EL ALGEBRA MODERNA EN *LECCIONES DE ALGEBRA* DE REY PASTOR

Víctor Arenzana Hernández
M.ª Luisa Rodríguez Sol
Universidad de Zaragoza

Las *Lecciones de Algebra* de Rey Pastor constituyen uno de los libros de álgebra de mayor influencia en la formación de varias generaciones de matemáticos hispanoparlantes. La importancia y difusión de esta obra está constatada por las cinco ediciones que tuvo entre 1924 y 1960. Parece indudable que el gran prestigio de Rey Pastor entre los matemáticos españoles e hispanoamericanos contribuyó, en gran medida, a la difusión de esta obra.

La obra que nos ocupa aparece por primera vez en 1924, teniendo como origen y base un curso impartido por D. Julio en la Universidad de Oviedo en 1913. Estas *Lecciones de Algebra* constituyen un claro exponente del álgebra que se impartía en la mayor parte de los centros de enseñanza españoles en el período que media entre las fechas de la primera y quinta edición.

Hubiera sido interesante disponer de las cinco ediciones de la obra con el fin de comprobar, de una parte, la enseñanza del álgebra en las Universidades y, de otra, las influencias progresiva que Rey Pastor va recibiendo y plasmando en las sucesivas ampliaciones que hace a la obra original. No obstante, hemos manejado la tercera edición, de 1947, y la quinta, de 1960. Con ellas, podemos hacernos una idea de las influencias que recibe Rey Pastor y de las opiniones que le merecen tanto los distintos autores como los nuevos temas del álgebra.

1. Estado del álgebra al filo de la primera edición de Lecciones de Algebra

De los descubrimientos de Galois (1811-1832) sobre la irresolubilidad de ecuaciones algebraicas de grado mayor o igual que cinco y del posterior estudio por Camile Jordan (1838-1922) de dicha teoría y su aplicación a las ecuaciones algebraicas, se deriva la denominada Algebra Moderna[1].

El álgebra moderna tiene diferentes orientaciones y trata diversos temas desde mediados del siglo XIX hasta mediados del siglo XX.

De la teoría clásica de números algebraicos de Gauss (1777-1855) aparecen nociones más abstractas y con ellas la teoría de cuerpos, que junto con las teorías de Abel (1802-1829) y Galois, dan lugar a la línea de la escuela alemana representada por Dirichlet (1805-1859), Kummer (1810-1893), Kronecker (1823-1891), Dedekind (1831-1916), Hilbert (1862-1943), etc...[2].

Otra línea, fue la apuntada por Jordan y culminada por los grupos continuos de M.S. Lie (1842-1899) y la sistematización de la geometría por Félix Klein (1849-1925) mediante la teoría de grupos. Esto llevó a considerar, como lo hizo el grupo Bourbaki, que el objetivo del álgebra era el estudio de las estructuras algebraicas[3]. En conexión con esta teoría de grupos se desarrolló la teoría de formas invariantes respecto a un cierto grupo de transformaciones, y la noción de invariante domina el panorama del álgebra, la geometría, la mecánica y la física teórica. Y después del triunfo del concepto de grupo en unas ramas de la ciencia, aparecen en el álgebra, grupos con operadores, anillos, ideales y módulos, que hasta entonces parecían alejados de su dominio. A este fin contribuye la escuela alemana: Dedekind, Hilbert, Steinitz y luego Artin y Noether con sus discípulos Hasse, Krull, Schreier y Van der Waerden[4].

Otra tendencia del álgebra es el álgebra lineal iniciada por Hamilton (1805-1865) donde se concibe el álgebra como el conjunto de métodos formales que permiten resolver ecuaciones formadas con las cuatro operaciones elementales[5]. En esta línea, podemos considerar la resolución numérica de ecuaciones encabezada por Sturm (1803-1855), Gräffe (1799-1873), Sylvester (1814-1897), etc.[6].

Estas son las tendencias fundamentales, que surgen a partir de la teoría de Galois. Con ellas, el álgebra amplía su campo de operaciones y se transforma considerablemente respecto del álgebra clásica, la cual, tenía sus temas restringidos únicamente a la resolución de ecuaciones.

1. CAJORI, F. (1980). *A History of Mathematics,* New York, p. 329.
2. BOURBAKI, N. (1969). *Elementos de Historia de las Matemáticas,* Madrid, p. 82.
3. BABINI, J. (1969). *Historia Sucinta de las Matemáticas,* Madrid, p. 129 y REY PASTOR, J. (1960). *Lecciones de Algebra,* Madrid, p. V.
4. BOURBAKI, N. (1969). p. 82.
5. *Ibid*, p. 82.
6. CAJORI, F. (1980). pp. 363-366.

2. El álgebra en España

Las nociones que surgen en el álgebra desde la segunda mitad del siglo XIX, no aparecen en la literatura algebraica española ni siquiera de modo parcial, hasta finales del siglo XIX y por supuesto, ningún matemático español asume la tarea de agrupar y exponer sistemáticamente las nuevas tendencias del álgebra, como hizo Van der Waerden en 1930-31.

Las primeras noticias que se tienen en España de la Teoría de Galois, se deben a Echegaray (1832-1916) en sus lecciones impartidas en el Ateneo[7], aunque parece que hay antecedentes por parte de D. Zoel García Galdeano que, en su *Tratado de Algebra* (1886) cita y enuncia el Teorema de Galois[8]. Estas manifestaciones, están presididas por la idea de la prolongación de la resolución de ecuaciones. En la obra de Rey Pastor *Lecciones de Algebra,* calificada por Ricardo San Juan como un puente "precioso y preciso entre el Algebra clásica y moderna"[9], se pretende exponer el álgebra clásica limitada al "álgebra de la cosa" o resolución de ecuaciones como objetivo fundamental, pero exponiendo y dando noticias de otros procedimientos y teorías, que va ampliando progresivamente en las distintas ediciones.

3. Contenido e intenciones de Lecciones de Algebra

El objetivo de las *Lecciones de Algebra* de Rey Pastor, queda patente en el prólogo a la tercera adición de la obra, cuando después de agradecer a San Juan la adición que ha hecho al libro respecto de la anterior edición, dice:

> "Tenemos la pretensión de haber logrado una sensible simplificación en la teoría de ecuaciones algebraicas, llegando a los resultados finales que suelen alcanzarse en los libros análogos, con menor complejidad de recursos, que se traduce en visible brevedad de espacio, a pesar de la multitud de ejemplos aclaratorios que hemos juzgado indispensables"[10].

Con esta afirmación, Rey Pastor parece considerar como objetivo fundamental del álgebra los resultados de la teoría de ecuaciones por medio de simplificaciones llevadas a cabo en los procedimientos clásicos, ya que afirma:

> "Ciertamente nos hubiera sido mucho más fácil el empeño opuesto de elevar la generalidad de los métodos y complicar la terminología, como es uso fre-

7. ECHEGARAY, J. (1897). *Resolución de Ecuaciones y Teoría de Galois.* Lecciones explicadas en el Ateneo de Madrid. Madrid.
8. GARMA, S. (1979). *La primera exposición de la Teoría de Galois en España.* Boletín de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias. Febrero 1979, pp. 7-13.
9. RIOS, S. y Otros (1979). *Julio Rey Pastor, matemático,* Madrid, p. 163.
10. REY PASTOR, J. (1947). *Lecciones de Algebra,* Madrid, p. III.

cuente en esta disciplina, propensa como ninguna otra a degenerar en mero formalismo"[11].

Con esto, pone de manifiesto el peligro que tiene el álgebra moderna al preocuparse de desarrollar temas generales extraídos de la teoría de ecuaciones, que se encuentran alejados de los temas concretos que preocupan al científico y por tanto, pueden degenerar en puro formalismo. Lo que no manifiesta Rey Pastor, en esta obra, es si su aversión al formalismo proviene del mismo formalismo o de que las teorías formales invaden el álgebra y ésta es un campo bien delimitado en el que no caben las nuevas teorías, que propiamente no deben ser consideradas álgebra.

En este sentido, piensa que se debe rejuvenecer el significado del álgebra, siempre que sea su núcleo central el estudio de la teoría de ecuaciones algebraicas, iluminado, en su doble faz, por las clásicas sustituciones y por los nuevos automorfismos, pero a condición de no desvirtuar la verdad histórica[12]. De este modo, no defiende únicamente que el contenido del álgebra debe ser la teoría de ecuaciones algebraicas, con Teoría de Galois incluida, sino que se deben exponer los conceptos en el mismo orden histórico en que fueron apareciendo y se opone frontalmente al método de exposición más general y deductivo, que simplifica la exposición, pero desvirtúa el aspecto de creación que tiene el álgebra.

4. Sucesivas adiciones a la obra

La obra, desde su primera edición hasta la quinta, va variando, adoptando nuevos temas y reordenando otros.

En la primera edición, ampliación del curso dado en Oviedo en 1913, se pretende:

1.º) Sistematización de la teoría numérica: método del exceso algebraico, exposición rigurosa del método de Gräffe, cálculo de las raíces complejas mediante el exceso.

2.º) Clarificar la teoría algebraica, separando los problemas de Ruffini y Abel, así como el grupo numérico y formal de cada ecuación, podando la Teoría de Galois de ramas innecesarias, que dificultan el aprendizaje y obstruyen el acceso a teorías modulares.

3.º) Poner muchos ejemplos de la viabilidad del método de Galois, llenando un gran vacío didáctico.

La tercera edición difiere de la segunda, según palabras del mismo Rey Pastor, en la reordenación de la teoría de Galois llevada a cabo por Ricardo San Juan, que utilizó, para tal propósito, su trabajo publicado como apén-

11. *Ibid.* p. III.

12. REY PASTOR, J. (1960). *Lecciones de Algebra,* Madrid p. V.

dice a la memoria *Teoría de las magnitudes escalares derivadas y sus fundamentos algebraicos,* publicada en la Revista de la Academia de Ciencias[13]. La reestructuración hecha por San Juan a la obra original de Rey Pastor le supone un nuevo capítulo, el siete, que trata ampliamente de la resolución general de ecuaciones por radicales.

Asimismo, aunque manteniendo la estructura de anteriores ediciones, añade en la quinta edición unos complementos a la Teoría de Galois, donde habla de ecuaciones normales, grupos resolubles y no resolubles y de los teoremas de Sylow y Fröbenius. Añade, además, el método de automorfismos, propagado por la obra de Van der Waerden, como equivalente del método de sustituciones y agrega lo que él llama axiomática del algoritmo algebraico y que comprende grupos, semigrupos, anillos, cuerpos, álgebras, etc.

En todos estos añadidos, resulta de especial importancia para comprender la postura y concepción que Rey Pastor tiene respecto del álgebra de su tiempo, la multitud de notas que adornan sus ediciones y que nos sirven para ver cuál es la vertiente del álgebra moderna que está dispuesto a aceptar como prolongación natural del álgebra clásica y libre de juicios peyorativos, tales como "meros formalismos", "engendradora de vanas ilusiones", etc..., que Rey Pastor utilizaba.

Además de las ediciones anteriormente mencionadas, realiza una serie de reestructuraciones de la materia como las siguientes:

En la tercera edición demuestra el Teorema de Ruffini, que afirma que no existe expresión radical natural que resuelva la ecuación general de orden mayor que cuatro, utilizando la Teoría de Galois, mientras que en la quinta edición, lo hace por descomposición de ciclos[14], siguiendo las ideas tal y como se dieron históricamente. Esto pone de manifiesto cuál era el método que Rey Pastor considera idóneo. Intenta que el lector conozca las ideas en el mismo orden que se fueron produciendo llevando a su mente la estructura de la ciencia tal y como se va creando. De este modo fomenta la capacidad creativa de sus lectores. Esto significa abandonar los nuevos procedimientos de exposición del álgebra moderna, con todas las ventajas que conllevan (más generales y más rápidos), en favor de una mayor claridad del origen de los conceptos y una fácil aplicación concreta de éstos.

5. Opiniones de Rey Pastor sobre el álgebra moderna

Es indudable que nuestro autor piensa que, la Teoría de Galois tiene un lugar propio en el álgebra y afirma que, la auténtica Teoría de Galois, que establecía las relaciones entre grupo, cuerpo y resolvente total, ha

13. REY PASTOR, J. (1947). p. VI.
14. REY PASTOR, J. (1960). p. VI.

sufrido cambios más metódicos que esenciales. Para Galois, lo fundamental era la resolvente y para los demás:

> "Weber se fijó más en el cuerpo, y en esa dirección Steinitz con su teoría de cuerpos algebraicos, despreocupándose de su aplicación a los problemas que por derecho de descubrirlos llevaron siempre el nombre de Galois. La generación posterior renegó de esos problemas, considerándolos artificiales, para fijarse exclusivamente en la teoría clasificadora de Steinitz; puntos de vista ambos que son legítimos en materia opinable; pero no así en la apropiación de un nombre ya registrado con derechos inalienables"[15].

De este modo Rey Pastor, quiere desterrar del dominio del álgebra muchas de las consecuencias abstractas de la Teoría de Galois, que en la actualidad se han impuesto en el álgebra, calificándolas de "materia opinable" no digna de estar en el álgebra.

Rey Pastor es consciente de que la obra que presenta en 1960 (5.ª edición) está de espaldas a la corriente algebraica de la época y defiende su posición diciendo que, no hace la exposición del álgebra basándose en el concepto de estructuras algebraicas (que opta por ponerlo al final), por considerarlo no sólo antihistórico sino también anticientífico. Además argumenta que, utilizando esa base de estructuras algebraicas, después de vencer las dificultades de anillos, grupos y cuerpos, adjunción infinita de irracionales, inducciones transfinitas, etc..., llegan a resultados ya conocidos como el Teorema de Sturm (1829) y a la regla de los signos de Descartes (1627). Afirma que, en esta ilusión deductiva cayeron Cantor (1854-1918) y Emmy Noether (1882-1935). Los discípulos directos de ellos, no conservaron esas ilusiones, pero la segunda generación, carente de cultura histórica, han tomado sus bases en la ideología finisecular, como si Russell (1872-1971) y Brouwer (1881-1966) no hubieran existido[16].

Las generalizaciones a distintos cuerpos en álgebra no las considera válidas por mantener que, el álgebra alcanza su plenitud en C. Mantiene que el Teorema de Kronecker (Si $f(x) = c_o + c_1 x + \ldots.. + c_{n-1} x^{n-1} + x^n$ es irreducible en K, existe una ampliación $K' > K$ en la cual f(x) se descompone $f(x) = (x - \alpha) f_1 (x)$) no aporta nada al teorema fundamental del álgebra[17]. Y sigue en la misma línea criticando el Teorema de Artin-Schreier sobre cuerpos algebraicamente cerrados diciendo que, aún espera la aparición de manera natural de algún cuerpo $K > R^*$ con las propiedades del teorema, fecundo en algún capítulo del álgebra o de cualquier otra ciencia[18].

En consecuencia, podemos concluir que Rey Pastor no toma en consideración el álgebra que no se construye directamente sobre los complejos.

15. *Ibid.* p. 206.
16. *Ibid.* p. VI.
17. *Ibid.* p. VI.
18. *Ibid.* p. 309.

Señalaremos, por último, su aversión al axioma de elección y a la matemática que hace uso de él:

> "Siguiendo la pauta marcada por Steinitz el álgebra fue sacada de su cauce estricto, delimitado por Kronecker, y no sólo invadió el campo del análisis, sino que usó sin escrúpulos los métodos más heterodoxos basados en el postulado de libre elección"[19].

Con todo, pensamos que, *Lecciones de Algebra* es un libro que muestra a un autor informado en los últimos resultados que aparecían sobre el tema. Pero quizás por su dedicación, casi exclusiva al análisis, y su polifacética vida dedicada a todas las ramas de la matemática, incluida la historia de la misma, no apreció el inmenso campo que continuamente desdeñaba y probablemente sus opiniones motivaron el retraso de la entrada del álgebra moderna en España. Así, en nuestro país, no se trabajó el álgebra moderna en el momento en que se estaba ordenando, sistematizando y en suma, creándose una nueva disciplina.

6. **Influencia extranjera en Lecciones de Algebra**

Acabamos considerando la influencia que tiene en la obra algebraica de Rey Pastor, la producción del exterior. Parece indudable su conocimiento de los temas y estudia la obra completa de B.L. Van der Waerden y la de Artin, Noether, Steinitz, Hasse y otros, pero su método de exposición, lo considera de inferior eficacia en la enseñanza y de una abstracción innecesaria[20].

El problema que parece preocupar a Rey Pastor es que para él, la matemática es una herramienta, que en muchos casos puede ayudar al científico y por tanto se debe investigar sobre procedimientos de cálculo. Tradicionalmente, la Matemática Pura se encargaba de investigar los procedimientos operativos y la Matemática Mixta de aplicarlos a la práctica. La investigación sobre temas operativos dio lugar a otros problemas y cuestiones que, se alejaban de las necesidades de los científicos y Rey Pastor se preguntaba si, aún aceptando que los nuevos resultados son verdaderos, podían considerarse parte del álgebra.

19. *Ibid.* p. 316.

20. *Ibid.* p. 323.