CONTRIBUCION DE JULIO REY PASTOR AL TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN

Eladio Domínguez
Universidad de Zaragoza

1. Las técnicas de la Topología Geométrica tienen el inconveniente de estar muy cercanas a la intuición. Por ello, una demostración no muy cuidada puede caer en el error de apoyarse fuertemente en la intuición para dar por cierto un silogismo no probado. Algunos de estos silogismos pueden ser tan evidentes (como, por ejemplo, el que afirma que una recta divide el plano en dos regiones) que prácticamente no necesitan su demostración. Pero su empleo sucesivo nos puede conducir erróneamente a una afirmación, cuya demostración no sólo no es evidente sino que, en algunos casos, puede ser falsa. Podemos encontrar numerosos ejemplos en la Topología que prueban lo anterior, pero quizás sea el llamado Teorema de la curva de Jordan uno de los más claros exponentes. La historia de su demostración geométrica ha sido larga y penosa, sucediéndose numerosas pruebas que intentaban presentar el rigor matemático de su contenido. Otro de los inconvenientes de la mayoría de las demostraciones geométricas de dicho teorema ha sido la dificultad intrínseca de su generalización a dimensiones superiores. El objetivo de este artículo consiste en hacer notar que la demostración que J. Rey Pastor presentó, bajo el título "Teorema de Jordan para las variedades poliédricas regulares", en el volumen IX, año 1943 (págs. 89-95), de la Revista de la Unión Matemática, resuelve cumplidamente, en el caso poliedral, los dos inconvenientes que acabamos de señalar. Como veremos, ello le da cierta preponderancia sobre las demostraciones que presentaron G.T. Whyburn (1942), R. Courant y H. Robbins (1941), y F. Severi (1931).

Claramente, una circunferencia métrica divide al plano en dos regiones (el conjunto de puntos cuya distancia al centro es estrictamente menor que el radio, y el de los puntos cuya distancia es estrictamente mayor) de tal modo que dos puntos cualesquiera de una región se pueden unir por una curva (es decir, una imagen continua de un intervalo) mientras que toda curva que une dos puntos situados en distintas regiones corta siempre a la circunferencia dada. El teorema de la curva de Jordan trata de probar que cualquier subespacio homeomorfo a una circunferencia divide al plano en dos regiones que cumplen las anteriores propiedades.

Dada la validez intuitiva del teorema que tratamos y su íntima relación con los fundamentos de la Topología, es natural que los matemáticos aceptaran sin demostración dicha propiedad, hasta que en 1865, C. Neumann (4) planteó explícitamente dicho problema. Sin embargo, hubo que esperar a los años 1887-1893 en los que C. Jordan presentó, en su célebre libro "Cours d'Analyse", una demostración larga, penosa y conteniendo, sin prueba, diversos supuestos, de los que el más grave fue el del teorema para el caso poligonal. Parece ser que la primera demostración completa fue presentada por O. Veblen (8) en 1905 a la que, por su complicado desarrollo, le siguieron diversos intentos de simplificación.

2. Debido a que R.P. Boas realizó una recensión (ver Math. Reviews, vol. 5, 1944, pág. 105) del artículo de J. Rey Pastor que considero desacertada, he creído conveniente integrar la demostración completa del caso plano, para que el lector pueda juzgar con mayor precisión. J. Rey Pastor escribe:

"Tracemos por todos los vértices paralelas a una misma dirección, distinta de las de todos los lados, la cual adoptaremos como dirección del eje x; y sean $y=y_i$ $(y_1<y_2<\ldots<y_n)$ las ecuaciones de estas rectas. Cada lado AB de la poligonal tiene sus extremos en dos de estas rectas, e introduciendo vértices intermedios puede suponerse que cada dos vértices consecutivos de la poligonal están en rectas consecutivas.

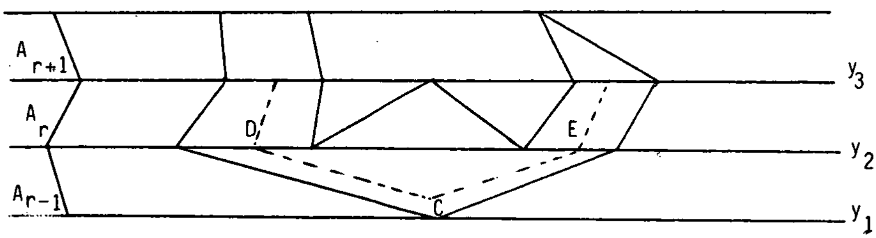

Fig. 1

Los dos lados $A_{r-1}A_r$ y A_rA_{r+1} que concurren en el vértice A_r pueden ocupar una de estas posiciones:

a) Están separados por la recta en que está A_r, es decir, A_{r-1}, A_{r+1} pertenecen uno a la recta anterior y otro a la posterior.

b) A_{r-1} y A_{r+1} están en la recta anterior o ambos en la posterior.

Cada dos rectas consecutivas $y=y_r$, $y=y_{r-1}$, limitan una zona, dividida en trapecios y triángulos por los lados que tienen sus vértices en ellas, más dos semizonas infinitas; los tres tipos pueden incluirse bajo el nombre genérico de *trapecios*.

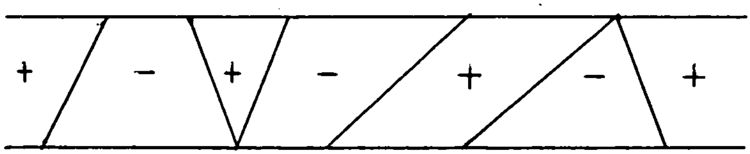

Fig. 2

Como toda poligonal cerrada es cortada en número par de puntos por cada secante que no pase por ningún vértice, resulta *impar* el número de estos trapecios; y si se atribuye signo + a uno de los trapecios infinitos, dando alternativamente los signos -+ a los trapecios sucesivos, resultará signo + en el otro trapecio infinito.

Estos signos afectan también a los segmentos de las rectas y_r, pero no a los lados de la poligonal, cada uno de los cuales es común a dos trapecios de signo distinto.

Veamos que a cada segmento de las rectas y_r corresponde el mismo signo partiendo de la zona $y_{r-1}y_r$ o de la y_ry_{r+1}.

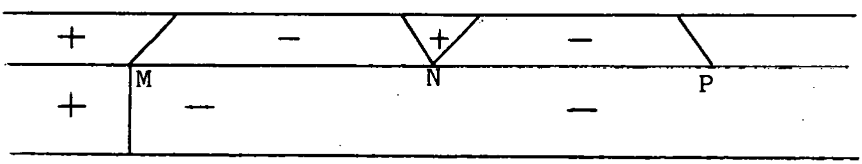

Fig. 3

En los segmentos infinitos este signo es + en ambas; suponiendo acordes los signos hasta llegar a un vértice M del tipo a) los trapecios siguientes tienen signo opuesto a los precedentes y por tanto iguales entre sí.

Si el vértice es del tipo b) como el N de la figura, en una de las zonas los segmentos MN y NP pertenecen al mismo trapecio, mientras en la otra hay un triángulo intermedio de vértice N, que produce dos cambios de signo y por tanto el segmento NP tiene en los dos trapecios colindantes el mismo signo que el MN.

Puesto que cada trapecio de una zona es colindante por cada base (una sola en el caso de triángulo) con otro trapecio, la suma de ambos es un recinto.

Prescindiendo de los puntos de la poligonal quedan, pues, los puntos del plano clasificados en dos conjuntos: X^+ suma de los trapecios de signo + (a los que agregamos los puntos exteriores a todas las zonas) y el conjunto X^-, suma de los trapecios de signo –. Veamos que ambos son conexos. Esto resulta como consecuencia de tener un solo contorno; pero es preferible no presuponer nada de la teoría de conjuntos, salvo las definiciones primeras para no salir del campo de la geometría elemental.

Dados dos trapecios cualesquiera de signo –, sea A_rA_{r+1} un lado de la poligonal perteneciente a uno y $A_{s-1}A_s$ un lado perteneciente al otro. Estos dos lados dividen a la poligonal cerrada en dos poligonales parciales abiertas. Sea una de ellas:

$$P=A_rA_{r+1}A_{r+2}\ldots A_{s-1}A_s$$

y por cada vértice de éstos, de clase a), hay un segmento con signo –, el cual es por tanto común a dos trapecios contiguos. Si el vértice es de tipo b) y los dos segmentos que parten de él tienen signo +, el lado opuesto en el triángulo a que pertenece tiene signo –.

El primer caso se presenta en la fig. 3, y el segundo en la fig. 4.

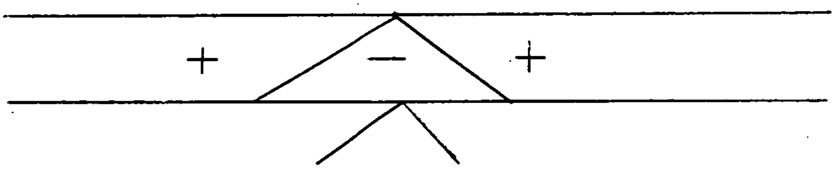

Fig. 4.

En ambos casos, la suma de los trapecios contiguos a los lados de dicha poligonal P es, por inducción, un recinto conexo, X^-, al cual pertenecen los dos trapecios arbitrariamente dados.

Igualmente resulta la conexión del conjunto X^+".

y la recensión de R.P. Boas contiene la siguientes frases:

"The reviewer fails to see how the author uses the fact that the polygon is simple, and avoids appealing to intuition in showing that there are not more than two regions".

Es evidente que Rey Pastor utiliza la propiedad de que la poligonal es simple cuando afirma que "toda poligonal cerrada es cortada en número par de puntos por cada secante que no pase por ningún vértice". Es trivial la observación de que una poligonal cerrada con autoinsecciones no cumple dicha propiedad y, por otra parte, no es difícil encontrar demostraciones intuitivas de la afirmación realizada por Rey Pastor para las curvas poligonales cerradas simples (ver, por ejemplo, Severi (6, pág. 26), las cuales se pueden desarrollar con total rigor utilizando que el complemento de una recta son dos regiones que cumplen las mismas propiedades enunciadas para el teorema de Jordan (ver Whyburn [9; pág. 101]).

Estoy en desacuerdo con la segunda parte de Boas ya que Rey Pastor demuestra que el complemento de la curva en el plano es reunión de dos subconjuntos conexos disjuntos, y de la definición de éstos se deduce trivialmente que son abiertos (este punto lo expresa claramente en el caso general, pág. 95). De estas propiedades se obtiene directamente que el complemento de la curva consta exactamente de dos componentes conexas.

En su demostración del Teorema generalizado de Jordan, J. Rey Pastor estudia el caso de la descomposición del n-espacio euclídeo por una (n-1)-hipersuperficie poliédrica. Aunque no define explícitamente dicho concepto, es presumible que se refiera a las variedades poliedrales pero, según las propiedades que utiliza, se puede considerar como si fuera una (n-1)-seudovariedad cerrada, es decir, un poliedro euclídeo que admite una triangulación compliendo las siguientes propiedades: (1) todo símplice es cara de algún (n-1)-símplice; (2) todo (n-2)-símplice es cara de exactamente dos (n-1)-símplices; (3) dados dos (n-2)-símplices arbitrarios, B_1 y B_2, existe una sucesión $A_1,\ldots,A_n$ de (n-1)-símplices tales que dos consecutivos tienen una (n-2)-cara común, B_1 es cara de A_1 y B_2 cara de A_n.

Considero que todos los razonamientos que emplea están expresados con todo rigor excepto en el punto (última línea de la página 93) donde asegura, sin referencia especial a su demostración, que una recta (transversal) corta a la hipersuperficie en un número par de puntos. No conozco ninguna demostración (geométrica) inmediata de esta afirmación, por lo que considero interesante indicar aquí un razonamiento que la prueba.

Sea M una (n-1)-seudovariedad cerrada contenida en un n-espacio euclídeo. Diremos que un subespacio afín V corta transversalmente a M si para cada símplice S de M se cumple la desigualdad

$$\dim (V\cap S) \leq (\dim V) + (\dim S) - n$$

De este modo, una recta cortará transversalmente a M si no corta a los símplices cuya dimensión sea menor o igual que n-2, y un hiperplano cortará transversalmente a M si, para cada símplice S con el que tiene intersección no vacia, la dimensión de dicha intersección es (dim S)-1.

Sea r una recta que corta transversalmente a M. Del hecho de que M consta de un número finito de símplices se deduce, sin excesiva dificultad, la existencia de un hiperplano V que contiene a r y que corta transversalmente a M. Puesto que entonces los i-símplices de $V\cap M$ se obtienen como intersección de V con los (i+1)-símplices de M, resulta fácil observar que $V\cap M$ es una (n-2)-seudovariedad cerrada. Esta última propiedad nos permite aplicar un proceso de inducción para probar la siguiente afirmación: "Si una recta corta transversalmente a una (n-1)-seudovariedad cerrada, contenida en el n-espacio euclídeo, el número de puntos de dicha intersección es par".

Creo que con la prueba que acabamos de realizar queda completada con todo rigor la demostración, realizada por Rey Pastor, de la propiedad que podemos enunciar de la siguiente forma:

Teorema generalizado de la curva de Jordan. "Una (n-1)-seudovariedad cerrada divide al n-espacio euclídeo en dos componentes conexas".

3. La demostración que presenta F. Severi (6), en su libro "Topología" (págs. 24 a 28) consiste brevemente en lo siguiente:

En primer lugar considera un punto del complemento de la curva C y demuestra que la propiedad de que una semirrecta, cuyo extremo es dicho punto, corte a la curva en un número par o impar de puntos transversales no depende de la dirección de dicha semirrecta. La prueba de esta afirmación resulta bastante intuitiva al afirmar:

(I) "al variar S (se refiere a la semirrecta basada en el punto) continuamente en torno de O, dos intersecciones cualesquiera (se refiere a intersecciones transversales) antes de desaparecer coinciden en un punto de enrase (se trata de un vértice en el que los dos segmentos que coinciden quedan a un mismo lado de la semirrecta), pues un lado de l (es la poligonal cerrada simple), que sea cortado por s, no deja de ser interceptado sino después que s ha pasado por un vértice".

Posteriormente distribuye el complemento de la curva en dos conjuntos de puntos, llamados exterior e interior, según que las semirrectas que los tienen como extremos la corten, respectivamente, en un número par o impar de puntos, y demuestra que una línea poligonal que una un punto interior con uno exterior corta necesariamente a la curva.

Finalmente, utilizando un argumento intuitivo sin justificación, prueba que los puntos exteriores (y dos interiores) se pueden unir por una línea poligonal contenida en el conjunto exterior (interior, respectivamente) del siguiente modo:

(II) "Dos puntos A y B exteriores pueden siempre unirse mediante una poligonal que no corte a L. Basta, en efecto, trazar una semirrecta secante por A y considerar su primera intersección C con L, unir B con un punto P de la semirrecta AC interior con respecto a l y considerar la primera intersección D de esta semirrecta con l (que necesariamente existe). Luego tomaremos un punto C' (bastante próximo a C) del segumento AC y construiremos una poligonal que pase por C', paralela a una de las poligonales partes de l, que tienen por extremos C y D y terminaremos esta poligonal en un punto D' (bastante próximo a D) de BD. Esta poligonal junto con los segmentos AC' y BC' (que no se cortan) constituye una línea simple, que une A con B y que no corta a l".

La intuición sobre la que se basa para la prueba de (I) no es un gran inconveniente, pues se puede desarrollar un argumento finito que la pruebe con rigor. Quizás lo más criticable sea que su demostración no es muy adecuada didácticamente, bajo el punto de vista indicado en la introducción de este artículo. Análogas consideraciones se pueden realizar sobre la prueba (II) puntualizando, quizás, que falta la justificación de por qué el punto D' se encuentra en el segmento BD.

En la página 34, Severi afirma sin demostrar: "El concepto de la demostración expuesta del teorema de Jordan en el plano, se puede transportar al teorema de Jordan en un S_n ($n>2$)".

Tengo serias dudas sobre dicha generalización. Creo que el argumento utilizado en (I) sólo es aplicable cuando la variación continua de s se realiza desde el interior de un (n-1)-símplice hasta el interior de un (n-2)-símplice, utilizando la propiedad de que uno de estos últimos símplices es cara de exactamente dos de los primeros. Pero no he encontrado un argumento válido para la variación de s sobre los símplices de dimensión menor.

Respecto del punto (II), la propiedad intuitiva sobre la que se apoya es la posibilidad de deslizarse paralelamente a la curva dada sin que cambiemos de región o, dicho de otro modo, la posibilidad de construir una curva "paralela" a la dada. Dicha propiedad se puede demostrar sin dificultad con todo rigor, pero su análoga en dimensiones superiores no es evidente. Es bien conocido un resultado de la Topología Geométrica, cuya demostración no es simple, que se suele denominar "existencia de bicollar", cuyo enunciado exacto en el plano es el siguiente: "Toda curva poligonal C admite un entorno cerrado poliédrico N para el que existe un homeomorfimo con el producto topológico de la circunferencia métrica S por el intervalo [-1,1], transformando $S \times \{0\}$ sobre C. La propiedad mencionada anteriormente es una consecuencia directa de ésta y su demostración en dimensiones superiores nos produce un argumento que permite demostrar con rigor la correspondiente prueba de (II).

4. La demostración que presentan R. Courant y H. Robbins (1), en su libro "What is mathematics?" (págs. 279 a 281 de la edición en español), apenas se diferencia de la de Severi. Tan sólo contiene un matiz diferenciador en la distribución del complemento de la curva, para lo que escogen una dirección no paralela a ningún segmento de la curva y un sentido sobre ella. Entonces distribuyen los puntos según que la semirrecta, cuyo extremo es el punto dado, corte a la curva en un número par o en un número impar de puntos transversales. La dificultad, en la demostración de Severi, que tiene la prueba de que las semirectas, con el mismo punto extremo, cortan siempre a la curva en un número par o bien en un número impar de puntos transversales es equivalente a la que existe, en la demostración de estos autores, de que toda línea poligonal que une un punto exterior con uno interior debe cortar a la curva dada.

Considero que la generalización de esta demostración presenta los mismos inconvenientes que la de Severi. Es importante señalar que ambas pruebas utilizan el hecho de que una recta corta a una curva poligonal cerrada y simple en un número par de puntos transversales.

5. La demostración que presenta G.T. Whyburn (9) en su libro "Analytic Topology" (págs. 100 a 102) es completa, realizada con todo rigor, y no utiliza argumentos intuitivos. Primero prueba que toda recta y todo ángulo (es decir, dos semirrectas con los mismos extremos) cortan a una curva poligonal cerrada simple en un número par de puntos transversales. Ello le permite probar que el complemento de tales curvas no es conexo. Posteriormente, con un argumento estándar, prueba que el complemento de una línea poligonal, simple y no cerrada es conexo, lo que le permite probar, con argumentos simples de la Topología General, que la curva dada es la frontera de cualquier componente de su complemento, de lo que deduce fácilmente la existencia de exactamente dos componentes.

Creo que los inconvenientes de su generalización a dimensiones superiores se encuentran básicamente en que sus argumentos sólo son válidos en la Topología plana.

6. Como consecuencia de los análisis realizados podemos concluir que la demostración de Whyburn es la más simple y completa, en el caso plano, pero si nos interesamos por el teorema generalizado de separación, la de Rey Pastor representa una excelente vía didáctica.

Creo que es importante realizar estas valoraciones, posiblemente subjetivas, y darles publicidad, dado que se siguen presentando demostraciones del teorema que estamos tratando con inconvenientes didácticos análogos a los que hemos indicado en este artículo. Por ejemplo, H. Tverberg (7) presenta, en 1980, una interesante demostración del teorema topológico de la curva de Jordan, apoyándose en el correspondiente teorema para una curva poligonal, cuya demostración contiene bastantes afirmaciones intuitivas sin justificar. El mismo error comete C. Korniowski (3) en su libro "A first course in algebraic topology", publicado en 1980, quien, al trasladar la demostración topológica de Tverberg, presenta una demostración distinta del caso poliedral, basada en unos principios semejantes a los de Severi.

En ocasiones, con el objeto de resaltar los puntos fundamentales de una demostración, es conveniente no especificar algunos de sus pasos intermedios pero, en mi opinión, se deben justificar para que el alumno se acostumbre al rigor y el lector pueda conocer las propiedades implícitas que implican un resultado. Por ejemplo, todas las demostraciones geométricas del Teorema de Jordan que hemos comentado se basan en la importante propiedad de que toda recta corta a la curva en un número par de puntos transversales. Esta propiedad no se encuentra explícita en la demostración presentada por Kosnowski, a pesar de que es un punto esencial en los razonamientos que utiliza. Dicha propiedad es necesaria cuando en la página 103 afirma.

"Both X_e and X_o are path connected. To see this choose any straight-line segment in C and let a,b be two points in R^2-C, close to C but on opposite sides of this line segment so that a $\in X_e$ and b$\in X_o$".

X_e y X_0 son los conjuntos de puntos tales que las semirrectas que los tienen como extremos cortan a la curva en un número par y en un número impar de puntos transversales, respectivamente. Para poder asegurar que a $\in X_e$ y b $\in X_0$ es necesario utilizar la propiedad que acabamos de señalar, punto que considero que debiera haber sido resaltado.

Considero que una simplificación de una demostración no debe conllevar una pérdida de rigor, por lo menos cuando se trata de libros dedicados a los estudiantes.

7. Finalmente desearía señalar que en algunas demostraciones se suele soslayar una propiedad que, aunque sea fácil de probar, es importante resaltarla. Dicha propiedad es que la curva dada es frontera común de las dos componentes de su complemento. Con argumentos semejantes a los empleados por Severi, Courant y Robbins en la demostración del Teorema de la curva de Jordan, la prueba de dicha propiedad consiste en observar que dado un punto x de la curva y una recta que la corta en x transversalmente, existen sobre dicha recta sendos puntos p y q a distinto lado, respecto de x, y a una distancia de x tan pequeña como se desee, de forma que pertenecen, respectivamente, a cada una de las componentes del complemento de la curva. La prueba de esta afirmación es simple, utilizando la propiedad ya señalada de que una recta corta a la curva en un número par de puntos transversales.

REFERENCIAS

1. R. COURANT and H. ROBBINS: "What is mathematics?. Oxford University Press 1941. Editado en castellano por Aguilar S.A. en 1971.
2. C. JORDAN: "Cours d'analyse". Tome III, Gauthier-Villars 1887 (págs. 587-594). Tome I, Gauthier-Villars, 1893 (págs. 90-100).
3. C. KOSNIOWSKI: "A first course in algebraic topology". Cambridge Univ. Press 1980.
4. C. NEUMANN: "Vorlesungen über die Riemannschen Theorie der Abelschen Integrale". Leipzig, Teubner. 1865.
5. J. REY PASTOR: "Teorema de Jordan para las variedades poliédricas regulares". Revista de la Unión Matemática Argentina, 9 (1943) 89-95.
6. F. SEVERI: "Topología". Universidad de Buenos Aires, 1931.
7. H. TVERBERG: "A proof of the Jordan curve theorem". Bull. London Math. Soc. 12 (1980) 34-38.
8. O. VEBLEN: "Theory of plane curves in non-metrical analysis situs". Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905) 83-98..
9. G.T. WHYBURN: "Analytic Topology". Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 28 (1942).