LA OBRA JUVENIL DE JULIO REY PASTOR EN ALGEBRA Y EN TEORIA DE NUMEROS

Pascual Llorente
Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen: En este trabajo se analizan las quince publicaciones de Julio Rey Pastor en temas de Algebra y de Teoría de Números, realizadas en el período comprendido entre los años 1905 y 1913. De cada una de las publicaciones consideradas se da la referencia exacta, una idea de su contenido y una primera valoración. Finalmente se adelantan algunas conclusiones del estudio realizado.

1. INTRODUCCION

Revisando alguna de las versiones conocidas del *Curriculum* de Julio Rey Pastor (JRP, para abreviar), se observa que la mayor parte de sus publicaciones en temas de Algebra fueron realizadas en el lapso comprendido entre los años 1905 y 1913. En 1905 JRP publica su primer trabajo siendo un flamente estudiante universitario de 17 años de edad. En 1913, cuando es un joven Catedrático de 25 años, JRP realiza sus aportaciones más valiosas en el área. En este trabajo me propongo analizar esta obra juvenil de JRP en Algebra y en Teoría de Números. Resulta natural dividir este período de la vida de JRP en dos épocas bien diferenciadas: una época de estudiante (1905 a 1909) y una época de postgraduado (1910 a 1913). Trataré por separado cada una de ellas.

Al iniciar un estudio sobre la obra de JRP como el presente, se suelen encontrar dos dificultades: la de determinar *todas* las publicaciones de JRP en el período y en los temas considerados y, luego, la de conseguir los originales correspondientes. Seguramente estas dificultades desaparecerán cuando podamos disponer de la recopilación de las publicaciones de JRP que está preparando Eduardo L. Ortiz. Por mi parte, para superar la primera dificultad he consultado la conocida "Nómina de trabajos científicos de Rey Pastor", publicada en la Argentina y reproducida en el libro *Julio Rey Pastor, matemático* de Sixto Ríos, Luis A. Santaló y Manuel Balanzat (Instituto de España, Madrid, 1979, pág. 253-256). Es muy probable que las quince publicaciones aquí consideradas sean todas las que realizara JRP entre 1905 y 1913 en temas de Algebra y de Teorías de Números, pero no puedo asegurarlo. En cuanto a la segunda dificultad, debo reconocer que me hubiera resultado muy difícil de superar sin la ayuda de mi colega y amigo Mariano Hormigón que me falicitó la mayor parte de los originales. Le agradezco su colaboración en este sentido y también su insistencia y estímulo para que realizara este trabajo.

De cada una de las publicaciones consideradas se da la referencia exacta (que no siempre coincide con la dada en la "Nómina" mencionada anteriormente), una idea de su contenido y una primera valoración o comentario. En la última sección me aventuro a proponer algunas conclusiones derivadas del estudio realizado.

2. PUBLICACIONES DE ESTUDIANTE (1905 a 1909)

En 1903, al cumplir los quince años de edad, JRP termina el Bachillerato en el Instituto de Logroño. Después de un fallido intento de ingresar en la Academia Militar, inicia sus estudios en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza. Para hacer el Doctorado debe trasladarse a Madrid en 1907. Allí se doctora en el año 1909.

Durante esta época de estudiante, JRP publica un número considerable de trabajos. De estas publicaciones, las que se refieren a temas de Algebra y de Teoría de Números son las siguientes:

P.1 Sobre los números consecutivos cuya suma es a la vez cuadrado y cubo perfecto. *Rev. Trim. Mat.*, V (1905), pág. 61-62.

P.2 Fórmulas que dan cuadrados perfectos. *Rev. Trim. Mat.*, V (1905), pág. 241-242.

P.3 Módulo de números divisibles por 5069. *Rev. Trim. Mat.*, VI (1906), pág. 57.

P.4 Algunas consecuencias de la Fórmula de Leibnitz. *An. Fac. Ciencias Zaragoza*, I (1907), pág. 162-167.

P.5 Un problema de mezclas. *An. Fac. Ciencias Zaragoza*, I (1907), pág. 169-172.

P.6 Cúbicas con raíces comunes. *An. Fac. Ciencias Zaragoza*, II (1908), pág. 79-80.

P.7 Sumas de potencias semejantes. *An. Fac. Ciencias Zaragoza*, II (1908), pág. 280-281.

P.8 Un problema de análisis indeterminado cuadrático. *An. Fac. Ciencias Zaragoza*, III (1909), pág. 104-107.

P.9 Sumas de potencias semejantes. *An. Fac. Ciencias Zaragoza*, III (1909), pág. 107.

2.1. **Resolución de cuestiones propuestas**

Desde el año 1901 se publica en Zaragoza la *Revista Trimestral de Matemáticas*. En una de sus secciones se proponían diversas cuestiones y las respuestas correctas que se recibían eran publicadas. Más adelante, la revista inicia una serie de certámenes en los cuales se otorgaban dos premios: uno de honor y otro de estímulo, para quienes "resuelvan mayor número de cuestiones". JRP fue un asiduo colaborador de esta sección de cuestiones propuestas y resueltas. En la página 232 del volumen V (1905) de la revista podemos leer:

> El retraso con que aparece este número nos permite hacer público el resultado del tercer certamen de la R.T.M., en el cual han correspondido el *premio de honor* y el *premio de estímulo*, respectivamente, a los señores D. CLARO ALLUE Y SALVADOR y D. JULIO REY PASTOR, alumnos ambos de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza, por haber resuelto el mayor número, 14 cada uno, de las 35 cuestiones propuestas que fueron objeto del certamen.
>
> ....
>
> Más joven, pero no menos laborioso [que D. CLARO ALLUE], el señor D. JULIO REY, comenzó de un modo sobresaliente sus estudios oficiales en la misma Facultad en el curso de 1904 a 1905, y los continúa en el presente como alumno no oficial, por haberse trasladado su familia a Vitoria, donde actualmente reside. Sus soluciones, de que publicamos ya algunas en este número, son por lo general sencillas y elegantes, y revelan las felices disposiciones del Sr. Rey para el estudio de la Matemática.

La *Revista Trimestral de Matemáticas* suspende su publicación en el año 1906, después de haber publicado 21 cuadernos trimestrales durante algo más de cinco años consecutivos. En ese momento hace su aparición otra revista: *Anales de la Facultad de Ciencias de Zaragoza* que, en muchos sentidos, puede considerarse una continuación de la *Revista Trimestral de Matemáticas*.

De las nueve publicaciones que estamos considerando, ocho son resoluciones de otras tantas cuestiones propuestas. La excepción es la *P.4*. Si bien en las correspondientes referencias he mantenido el título que se les da en la "Nómina" mencionada, es conveniente aclarar que ninguna de estas ocho publicaciones tiene título alguno y que el que ostentan les ha sido adjudicado *a posteriori*, posiblemente con el objeto de incluirlas en el *Curriculum*.

2.2. Comentarios sobre la resolución de cuestiones propuestas

El hecho de ser *P.1* la primera publicación de JRP, parece concederle un interés particular. Así lo entienden los autores del ya mencionado libro *Julio Rey Pastor, matemático*, que la incluyen como documento final (*op. cit.* pág. 311-313). En realidad se trata de la resolución casi correcta de un problema muy elemental:

Hallar los n números enteros consecutivos más pequeños, cuya suma sea a la vez cuadrado y cubo perfecto.

El único punto con algún interés consiste en precisar que, en el caso en que n sea par, el problema tiene solución si y sólo si el exponente del primo 2 en la factorización de n es congruente con 1 módulo 6. Con otras palabras, JRP da cuenta de este hecho.

Lo que llama la atención es que tanto JRP como los responsables de la revista hayan aceptado implícitamente que un número entero que sea a la vez cuadrado y cubo perfecto debe ser positivo. Si se acepta que *cero* también verifica esas condiciones, el problema se trivializa aún más en el caso en que $n = 2m + 1$ sea impar. En efecto, la solución estará dada por los n números enteros desde $-m$ a m.

La cuestión resuelta en *P.2* es la siguiente:

Sean P, Q, R, números enteros expresados en el sistema decimal: P por m cifras iguales a 1, Q por $m + 1$ cifras iguales a 2 y R por $m + 1$ cifras iguales a 8. Demostrar que los números

$$P.10^{m+2} + Q + 2, \qquad P \,.\, 10^{m+2} + R + 1$$

son cuadrados perfectos.

JRP expresa convenientemente los números P, Q y R y luego efectúa un sencillo cálculo algebraico.

En *P.3* se resuelve la siguiente cuestión:

Demostrar que para valores enteros cualesquiera de m y n, el número

$$N = 2^n \,.\, 10^{3m+n} (12480^n \,.\, 10^{8m} - 48^n \,.\, 10^{5m} - 13^n) + 1$$

es siempre divisible por 5069.

JRP factoriza N y luego, observando que $5069 = 37 \,.\, 137$, realiza un simple cálculo congruencial.

En *P.5* se resuelve un problema elemental, pero interesante:

Dos vasos A y A' cuyas capacidades respectivas son V y V' contienen: el primero una mezcla de a litros de vino y b litros de agua, y el segundo una mezcla de a' litros de vino y b' litros de agua. Se transvasa de A' a A una cantidad de líquido suficiente para llenar A; luego se llena de modo análogo A' por medio de A; y en fin se llena otra vez A por medio de A'. Hallar las fórmulas que expresan entonces las cantidades de vino y de agua contenidas en cada vaso.

De las tres soluciones recibidas se eligió la dada por JRP pues: "[Es] la más elegante de las tres, por su generalidad". En efecto, en *P.5* se resuelve el problema más general que consiste en suponer que se realiza un número arbitrario de transvasaciones.

En *P.6* se considera el problema de "demostrar las condiciones necesarias para que dos polinomios cúbicos tengan dos raíces comunes". JRP muestra que se pueden dar diez pares equivalentes de condiciones y da explícitamente dos de las más simples. Luego considera el problema general de hallar las condiciones para que dos polinomios de grados m y n tengan p raíces comunes.

En *P.7* se trata de demostrar una identidad que expresa $S_p^{n-1} = 1^p + 2^p + \dots + (n-1)^p$ en forma de determinante. JRP aplica la fórmula del binomio a $n^p = (1+n-1)^p$ y obtiene un sistema lineal que le permite demostrar la identidad. Observa que por ese procedimiento es posible obtener una infinidad de expresiones análogas y da un ejemplo.

La cuestión que se resuelve en *P.8* es la siguiente:

Determinar tres números x, y, z tales que

$$(y+z)^2 - x^2 = q_1^2;\ (x+z)^2 - y^2 = q_2^2;\ (x+y)^2 - z^2 = q_3^2;$$

siendo q_1, q_2 y q_3 números enteros.

JRP observa que si se trata de un problema diofántico (es decir, si se exige que x, y, z sean números enteros, tal como se exigía en un primer enunciado), sólo tendrá solución si: $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = k^2$ es un cuadrado perfecto. Si se suprime esa restricción (como se hace en el enunciado anterior), la solución es inmediata:

$$x = (q_2^2 + q_3^2)/2k \qquad y = (q_1^2 + q_3^2)/\,2k \qquad z = (q_1^2 + q_2^2)/\,2k$$

Entonces JRP dice: "Para dar algún mayor interés a la cuestión nos referiremos al primer enunciado, investigando las condiciones que deben cumplir los números q_1, q_2, q_3 para que el problema tenga solución, y el modo de hallar dichos números [y las correspondientes soluciones]". Para ello resuelve previamente el problema diofántico

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = K^2 \qquad (*)$$

Finalmente menciona una "identidad curiosa" obtenida por Ugo Dainelli en 1877 que permite obtener soluciones de (*).

He comentado un poco más extensamente esta *P.8* porque creo que revela algunas actitudes características de JRP ante las matemáticas. Sin embargo, debo decir que la solución del problema diofántico (*) que ofrece es muy insatisfactoria y muestra su desconocimiento de los progresos alcanzados en el tema durante el siglo anterior. Para confirmar esta afirmación puede consultarse la clásica *History of the Theory of Numbers* de L. E. Dickson, en particular el Capítulo VII del Volumen II. Allí se observa, también, que la identidad de Dainelli citada por JRP es un caso particular de una fórmula obtenida antes por Catalán (ver, *op. cit.*, pág. 266).

Finalmente, en *P.9* se resuelve la cuestión siguiente:

La suma de las potencias impares semejantes de $2n + 1$ es divisible por $2n + 1$.

Cuando se "traduce", este extraño enunciado asegura que: "Si $q = 2n + 1$ y m son dos enteros positivos impares y $a_1, \ldots, a_q$ *son enteros incongruentes módulo* q, entonces

$a_1^m + a_2^m + \ldots + a_q^m \equiv 0 \pmod{q}$." Cuestión francamente trivial.

2.3. Comentarios sobre el trabajo: "Algunas consecuencias de la Fórmula de Leibnitz".

La "fórmula de Leibnitz" que considera JRP en este artículo es aquella que da el desarrollo de $P^m = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^m$.

Calculando el número N de términos no semejantes en el desarrollo de P^m de dos maneras diferentes, obtiene la identidad

$$\binom{n+m-1}{m} = \sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k} \binom{m-1}{k-1} \qquad (1)$$

donde el primer miembro corresponde al cálculo habitual de N como las combinaciones con repetición $\binom{n}{m}$' y el segundo al cálculo de N ordenando el desarrollo de P^m según el número de factores distintos en cada sumando.

Sumando las identidades (1) para m = 1,2,..., m y operando convenientemente, obtiene la identidad

$$\binom{n+m}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \binom{m}{k} \qquad (2)$$

JRP señala que esta identidad es obtenida, de otro modo, en el libro de E. Lucas *Théorie des nombres*, Tomo I (y único), París, 1891 (reimpreso por Blanchard, París, 1961), pág. 133; y también que es caso particular de otra fórmula obtenida en la misma obra (pág. 74).

Aplicando a (2) la misma transformación que efectuó con la (1) para obtenerla, y haciendo lo mismo con las que resultan, llega a obtener esta otra identidad más general:

$$\binom{m+n+p}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{m+p}{p+k} \qquad (3)$$

que, según afirma, es la de Lucas (pág. 74).

Tomando $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$, obtiene la igualdad

$$n^m = \sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k} s_k \qquad (4)$$

donde s_k es la suma de los coeficientes de todos los términos del desarrollo de P^m formados por k factores distintos de P (k = 1,2,...,m).

De (4) deduce que s_k coincide con la diferencia Δ_0^k de la función $f(n) = n^m$ y, por lo tanto, posee sus mismas propiedades. Reobtiene, entonces, algunos resultados establecidos por Lucas en el Capítulo XIV de su libro y, en particular, la relación entre los s_k y los *números de Bernoulli (op. cit.*, pág. 244. No pág. 144, como indica JRP).

Finalmente, prueba que s_k es divisible por k! y da una breve tabla de los s_k correspondientes a m=1, 2,..., 7.

En resumen, en este trabajo JRP utiliza un particular desarrollo de P^m para reobtener algunas interesantes identidades entre números combinatorios y las igualdades $s_k = \Delta_0^k$. Si bien toda su originalidad puede quedar contenida en su presentación, no debe olvidarse que se trata del trabajo de un joven estudiante de 19 años.

Un punto merece, quizá, un último comentario. Se trata de la afirmación que hace JRP de que su identidad (3) coincide con la fórmula que obtiene Lucas en la pág. 74 de su libro. En efecto, observando que dicha fórmula es la siguiente:

$$\binom{s}{r} = \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k}\binom{s-t}{r-k} \qquad (3)'$$

puede parecer que la afirmación de JRP es un poco apresurada.

Sin embargo, si escribimos: s = m+n+p, r=m y t=n, se tiene la siguiente expresión para (3)':

$$\binom{m+m+p}{m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m+p}{m-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m+p}{p+k}$$

Resulta así que (3) y (3)' son dos expresiones de una misma identidad: la expresión (3) corresponde al caso en que $m \leq n$ y la expresión (3)' al caso en que $m \geq n$.

3. PUBLICACIONES DE POSTGRADUADO (1910 a 1913)

Pocos meses después de obtener el doctorado, JRP comienza su actividad como profesor universitario. Primero como Auxiliar de Geometría en la Universidad de Madrid, luego como Catedrático de Análisis Matemático en la Universidad de Oviedo y, en 1913, como Catedrático de Análisis Matemático en la Universidad Central de Madrid. Simultáneamente, participa en la creación y organización de la Sociedad Matemática Española y de su Revista; y realiza algunos viajes de estudio al extranjero. Durante este período, JRP continúa publicando con asiduidad. De estas publicaciones, las que se refieren a temas de Algebra y de Teoría de Números son las siguientes:

P.10 Caracteres de las formas cuadráticas definidas, con aplicación a varias cuestiones. *Rev. Ac. Ciencias de Madrid*, LX (1911), pág. 540-553.

P.11 Un cuestión de divisibilidad. *Rev. Soc. Mat. Esp.*, I (1911), pág. 146-148.

P.12 El exceso algébrico y la teoría de ecuaciones numéricas. Comunicación al Congreso de Granada. *Asociación española para el progreso de las ciencias*, Madrid, 1911, pág. 187-197.

P.13 Sur la plus grande puissance de p contenue comme diviseur dans $p^n!$. *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, XIX (1912), pág. 98, 283-285.

P.14 L'équation $x^4 - y^4 = 5z^4$. *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, XIX (1912), pág. 98, 190, 206, 281-283.

P.15 Aplicaciones algebraicas de la representación conforme. Comunicación al Congreso de Madrid. *Asociación española para el progreso de las ciencias*, Madrid, 1913, pág. 5-47.

3.1. Una nota didáctica

En *P.10*, JRP observa que en diversas cuestiones, tratadas en cursos diferentes, "es preciso conocer los caracteres distintivos de los polinomios de 2° grado que se conservan constantemente positivos o negativos, los cuales no son conocidos por los alumnos más que en el caso de variable única". Después de señalar los inconvenientes de distraer a los alumnos repitiendo "casi idénticas consideraciones", y la economía que reportaría "obtener dichos caracteres analíticos en su verdadero lugar, esto es, en el Algebra; estando así las conclusiones obtenidas, en disposición de ser aplicadas cuantas veces sea preciso, en toda cuestión que lo requiera, sin prolijas digresiones"; JRP se propone "dar una demostración lo más elemental posible y con toda la apetecible generalidad, de la cuestión antes citada, fundándonos en una sencillísima propiedad de las determinantes". Dicha propiedad, que demuestra rápidamente, es la siguiente:

> Si en una matriz de orden n se sustituye cada elemento por el menor de segundo orden que resulta de suprimir las $n-1$ restantes filas y columnas en la matriz obtenida orlando la primera con una fila y columna de elementos arbitrarios, el nuevo determinante es igual a éste multiplicado por la potencia $n-1$ del elemento común a las líneas agregadas.

Con este resultado obtiene fácilmente las:

> Condiciones de invariabilidad del signo de una forma cuadrática de coeficientes reales, cualesquiera que sean los valores reales, no todos nulos, dados a sus variables.

Que luego aplica para hallar:

> 1º Condiciones para que una ecuación represente en un espacio de n dimensiones una cuádrica imaginaria.
>
> 2º Máximos y mínimos de las funciones explícitas de dos o más variables.
>
> 3º Condiciones de realidad de las raíces de una ecuación algebraica.

Como se observa, la *P.10* es una nota didáctica, interesante y útil como tal, impregnada de las preocupaciones de JRP por la enseñanza y redactada en su estilo claro y preciso; pero que no debería ser incluida dentro de su producción estrictamente científica.

3.2. **Cuestiones propuestas**

Las publicaciones *P.11, P.13* y *P.14* son cuestiones propuestas. Las referencias dadas corresponden a los enunciados de las cuestiones y a las respuestas ofrecidas por otros autores. Los títulos que poseen (y que he respetado) han sido adjudicados *a posteriori*, posiblemente para incluirlas en el *Curriculum*.

La cuestión planteada en *P.11* es la siguiente:

Demostrar que $p^n!$ es divisible por $(p!)^{(p^n-1)/(p-1)}$

En la referencia correspondiente se encuentra la solución enviada por el alumno de la Facultad de Ciencias, D. José de Barinaga. Allí se indica que también se han recibido otras soluciones.

La cuestión planteada en *P.13* está relacionada con la anterior. En la pág. 98 de la referencia sólo se encuentra el enunciado:

> *Quelle est la plus grande puissance de p contenue comme diviseur dans $p^n!$; en supposant p y n nombres entiers quelconques.*

En la pág. 283 se da un enunciado rectificado:

Plus grande puissance de p! contenue dand p^n!

y una observación de H. Brocard. A continuación (pág. 283-285) se encuentra la solución del problema correspondiente al *primer enunciado*, obtenida por Allan Cunningham.

Algunos comentarios sobre las cuestiones planteadas en *P.11* y *P.13* pueden resultar de cierto interés. En el libro de Lucas (*op. cit.*, pág. 365) se demuestra la propiedad:

(m.n)! es divisible por $(m!)^n.n!$; (*)

de la que es fácil deducir la cuestión planteada en *P.11* y dar respuesta a la planteada en *P.13* (enunciado rectificado) en un caso particular:

Si $p = q^k$ es la potencia de un primo, entonces la mayor potencia de p! que divide a p^n! es $(p^n - 1)/(p-1)$. (**)

En *P.11*, Barinaga obtiene estos mismos resultados con un razonamiento diferente, que no utiliza la propiedad (*). En su libro *Análisis Algebraico* (2ª Edición, Madrid, 1922, pág. 99-100), JRP demuestra la propiedad (*) (a la que denomina: *Teorema de Weill*) y propone, como ejercicio, deducir de ella la (**) en el caso en que p es primo (k = 1). Finalmente, en la *Historia* de Dickson (*op. cit.*, Vol. I, Cap. IX) se cita el resultado obtenido por Cunningham en *P.13*, se establece que la propiedad (*) fue demostrada por Weill en 1881 y se informa que la cuestión planteada en *P.13* (enunciado rectificado) fue estudiada por C. de Polignac en 1904.

La cuestión planteada en *P.14* es la siguiente:

L'equation x^4 - y^4 = $5z^4$ a-t-elle d'autres solutions entières que 3:1:2?

Este enunciado es lo que se encuentra en la pág. 98 de la referencia. En la pág. 190 sólo se halla un breve comentario de H. Brocard haciendo notar que en 1873 E. Lucas afirma (sin demostrar) que 3: 1: 2 es la única solución entera de la ecuación. En la pág. 206 G. Lemaire da una respuesta trivial que consiste en decir que 3k, k, 2k son soluciones para todo entero k (!). Finalmente, en las pág. 281-283 se encuentra la solución (afirmativa) del problema obtenida por E. Fauquembergue.

La historia relacionada con problemas de este tipo puede hallarse en la obra de Dickson (*op. cit.*, Vol. II, Cap. XXII). Allí (pág. 634) se encuentra citado el problema como enunciado por Lucas en 1873 y resuelto por Fauquembergue en 1912.

3.3. **Comunicaciones a Congresos**

Sólo quedan por considerar las publicaciones *P.12* y *P.15* que son sendas comunicaciones a los congresos de Granada (1911) y de Madrid (1913).

En el Congreso de Granada JRP presenta también una comunicación

"Sobre la Representación Conforme", publicada en la revista de la *Asociación española para el progreso de las ciencias* (Madrid, 1911, pág. 179-186). Aparentemente se trata de un trabajo en Teoría de Funciones, pero si lo analizamos más detenidamente, vemos que está ligado a los problemas de la teoría de ecuaciones y que, en cierto modo, forma una unidad con *P.12* y *P.15*. En efecto, el objetivo de este trabajo es el de dar una demostración directa del Teorema de Cauchy generalizado, como aplicación del estudio del comportamiento de una transformación definida por una función monógena, en un punto singular:

> Mas siendo uno de los fines que con este desmedrado trabajo perseguimos la demostración directa del teorema de Cauchy por medio de las propiedades de la representación conforme y deducir después todos los fundamentales de la teoría de ecuaciones, (...).
>
> Como aplicación sencilla de lo expuesto, daremos una nueva demostración, puramente geométrica, del clásico teorema de Cauchy, fundamental en la teoría de ecuaciones, con la ventaja, aparte de la brevedad, de ser válida para toda ecuación cuyo primer miembro es una función holomorfa de la variable. *El número de puntos raíces de la ecuación $f(z) = P(x,y) + i\,Q(x,y) = 0$, contenidos en un recinto plano, es igual a la mitad del exceso de la fracción P/Q, cuando z recorre en sentido positivo su contorno.*

El principal objetivo de *P.12* es el de sistematizar la exposición del problema fundamental de la teoría de ecuaciones numéricas, es decir, del problema de determinar el número de raíces reales comprendidas en un intervalo.

> Los esfuerzos cada vez más insistentes encaminados a la determinación segura del número de raíces reales comprendidas en un intervalo dado, fueron ineficaces, como es bien sabido, no logrando Rolle, Fourier, Budan, etc., otra cosa que una determinación aproximada, sólo en algunos casos exacta, del número tan obstinadamente perseguido.
>
> No fueron en modo alguno infructuosas aquellas tentativas (...). Ni aún después de haber dado Sturm su célebre teorema, que coronó tan brillantemente tal serie de esfuerzos, han perdido totalmente su valor los resultados anteriores (...). [Pero] la forma en que suele exponerse la teoría de ecuaciones numéricas, es casi la misma en que fue elaborada. Los antes citados teoremas aparecen en los tratados de Algebra con demostraciones artificiosas, independientes, sin trabazón alguna que revele sus íntimas conexiones.
>
> Extraño parecerá que no se haya nadie preocupado de lograr la necesaria sistematización que echamos de menos. Toda censura sería, sin embargo, injustificada. Dicha sistematización fue lograda hace más de setenta años. El concepto de *índice* o *exceso* debido a Cauchy como derivado de su *teoría de residuos*, fue desarrollado elementalmente por Sturm, Liouville, el abate Moigno, etc., con aplicación inmediata a la demostración de los teoremas clásicos de la teoría de ecuaciones numéricas, la cual, con este procedimiento, adquiere uniformidad y sencillez notables.

En la primera parte del trabajo hace una exposición de la teoría elemental del exceso algebraico que comienza recordando que el *exceso* de una función racional u=f(t)/g(t) en el intervalo (a,b) es la diferencia entre el número de veces que u se hace infinito pasando de negativo a positivo, mientras t recorre el intervalo (a,b), y el número de veces que se hace infinito pasando de positivo a negativo.

y finaliza demostrando un interesante teorema:

A continuación demostramos un teorema, que creemos nuevo, útil para el cálculo aproximado del exceso por medio de las derivadas (...)

El exceso de una fracción en el intervalo (a,b) no puede exceder al número de variaciones [de signo] *perdidas en la serie de derivadas del denominador al atribuir a la variable primero el valor a, extremo inferior del intervalo y luego el b; y cuando es inferior, la diferencia es par.*

En la segunda parte del trabajo, JRP muestra cómo se pueden reobtener los teoremas fundamentales de la teoría de ecuaciones numéricas, de manera breve y coherente, a partir del teorema de Cauchy (demostrado en "Sobre la Representación Conforme") y la teoría del exceso algebraico.

Como señala el mismo JRP en *P.12*, al hacer una exposición coherente y sistemática de la teoría de ecuaciones numéricas, "se nota la falta de un teorema que sirva en la obtención de raíces imaginarias, como el de Fourier en las reales." En *P.15* retoma esta cuestión y obtiene una solución completa y satisfactoria.

Comienza su trabajo mostrando, con una serie de ejemplos que:

Toda la teoría de ecuaciones numéricas gira, pues, en torno de este principio: hecho el estudio general de la función entera en un cierto intervalo (a,b), se reduce a éste el de cualquier otro (a',b') mediante una transformación proyectiva de uno en otro.

Después de dar ejemplos de la aplicación a otras ramas del análisis de las transformaciones lineales de un intervalo en otro, define el tema de su investigación:

En todas las cuestiones citadas, y muchas otras omitidas, la transformación se refiere a variables reales. Muy otra se presenta la cuestión en el campo complejo; las funciones lineales sólo permiten representar recintos muy especiales. El problema correlativo de la transformación de unos intervalos en otros sería este: Dados dos recintos cualesquiera simplemente conexos, hallar una función analítica que transforme uno en otro. Mas este dificilísimo problema, uno de los que más han preocupado a los analistas posteriores a Riemann, es de índole esencialmente trascendente y, por tanto, se sale fuera del campo del Algebra. Debemos,pues, limitarnos a considerar aquellos recintos especiales que se pueden representar por medio de funciones algebraicas; y más concretamente, las transformaciones lineales o proyectivas.

Establecida esta limitación obligada, ocurre inmediatamente preguntar: ¿desempeña en Algebra la transformación de unos recintos en otros el mismo importante papel que la transformación de intervalos reales? Iniciamos con la presente Memoria este tema, que parece ser nuevo en la literatura matemática.

En el Capítulo I da la idea fundamental del método basado en la representación conforme, y remarca:

En esta idea sencillísima se apoyan esta Memoria y las sucesivas sobre el mismo tema. Desde luego, la transformación de ecuaciones ha sido aplicada siempre, y es tan antigua como el Algebra; la novedad estriba precisamente en considerar, no ya los *intervalos* transformados, sino los *recintos*. Algunos ejemplos aclararán esta diferencia.

Como ejemplos considera el método de Sturm-Liouville y el criterio de Jacobi, en cuanto a transformaciones lineales, y luego la transformación racional general de Tschirnhausen; para concluir:

Vemos, pues, en estos ejemplos, cómo del estudio de la función entera en un semiplano, se deduce el de cualquier otro recinto representación conforme del mismo. Los semiplanos más sencillos, tratándose de ecuaciones de coeficientes reales, son los definidos por el eje imaginario. Nuestro problema aparece, pues, en la siguiente forma concreta:

1º Estúdio general de la función algebraica entera en cada uno de los semiplanos determinados por el eje imaginario.

2º Aplicación a los recintos transformados de éstos por funciones algebraicas.

En el Capítulo II resuelve un problema "de suma importancia en varias cuestiones de Mecánica (movimientos oscilatorios, problemas de estabilidad, etc.)" y que JRP llama:

Problema de Lord Kelvin: Dada una ecuación de coeficientes reales, averiguar cuántas raíces tienen su parte real positiva, y cuántas la tienen negativa.

La idea desarrollada por JRP es la de utilizar, como antes, la teoría del exceso de Cauchy. Para ello tiene que superar dos dificultades: 1) Aplicación del teorema de Cauchy a un recinto infinito, y 2) Cálculo de las funciones de Sturm.

La primera la resuelve, mediante un cálculo ingenioso, para el semiplano de las x negativas, que es el único recinto que necesita considerar. Para resolver la segunda demuestra una propiedad de ciertos determinantes especiales que llama *bigradientes*.

En el Capítulo III utiliza la resolución del Problema de Lord Kelvin, obtenida en el capítulo anterior, y el método de la transformación conforme para resolver el problema de la *separación* y *cálculo* de las raíces complejas de una ecuación algebraica con coeficientes reales.

Finalmente, en el Capítulo IV, aplica la teoría precedente a las ecuaciones de tercero y cuarto grado.

Esta *P.15* constituye, seguramente, la mayor aportación de JRP al Algebra. Me he limitado a ofrecer una visión global del trabajo, tratando de mostrar brevemente sus ideas y su contenido, sin entrar en un análisis más detallado del mismo, para no sobrepasar más los límites de extensión impuestos a esta comunicación. El lector interesado, puede consultar la memoria original o la Sección 12 del libro *Lecciones de Algebra* (5ª Edición, Madrid, 1960, pág. 84-96) de JRP, donde encontrará una exposición de parte de sus resultados.

4. CONCLUSIONES

Tal vez la conclusión más significativa que se puede extraer del estudio realizado sea la de reafirmar la necesidad de someter la obra de JRP –especialmente su obra científica– a un proceso serio de valoración, de clasificación y de depuración. De las quince publicaciones que hemos considerado, sólo sus comunicaciones a los congresos de Granada y de Madrid merecen quedar incluidas en una nómina de trabajos científicos que pretenda reflejar las contribuciones de JRP a la ciencia matemática, y muchas de las otras pueden ser ignoradas sin pérdidas mayores.

En cuanto a los temas tratados en estas publicaciones, observamos un predominio cuantitativo de los problemas de la teoría de números clásica y elemental, un predominio cualitativo de los problemas de la teoría de ecuaciones algebraicas, y una ausencia total de problemas, de lenguaje y de métodos del álgebra abstracta (estructuras algebraicas). Esto refleja, de alguna manera, una determinada actitud hacia el Algebra y una concepción de su objeto que, aparentemente, se encuentran presentes en JRP desde sus años de formación. En lo que se refiere a su interés por la teoría de números, no parece que haya perdurado más allá de esta época juvenil.

Por último, podemos observar cómo en muchas de estas primeras publicaciones se encuentran ya algunas de sus preocupaciones más características por la presentación y el estilo, por la generalización, por la sistematización y la coherencia, por la historia de las matemáticas y por la enseñanza. También puede observarse su preocupación por producir y publicar de manera sistemática y continua.