivamente Rey Pastor mejoró la presentación de su demostración de ese resultado en ediciones posteriores de las Lecciones de Algebra). Con respecto a sus propias contribuciones San Juan señaló con justicia que en los únicos ejemplos que Ostrowski incluye en su memoria las cotas de él son efectivamente más precisas. En un caso de discrepancia, de raíces equimodulares, en el que las cotas de Ostrowski son más finas que las de San Juan, éste hace notar que en su trabajo ha dado acotaciones especiales para ese caso especial.

El interés por el método de Graeffe en España continuó y se propagó a América Latina. En 1943 J. Augé, discípulo de San Juan en Madrid, sometió su tesis de doctorado en la que discutía problemas relativos a ese método [19]. Casi al mismo tiempo José Banini, colaborador de Rey Pastor en Argentina, se ocupó de formulaciones del método de Graeffe en las que las raíces de la ecuación original y las de las transformadas están ligadas por relaciones más generales que potencias de 2. Babini publicó sus resultados en el volumen especial con el que la Universidad Nacional del Litoral celebró los primeros 25 años de Rey Pastor en Argentina [20]. En ese mismo volumen hay también un trabajo de Luis Vigil [21], del Seminario Matemático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid, en el que vuelve sobre los problemas de la demostración de Rey Pastor del lema de acotación de raíces, para el que indica una condición límite con la que éste se verifica raíz a raíz. En 1945 el matemático uruguayo José Luis Massera se ocupó también del método de Graeffe en el Boletín de la Facultad de Ingeniería de Montevideo [22].

No faltaron autores, como Turán [23] y Obreschkov [24], que más tarde reconocieron el mérito de los trabajos de San Juan y Rey Pastor. Sin embargo, las contribuciones de ambos no se integraron sino tardiamente a la discusión del método de Graeffe en la comunidad científica internacional. En el caso de Rey Pastor no cabe duda que la forma utilizada para publicitar sus descubrimientos no ayudó a que estos se difundieran; en el de San Juan obviamente ha habido una omisión de parte de Ostrowski.

Métodos de sumación y polinomios de Bernstein

Sea f(x) una función continua definida en el intervalo compacto [0,1] y n un número entero: $n \geqslant 0$. Para cada valor de n podemos asociar con f(x) el *polinomio de Bernstein* de grado n definido por

$$B_n(x,f) := \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \qquad (1)$$

Los polinomios de Bernstein poseen propiedades interesantes tanto desde el punto de vista teórico como desde el de la aproximación numérica [25]. Con ellos es posible dar una demostración elemental del teorema de Weierstrass [26]. Aunque su convergencia a f(x) es lenta, los polinomios $B_n(x,f)$ tienen la propiedad de preservar la convexidad de f(x) en su intervalo de definición y asimismo de aproximar simultáneamente a f y sus derivadas.

Las propiedades anteriores hacen de esos polinomios una herramienta interesante para el tratamiento de problemas en los que la preservación de la "forma" es más importante que el grado de aproximación [25] [27]. Tal es el caso, por ejemplo, en el diseño de carrocerías de automóviles o fuselajes de aviones. En la literatura técnica se los conoce bajo el nombre de polinomios de Bèzier [28]; su definición se relaciona elementalmente con la de los de Bernstein.

Si en lugar del intervalo [0,1] se considera el [0,b], donde $b < \infty$, la transformación $y = x/b$ nos permite escribir

$$B_n(x,f;b) := \sum_{k=0}^{n} f(kb/n) \binom{n}{k} (x/b)^k (1-x/b)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta_{b/n}^{k} f(0)\,(x/b)^k, \qquad (2)$$

utilizando diferencias finitas sobre una partición de $[0,b]$ con paso $h = b/n$.

En particular, si $f(x)$ posee derivadas de órdenes $r = 1(1)n$ en el punto $x = 0$ y se hace tender b a cero en (2), se obtienen los *polinomios degenerados de Bernstein*

$$A_n(x,f) := B_n(x,f;0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(0)\,(x/n)^k. \qquad (3)$$

Finalmente, los polinomios de Bernstein se pueden definir para funciones de variable compleja $f(z)$ mediante una fórmula análoga a (1), donde z hace el papel de x. Interesa conocer el comportamiento de $B_n(z,f)$ cuando $z \notin [0,1]$, suponiendo que $f(z)$ pertenece a alguna clase particular de funciones en una región que contiene total o parcialmente al intervalo $[0,1]$. Resultados en esta dirección comenzaron a publicarse a partir de 1930.

Bernstein propuso una representación de $B_n(z,f)$ en términos de integrales a lo largo de contornos G contenidos en la región de analiticidad de $f(z)$, las que se pueden calcular por residuos.

Del mismo modo que para el caso real, es posible considerar polinomios degenerados de Bernstein $A_n(z,f)$ definidos en el campo complejo. Su comportamiento cuando $n \longrightarrow \infty$ se puede estudiar utilizando representaciones integrales o pasando al límite en la expresión de $B_n(z,f)$ cuando $b \longrightarrow 0$.

Lorentz [29] propuso un método alternativo que se basa en la consideración de los polinomios de Bernstein como métodos especiales de sumación. Presentado el problema en esta forma, pudo utilizar un resultado de Rey Pastor para el estudio de $A_n(z,f)$ como veremos enseguida. Recordemos antes algunas definiciones relativas a los métodos de sumación clásicos.

Sea $A = (a_{ij})$, $i,j = 0, 1, 2,\ldots$ una matriz real y sea $W = \{w_j\}$ una sucesión numérica. Diremos que W es A-sumable con suma w si para todo n la serie

$$\sigma_n = \sum_{j=O}^{\infty} a_{nj}\, w_j$$

es convergente y si $\sigma_n \longrightarrow w$. Para cada definición particular de los elementos de la matriz A tendremos un método particular de sumación.

Si toda sucesión convergente es A-sumable con suma igual a su límite, el método definido por A se dice permanente o regular, Toeplitz ha dado condiciones necesarias y suficientes para la regularidad de A [30] que se simplifican cuando A es una matriz de elementos no negativos.

Consideremos la serie de Taylor de f(x):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\, x^k/k! := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k.$$

La expresión (3) de A_n (x,f) puede interpretarse como una transformación de la serie de Taylor de f(x). En efecto,

$$A_n(x,f) = \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k!\, \alpha_k/n^k := \sum_{k=0}^{n} \gamma_k\alpha_k, \tag{4}$$

donde

$$\gamma_k := \prod_{r=1}^{k-1} (1 - r/n), \quad \gamma_o = \gamma_1 = 1.$$

Si en lugar de los términos utilizamos la sucesión $W = \{w_k\}$, donde

$$w_k = \sum_{m=0}^{k} \alpha_m,$$

entonces (4) se puede escribir en la forma

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} k\ \gamma_k\, w_k/n := \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\, w_k\ ;\ a_{nk} = \frac{k\ \gamma_k}{n},$$

sus coeficientes definen un método de sumación que es regular y tiene elementos positivos.

En el campo complejo la situación es similar, si

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, z^k := \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k\ ;\quad w_k = \sum_{m=0}^{k} \beta_m$$

entonces A_n (z,f) corresponde a un método de sumación de f(z) en el que

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} k \ \gamma_k \ w_k/n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ k! \ \beta_k/n^k$$

En 1931 Rey Pastor publicó en los Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo [31] uno de sus más elegantes trabajos de Análisis. Se trata de un estudio sobre un método de sumación con factores de la forma

$$a_{nk} = (1 - 1/n)\ (1 - 2/n) \ \ldots \ (1 - (k-1)/n),$$

que el autor aplica a la determinación del dominio de sumabilidad de las series geométrica y de potencias.

Rey Pastor reduce el problema al estudio del comportamiento de la integral sumatríz y muestra que de las tres regiones en las que la curva $|z \exp(1/z)| = e$ (ver Figura 1) divide al plano, la serie geométrica:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k \text{ , donde } \beta_k = 1 : k = 0, 1, 2, \ldots$$

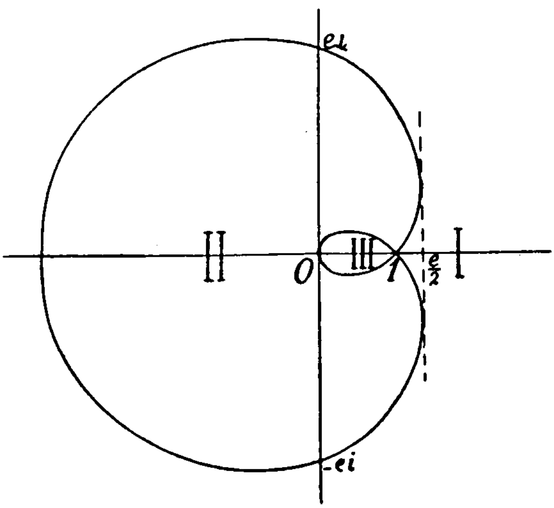

Figura 1 : $|z \exp(1/z)| = e$

es sumable por este método, es decir, con

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(\omega_o + \omega_1) + \sum_{k=2}^{n} k!\,(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})\;w_k/n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\; k!\;\beta_k/n^k, \tag{6}$$

exactamente en la región abierta R' acotada por el bucle exterior de la curva antedicha y que en cada subconjunto cerrado de R' esa serie es uniformemente sumable a 1/(1 - z).

Considera luego el conjunto R, que se deduce de R' aplicando una transformación por radios recíprocos z = l/z' y utilizando resultados sobre la sumatríz de Perron (Rey Pastor presenta también una prueba alternativa basada en resultados sobre factores generalizados de sumación tomados de su memoria [32]) demuestra que el domino de validez esta limitado por la curva | exp(z)/z |=e (ver Figura 2) que es la curva que se obtiene de la anterior utilizando la transformación z = l/z'. Concluye Rey Pastor que el dominio de sumación de la serie geométrica por este método es más extenso que el que dá el método de sumación de Euler, menos extenso que el del método de Perron y que no está contenido completamente en el dominio de Borel. Una vez conocido el dominio de sumabilidad de la serie geométrica, el de la potencial se deduce aplicando el teorema fundamental de los algoritmos de sumación [32]. Finalmente sugiere la posibilidad de realizar esta prueba utilizando la teoría de ecuaciones diferenciales.

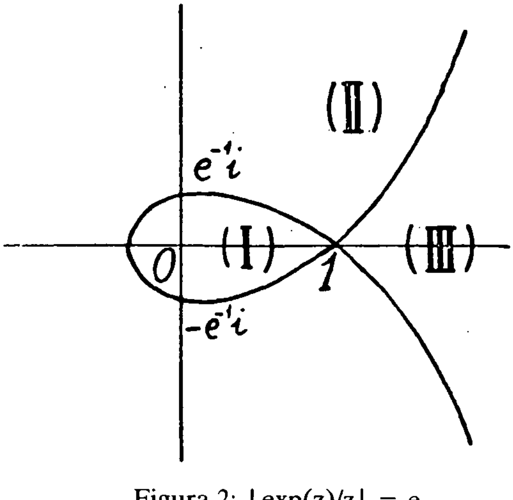

Figura 2: | exp(z)/z | = e

Volvamos a los polinomios degenerados de Bernstein en el campo complejo. Teniendo en cuenta que (5) es idéntico a (6) Lorentz caracterizó el dominio complejo de convergencia de esos polinomios utilizando el resultado anterior de Rey Pastor, aunque su demostración no es idéntica a la de aquél, a quién atribuye el teorema.

Lorentz muestra con ayuda de ese resultado que todo conjunto de convergencia de los polinomios $A_n(z,f)$ para un dominio R arbitrario es autónomo respecto de ese método de sumación, es decir que la serie de potencias de cada función f(z), analítica en R, es sumable por ese método y tiene suma igual a f(z) en R. Con ese resultado concluye su memoria clásica [29] sobre los polinomios de Bernstein.

El artículo de Rey Pastor al que hemos hecho referencia se enmarca dentro de una larga serie de trabajos sobre problemas de sumabilidad de series, algoritmos de convergencia, integrales singulares y estudios comparativos de series e integrales iniciados a principios de la década del 20. Un primer resumen de sus trabajos en esta área lo dio en 1926 en su curso de Matemáticas Superiores de la Universidad de Buenos Aires, que estuvo dedicado al tema: "Series e Integrales". El mismo curso ampliado y actualizado fue repetido en Madrid en 1928. Ese mismo año Rey Pastor presentó un resumen de sus ideas en su ponencia al VI Congreso Internacional de Matemáticos de Bolonia, al que concurrió acompañado por un grupo amplio de sus alumnos de Argentina. Rey Pastor continuó trabajando y publicando en revistas internacionales, sobre problemas relativos a la teoría de la sumación de series divergentes a lo largo de la década del 30 [34]. Los temas tratados por Rey Pastor en ese período tuvieron considerable influencia en el desarrollo y en la temática de la escuela matemática argentina.

AGRADECIMIENTO: El autor desea expresar su agradecimiento a la Profesora Rosario Clement por interesantes discusiones acerca del método de Graeffe mantenidas años atrás cuando fue su alumna en el Imperial College de Londres.

REFERENCIAS

1. J. REY PASTOR, Resolución elemental del problema de Dirichlet para el círculo, Comunicación al Congreso de Valladolid, Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, Madrid,, 1915. Reproducido en Revista de Matemáticas, III, 25, pp. 623-629, Buenos Aires, 1926. Es posible que ésta sea la técnica utilizada por Esteban Terradas para la construcción de tablas relativas a problemas de foto-elasticidad a las que hace referencia L. Villena en Foto-Elasticidad, Madrid, 1943.
2. J. REY PASTOR, Sobre raíces complejas de ecuaciones algebraicas, Revista Matemática Hispano-Americana, serie II, VI, pp. 129-150, Madrid, 1931.

3. E.L. ORTIZ, Sobre la transmisión de algunas ideas de la Matemática de aproximación a España, a publicarse en la Revista de la Sociedad Española de Historia de la Ciencia.

4. C. GRÄFFE, Die Auflösung der Höheren numerischen Gleichungen, als Beantwort einer von der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin aufgestellten Preisfrage, Zurich, 1837, pp. 44+II.

5. M. MERINO, Resolución General de las Ecuaciones Numéricas por el Método de Gräffe, Memoria escrita en alemán por J.F. Encke; Traducida al castellano por D. Miguel Merino, Madrid, 1879, 267, pp. Es una traducción libre muy ampliada de la memoria del astrónomo aleman J.F. Encke, Allgemeine Auflösung der numerischen Gleichungen, J. fur Reine und Angewandte Mathematik, 22, pp. 193, 1841; reproducida en: Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen, 3 vol., I, pp. 125-187, Berlin, 1888-1889.

6. J. REY PASTOR, Resumen de las Lecciones de Análisis Matemático, Universidad de Oviedo, 1912; publicado luego por Artes Gráficas Mateu en Madrid: Resumen de las Lecciones de Análisis Matemático explicadas por J. Rey Pastor en la Universidad de Madrid. Curso de 1915-1916, en edición litografiada en 1915-16.

7. G. POLYA, Sur la méthode de Graeffe, C.R. de la Academie es Sciences, Paris, 156, pp. 1145-1147, 1913 y Ueber das Graeffesche Verfahren, Zeitschrift fur Mathematik und Physik, 63, pp. 275-290, 1915.

8. J. REY PASTOR, Lecciones de Albegra, A. Medina, Toledo, 1924.

9. J. REY PASTOR, Lecciones de Algebra, A. Medina, Toledo, 1931 (Primera Parte) y 1935 (Segunda Parte).

10. R. SAN JUAN, Compléments a la méthode de Graeffe pour la résolution des équations algébrique, Boletín del Seminario Matemático Argentino, Buenos Aires-Madrid, IV, 17, 1934-1935, pp. 55-58, Buenos Aires, 1935.

11. R. SAN JUAN, Compléments a la méthode de Graeffe pour la résolution des equations algébriques, Bulletin des Sciences Mathématiques, 2, LIX, 1935.

12. R. SAN JUAN, Complementos al método de Graeffe para la resolución de ecuaciones algebraicas, Revista Matemática Hispano-Americana, 2a., I, 1939.

13. A. OSTROWSKI, Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynômes et des séries de Laurent, Acta Mathematica, 72, 1-2, pp. 99-155, 1940 y 72, 3-4, pp. 157-257, 1940.

14. G. DUMAS, Sur les fonctions a caractère algébrique dans le voisinage d'un point donné, Thèse, Université de Paris, 1904; Sur quelques cas

d'irreducibilité des polynômes a coefficients rationels, Journal de Mathématiques, 6, 2, 1905, pp. 191-258.

15. J. HADAMARD, Etude sur les propiétés des fonctions entieres et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, Journal de Mathematiques, 4, pp. 171-215, 1893; Sur les fonctions entières, C.R. de la Academie des Sciences, Paris, 135, pp. 1309-1311, 1902.

16. G. VALIRON, Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance regulière, Thèse, Université de Paris, pp. 1-141, 1914.

17. A. OSTROWKSI, Addicion à nostre mémoire: "Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynômes et des séries de Laurent", Acta Mathematica, 72, pp. 183-186, 1942.

18. R. SAN JUAN, A propos du Memoire: "Recherche sur la méthode de Graeffe... etc." par A. Ostrowski, a Bâle, Acta Mathematica, 72, pp. 187-190. 1942.

19. J. AUGE, Investigaciones sobre el método de Graeffe, Trabajos del Laboratorio Matemático de la Facultad de Ciencias, Madrid, 1943.

20. J. BABINI, Sobre la transformación del método de Graeffe, Homenaje a Julio Rey Pastor, Publicación V del Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Litoral, Rosario, I, pp. 45-49, 1945.

21. L. VIGIL, Observaciones sobre un teorema de Rey Pastor sobre el método de Graeffe, Homenaje a Julio Rey Pastor, Publicación V del Instituto de Matemática de la Universidad Nacional del Litoral, Rosario, II, pp. 191-193, 1945.

22. J.L. MASSERA, El método de Graeffe para resolver ecuaciones algebraicas, Boletín de la Facultad de Ingenieria de Monteviedo, III, 1, pp. 1-20, 1945.

23. P. TURAN, On approximate solution of algebraic equations, Publicationes Mathematicae, Institutum Mathematicum Universitatis Debreceniensis, 2, pp. 26-42, 1951-1952.

24. N. OBRESCHKOFF, Verteilung und Berechnung der Nullstellen Reeller Polynome, VEB Deutcher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.

25. P.J. DAVIS, Interpolation and Approximation, Blaisdell Publishing Co., New York, 1963.

26. N.I. ACHIESER, Vorlesungen Ueber Approximationstheorie, 2a. edicion, Akademie- Verlag, Berlin, 1967.

27. ORTIZ, E.L. y DA SILVA, M.R.J., Polynomial approximation of shapes based on condensed reopresentations of Bernstein polynomials in one and several variables, en Multivariate Approximation, D.C. Handscomb, editor, Academic Press, London-New York, pp. 155-167, 1978.

28. P. BEZIER, Numerical control, mathematics and applications, Wiley, New York, 1972.

29. G. LORENTZ, Bernstein Polinomials, University or Toronto Press, Toronto, 1953.

30. G.H. HARDY, Divergent series, Oxford University Press, Oxford, 1949.

31. J. REY PASTOR, Un método de sumación de series, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 55, pp. 450-455, 1931.

32. Algoritmos lineales de convergencia y sumación, Trabajos del Seminario Matemático, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, serie B, Publicación nº 12, Buenos Aires, pp. 52-222, 1931.

33. Para referencias a éstas y otras obras de Rey Pastor en ese período ver: Para una Bibliografía de Don Julio Rey Pastor, E.L. Ortiz y M.E. Ortiz, en este mismo volumen.