ALGUNAS CUESTIONES SOBRE LOS *FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRIA PROYECTIVA SUPERIOR*

Luis Español González
Colegio Universitario de La Rioja

Esta contribución a los estudios sobre Rey Pastor realizados con motivo del centenario de su nacimiento en Logroño, se ocupa de su principal obra geométrica, la que aparece en el título que precede.

El análisis no es exahustivo, sino necesariamente parcial, y puede ampliarse con el trabajo de Ana Millán que aparece en este mismo volumen. De esta autora es también una magnífica biografía que es la mejor lectura para una rápida puesta a punto en la vida y la obra del matemático riojano, además de una completa guía bibliográfica[1].

1. MILLAN, A., *La exposición del Teorema fundamental de de la recta proyectiva en la obra Fundamentos de la Geometría proyectiva superior* de *Julio Rey Pastor*, en este volumen.
____ , (1988) El matemático Julio Rey Pastor, Servicio de Publicaciones del Colegio Universitario de La Rioja, Logroño.

Comienza este artículo con una visión general del trabajo de Rey Pastor en Geometría, a la que sigue una descripción de las tres obras importantes que escribió en este campo, tratando de mostrar que forman parte de un único proyecto investigador que quedó inconcluso. La última de ellas desde el punto de vista cronológico, y primera en importancia, es la que da título a estas líneas y a ella se dedica un apartado en el que se hace una exposición de su contenido en relación con los objetivos manifestados por el autor. Para terminar, se elige un capítulo del libro, el titulado "Cálculo vectorial proyectivo", para profundizar en el análisis de contenidos y en el conocimiento de la valoración que hicieron los críticos de la época.

Rey Pastor y la geometría

Rey Pastor evidenció a lo largo de todo su trabajo matemático una profunda formación geométrica. El doctorado y sus primeras aportaciones a la investigación matemática fueron en temas de geometría, y el razonamiento geométrico estuvo presente en muchos de sus trabajos de análisis, sin olvidar la parte geométrica de sus libros de texto para diversos niveles de la enseñanza. En sus obras sobre la matemática del siglo XIX, ocupan un destacado lugar diversos aspectos de la geometría: no euclídea, proyectiva, axiomática, algebraica y diferencial, así como el enfoque sistematizador del Programa de Erlangen.

Su actividad investigadora y creativa en geometría está limitada en el tiempo y en los contenidos: trabajó en geometría sintética de curvas y superficies en espacios proyectivos desde la realización de su Tesis doctoral durante el curso 1908-09 ("Correspondencia de figuras elementales", Madrid, 1910) hasta la publicacióndе su obra "Fundamentos de la Geometría Proyectiva Superior", Junta para Ampliación de Estudios, Madrid, 1916 (que en adelante llamaremos FGPS o Fundamentos). En este intermedio escribió un libro, "Teoría Geométrica de la Polaridad", (en adelante TGP), publicado por la Real Academia de Ciencias de Madrid en 1929, que continúa los temas de su Tesis, y tradujo junto con Alvarez Ude una de las primeras obras básicas de la axiomática proyectiva, las "Lecciones de Geometría moderna" de Pasch (Junta parAmpliación de Estudios, Madrid, 1913). De esta época son sus viajes postdoctorales a Alemania, antes de la primera guerra mundial, becado por la Junta para Ampliación de Estudios, y también entonces, ya al final del período, dictó sus famosas conferencias del Ateneo de Madrid.

Los años que comentamos forman algo más de la primera mitad de la década española de Rey Pastor, nombre dado al período que va desde su primer viaje de estudios a Alemania hasta su incorporación a la universidad argentina, intervalo temporal que coincide con la segunda década del siglo. El carácter distinguido de este fragmento temporal, el más hispano de su biografía, ha sido señalado por Dou, Hormigón y Millán[2]. En este período de intenso trabajo de formación avanzada y cración propia asimiló completamente la geometría de la segunda mitad del siglo pasado, a la que contribuyó con importantes, aunque tardías, aportaciones originales.

En la segunda mitad de la década, en lo que a geometría se refiere, saca partido a su trabajo anterior escribiendo artículos divulgatorios del Programa de Erlangen en la línea del primer capítulo de los Fundamentos, y dirigiendo algunas tesis doctorales. Pero ya entonces su actividad se decanta hacia el análisis matemático, que estudió profundamente en sus estancias en Alemania y al que se dedicó como profesor a partir de la obtención de su cátedra de universidad en 1911.

Otro momento interesante, pero no especialmente creativo, en la trayectoria geométrica del gran matemático logroñés se oberva al final de los años veinte. En 1928 publica el primer número del Boletín del Seminario Matemático Argentino, en el que propone varios temas geométricos a los posibles interesados en iniciar trabajos. Un año después, sale de la imprenta por primera vez su ya mencionada TGP, con un prólogo en el que se explica el gran retraso con que apareció dicho libro. A partir de entonces, se ocupa de geometría tan sólo en sus libros de texto, casi todos escritos en colaboración. Mención especial merece su curso de "Geometría Algebraica" (Buenos Aires, 1940) en el que expone por vía analítica aspectos de la teoría clásica de las curvas algebraicas.

Las tres obras mayores

De lo anterior se deduce que los interesados en la obra geométrica de Rey Pastor deben centrar su atención muy especialmente en el período 1909-1916 antes comentado y en sus tres obras fundamentales. Las dos primeras, la Tesis doctoral y la TGP están planteadas desde los objetivos propuestos por sus mentores del doctorado, mientras que la tercera, los Fundamentos, incorporan un mayor grado de modernidad y un planteamiento más personal de los temas, elaborado sin duda durante sus estancias en Alemania. Los artículos sobre geometría, tanto sintética como analítica, que publica en estos años son

2. DOU, A., (1963) *Julio Rey Pastor*, Razón y Fe, 167, 133-146 y 273-282.
HORMIGON, M. (1985) *Rey Pastor y las matemáticas en España*, en ESPAÑOL, L.(ed.) (1985) Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor (Logroño, 28 de octubre-1 de noviembre de 1983), Instituto de Estudios Riojanos, Logroño.
MILLAN, A., (1988), op. cit.

desarrollos de aspectos diversos contenidos en sus tres obras básicas, que tienen un carácter nuclear respecto a su obra geométrica de investigación.

Característica común a las tres obras (en menor medida en la Tesis) es su elevado contenido de referencias bibliográficas, en contraste con los libros de geometría que dejaron escritos sus profesores del doctorado.

En el "Preliminar" a su Tesis doctoral comenta las dos vías seguidas para desarrollar la geometría proyectiva, la pura o sintética y la mixta o analítica, que personifica respectivamente en Staudt y Chasles, entre otros, y para las que ofrece como referencias obras de Staudt y de Cremona. Reconociendo que toma de la vía mixta (p. 3)

> "el llamado principio de correspondencia de Chasles, el cual expresa que basta la correspondencia unívoca de dos figuras de primera categoría para que sean homográficas",

sólo demostrado hasta entonces por métodos algebraicos, desarrolla la teoría de las correspondencias como método para generar y estudiar curvas y superficies en el espacio proyectivo, razonando por vía sintética lo ya conocido por el método analítico.

Las cuatro partes en que está dividida la obra tienen los títulos siguientes:

- Polaridad de primer orden respecto de figuras compuestas de n puntos, rectas ó planos
- Proyectividad de orden superior entre figuras elementales
- Figuras engendradas por dos elementales proyectivas
- Aplicación a algunos casos concretos

La segunda es la esencial y a ella se refiere el título de la Tesis, que tiene como subtítulo "Con aplicación al estudio de las figuras que engendran", lo que se hace en las dos últimas partes.

Es al inicio de esa segunda parte cuando aparece precisado el principio de Chasles antes mencionado (p. 25):

> "Dos figuras proyectivas (m,n) de la misma basa real, tienen m+n elementos de coincidencia.
>
> Si la correspondencia es real-proyectiva, los elementos de coincidencia imaginarios, son dos á dos conjugados."

Previamente, ha establecido que dos figuras están relacionadas del modo dicho cuando (p. 24) "á cada elemento de una corresponden en la otra varios reales o imaginarios deducidos de aquél mediante un número finito de las siguientes operaciones geométricas:

Hallar los puntos comunes á dos curvas geométricas planas, ó los rayos comunes á dos haces geométricos planos.

Hallar los rayos comunes á dos haces geométricos radiados de planos, ó á dos haces geométricos radiados de rectas."

De este modo, las correspondencias y las curvas a las que dan origen se van obteniendo por un proceso inductivo mediante un número finito de secciones y proyecciones.

En una nota a pie de página da la demostración analítica del principio de correspondencia, pero había advertido ya que (p. 6)

"Su demostración en el estado actual de la Geometría, no parece posible dentro de esta ciencia; mas esto no autoriza a dudar de su veracidad, pues su demostración algébrica legitima su empleo."

Quedaba también sin demostrar el teorema fundamental de la teoría de las curvas geométricas (es decir, las algebraicas tratadas de modo sintético), que enuncia así en las primeras páginas de la tercera parte (p. 50):

"Dos curvas φ y ψ, en el mismo plano, de órdenes m, m' tienen mm' puntos comunes, distintos ó algunos confundidos, reales ó imaginarios conjugados."

La obra se inscribe en la tradición geométrica del siglo XIX que caracteriza a Rey Pastor. A manera de ejemplo, notemos el siguiente breve análisis de la bibliografía refenciada en la tesis. Los 47 títulos indicados -algunas más incluídas en notas de fin de capítulo no varían esencialmente los datos que siguen- recogen tres obras clásicas anteriores a 1850, de Poncelet, Plücker y Staudt, junto a 33 publicadas entre 1850 y 1890, 4 de la última década del XIX (Hagen, Jiménez, Sannia y Salmon) y 7 de la primera del XX, de las que corresponden 3 a Crelier, 2 a Torroja, 2 a Vegas; por último, aparece también el repertorio de Pascal. De todas ellas sólo 25 son citadas en el texo, siendo las de Torroja, su director de tesis, con 7 citas, las más referidas, seguidas de las de Cremona con 5 y las de Vegas con 4, con lo que se observa una abundancia de referencias destinadas a señalar los aspectos analíticos que en la tesis se resulven por vía sintética.

La TGP continúa en la línea de la tesis y consiste esencialmente en desarrollar por vía sintética la generalización a curvas de orden superior de la polaridad cuadrática. La bibliografía que contiene es amplísima, y merecería una clasificación cronológica y temática, que sospecho afianzaría la posición del autor como matemático de finales del XIX, aparecido en la segunda década del XX a causa del retraso de la matemática española.

Se trata de una continuación de la obra de Kötter sobre la teoría sintética de las curvas algebraicas, y su contenido ha sido ampliamente comentado por Amodeo[3]. Como reconoce este historiador de la geometría, Rey Pastor pone una nueva última estación en la vía del tren de los estudios sintéticos de las curvas proyectivas. Este hecho no se ha incorporado a los textos de historia de amplia divulgación, que colocan el punto final en Kötter, sin citar la obra histórica de Amodeo. Ello se debe sin duda al gran vacío producido en esta orientación geométrica incluso antes de la obra del alemán, a la tardía aparición, en 1929 y además en castellano, de la obra de Rey Pastor y a que la de Amodeo aparece cuando la preocupación por los temas sintéticos -a los que el propio autor italiano sólo dedica unas páginas- ha desaparecido y la preponderancia matemática alemana (acompañada de la italiana) había terminado.

La tercera de sus obras mayores, los FGPS, es sin duda la más importante. Está escrita después de varios viajes a Alemania (es una memoria justificativa del penúltimo de ellos) por lo que incorpora un mayor grado de modernidad, sin dejar de tener el carácter de matemática del XIX. La característica esencial de la obra es que intenta fundamentar correcta y rigurosamente, a partir de la axiomática, el desarrollo sintético de la geometría proyectiva, aspectos que ocuparon a los matemáticos de finales del siglo pasado, especialmente alemanes e italianos.

Entre sus objetivos principales se encuentra la demostración rigurosa en el marco de la geometría pura, esto es sin recursos analíticos, del que llama "teorema fundamental de la geometría algebraica", que enuncia así (p. 386):

> "Una proyectividad de índices (m,n) en una figura de primera categoría tiene m+n puntos de coincidencia (contados cada uno tantas veces como indique su orden de multiplicidad), o todo elemento coincide con uno de sus homólogos".

3. AMODEO, F., (1945), Sintesi storico-critica della Geometria delle Curve algebriche, Conte Editore, Napoli, pp. 184 y sgs. Describe la TGP a lo largo de diez páginas, al final de las cuales, p. 194, afirma: *Possiamo conchiudere che un primo passo per raggiungere una trattazione pura per la geometria fu quello fatto da STEINER, STAUDT, CHASLES, CREMONA, DE JONQUIERES; un secondo passo è stato quello di DE PAOLIS e KÖTTER; un terzo passo è quello fatto da REY-PASTOR in un momento in cui l'attenzione era rivolta ad altri argomenti nuovi.*

Vencido este "punto trascendente" -que en sus anteriores dos obras tuvo que usar, como hemos visto, sin disponer de una demostración sintética- anuncia en una nota al pie de página una continuación de los Fundamentos sobre "geometría proyectiva sintética de las figuras algebraicas". Es plausible conjeturar que tal obra sería una nueva versión de la TGP, pero el proyecto no se llevó a cabo, tal vez porque la guerra mundial interrumpió sus viajes a Alemania, con la que disminuirían sus posibilidades de consulta bibliográfica y asesoramiento; lo cierto es que la TGP se publicó trece años después en su versión original, lo que no le impide a Amodeo afirmar que es una continuación de los Fundamentos[4].

Se observa pues que las tres obras mayores, y más especialmente las dos últimas y principales, presentan una relación entre sí que no coincide con el orden cronológico de su publicación, y forman parte de un plan, posiblemente inconcluso, en su actividad de investigación geométrica. Nos ocuparemos a partir de ahora de los Fundamentos, que fue la tercera en cuanto a su elaboración, se publicó en segundo lugar y es la primera en cuanto que representa, entre otras cosas, la fundamentación de las otras en el sentido lógico-deductivo.

El contenido de los Fundamentos

En la Introducción de la obra, su autor enumera en dos grupos de objetivos, que llamó fines principales y fines secundarios. Los primeros son los siguientes:

P1.-Elaborar un cuerpo de doctrina, más allá de la geometría cuadrática, sistematizando resultados.
P2.-Revisar el Programa de Erlangen, especialmente en la teoría de los hiperespacios.
P3.-Crear un algorítmo geométrico, el cálculo vectorial proyectivo, y mostrar su utilidad.
P4.-Aportar a la geometría recursos geométricos sólo usados en el análisis.
P5.-Demostrar el teorema fundamental de la geometría algebraica.
P6.-Introducir el concepto de curva analítica proyectiva.

A éstos hay que añadir otros cinco más de carácter secundario:

4. AMODEO, op. cit., p. 187. La TGP ganó en 1912 el concurso de la Academia de Ciencias de Madrid sobre el tema *Estudio geométrico de la polaridad en las figuras planas y radiadas de orden superior al segundo*, pero no se publicó entonces.

S1.-Exponer y desarrollar completamente las ideas apenas esbozadas en el Programa de Erlangen.
S2.-Fundamentar la geometría axiomática elemental, mostrando la independencia y compatibilidad de los axiomas.
S3.-Desarrollar sistemáticamente la geometría proyectiva del espacio abstracto.
S4.-Elaborar la teoría de la continuidad geométrica y demostrar el teorema fundamental de la proyectividad.
S5.-Desarrollar la teoría de la proyectividad compleja.

Todos estos objetivos se van cumpliendo a lo largo de las tres partes en que se divide la obra. La primera de ellas, bajo el título "Sistematización de la geometría", se refiere a los fines P2 y S1 relativos al Programa de Erlangen. La segunda contiene la geometría proyectiva real (que incluye S2 y S3, parte de P4, S4 y también P3) y, por último la tercera trata sobre la geometría proyectiva compleja, consiguiendo S5, parte de P4 y los dos fines principales más importantes, P5 y P6, para los que hace un amplio uso del cálculo vectorial proyectivo (P3).

Afirma el autor en la introducción (p. xvi) que

"el impulso más formidable que ha recibido la Geometría desde Staudt, ha sido la obra de Klein",

destacando en ella dos aspectos fundamentales: la sistematización, y la fundamentación axiomática y el desarrollo riguroso. Ambos aspectos se corresponden con el contenido de las dos primeras partes de los Fundamentos.

La primera de ellas, que fue calificada por Pérès como "un largo prefacio"[5], es una crónica erudita y actualizada del Programa de Erlangen extendido a dimensiones arbitrarias y ampliando el número de ejemplos de geometrías equivalentes. El autor muestra cómo el desarrollo del Programa va dotando de un contenido progresivamente mayor a la famosa frase de Cayley "la geometría proyectiva es toda la geometría", una vez que por geometría se entiende el estudio de[6]

"las propiedades invariantes de los espacios abstractos de cualquier número de dimensiones, respecto de cada uno de los grupos de transformaciones que en ellos pueden definirse".

5. Ver p. 61 de la reseña de los FGPS realizada por PERES, J. en Bulletin des Sciences Mathématiques, XLII, (1918), 61-67.
6. FGPS, p. 17.

Como ya hemos dicho, también la segunda parte participa de la influencia de Klein, tanto en la introducción axiomática del espacio proyectivo tridimensional como en la exposición con todo rigor del teorema fundamental de la proyectividad. También es de tema kleiniano el último capítulo de esta sgunda parte, dedicado al cálculo vectorial proyectivo, del que trataremos más adelante.

Un tercer aspecto destacado en la introducción a los Fundamentos es la "crisis actual de la Geometría proyectiva", motivada por el auge que tuvieron las investigaciones dirigidas hacia los nuevos horizontes abiertos por Klein. Afirma Rey Pastor (p. xviii) que

> "En este gran desarrollo de la Geometría, la rama proyectiva, y en especial el método sintético, han quedado relegados a segundo término...... Este cansancio está justificado. Fracasadas las tentativas de Thieme, Paolis, Schumacher, etc., para edificar sintéticamente la Geometría de las figuras algebraicas, problema calificado de dificilísimos por Cremona; y muy poco difundida la notable obra de Kötter, que representa el máximo avance en este sentido, se llegó a la conclusión de que la Geometría proyectiva ha dado de sí todo lo que podía dar, volviéndose, en consecuencia, al antiguo sistema mixto de Chasles y Cremona...... Sólo rectificando la equivocada marcha,..., haciendo cesar el antagonismo que entre ella y el Análisis quiso establecerse, puede cesar la crisis actual".

En efecto, el objetivo P4 pretende superar este antagonismo introduciendo en la geometría proyectiva real la continuidad[7] y, en la compleja, nociones como superficie de Riemann, correspondencia derivada y curva analítica. Es en esta tercera parte sobre geometría compleja donde el uso con fines geométricos de recursos del análisis es más intensa, y en ella alcanza el autor las más altas cotas de novedad investigadora. Amodeo se ocupó de ella -y de otros aspectos del libro- en su obra sobre historia de la geometría proyectiva, siendo estas citas uno de los apoyos básicos que los comentaristas sobre la obra del gran matemático riojano han utilizado para demostrar el valor de su trabajo cumbre en geometría[8]. Pero

7. Ver el trabajo de MILLAN, A. en este volumen.
8. AMODEO, F. (1939) Origine e sviluppo della Geometria proiettiva, Pellerano, Napoli. Hay traducción española de BABINI, N. y J. (1939), Origen y desarrollo de la Geometría proyectiva, Universidad Nacional del Litoral, Rosario. Esta obra es citada en favor de Rey Pastor por RIOS, S., SANTALO, L.A. y BALANZAT, M., (1979), Julio Rey Pastor, matemático, Instituto de España, Madrid. En SAN JUAN, R. (1962), *Julio Rey Pastor. Su vida y su obra vista por un discípulo,* Revista Matemática Hispano-Americana, 21, 60-93, hay un detallado recuento de los capítulos de la obra de Amodeo en los que se incluyen las diversas aportaciones de Rey Pastor.

también en este caso la valoración de Rey Pastor como el último gran geómetra proyectivo sintético no ha pasado de la obra de Amodeo a las historias de la matemática de gran difusión.

El crítico Pérès antes citado, que hace una valoración positiva pero severa de los Fundamentos, dice que[9]:

> "los capítulos más originales del Libro me parecen aquéllos en los que el autor emprende por métodos puramente sintéticos ... el estudio de cuestiones abordadas hasta el presente por procedimientos analíticos y que parecen casi imponer el empleo de tales procedimientos".

y más adelante[10]

> "Los métodos puramente sintéticos que utiliza el autor son actualmente inferiores, tanto para la exposición como para la investigación, a los métodos analíticos. Esto no es razón para despreciar tentativas como la del autor, que, además de su interés como curiosidad, pueden revelarse fructíferos en el futuro".

Pero lo cierto es que el trabajo sintético fue perdiendo progresivamente interés hasta ser hoy muy poco reconocido. Así por ejemplo, un historiador reciente del Programa de Erlangen, Hawkins, al referirse en su artículo de 1984 a los trabajos de Newson -quien, entre 1895 y 1902, animado por las opiniones expresadas por Klein sobre la conveniencia de hacer "intuitivamente evidentes", es decir sintéticas, las cuestiones geométricas obtenidas mediante el anális, trataba de rehacer sintéticamente resultados de Lie- afirmaba[11]:

> "El trabajo de Newson fue más bien excéntrico e inconsistente, pero además ilustra lo inextricables que son las influencias del Programa de Klein y del trabajo de Lie".

Una vez probada la equivalencia entre las geometrías sintética y analítica, el problema quedó reducido a la elección entre dos lenguajes capaces de descubrir y expresar los hechos geométricos. Los geómetras se decantaron por la vía analítica y los que siguieron el camino sintético quedaron fuera de juego. El propio autor de los Fundamentos reconoció este hecho a edad bien temprana, en su discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y

9. Traducido por el autor de PERES, J., op. cit. p. 61.
10. Ibidem, p. 67.
11. Traducido por el autor de HAWKINS, T., (1984) *The Erlangen Program of Felix Klein: Reflections on its place in the history of mathematics*, Historia Mathematica 11, 442-470, p.455.

Naturales, en 1920, y también en el de contestación al ingreso de su discípulo San Juan en 1956, ya al final de su vida.

Para terminar estos comentarios generales sobre los Fundamentos, dedicaremos algunas líneas al objetivo P1 y al estilo de la obra. El propio autor precisa en la introducción el alcance de sus propósitos diciendo[12]:

> "No siendo éste un libro de texto, no se busquen en él detalles que el lector puede completar; en muchas cuestiones ponemos sólo los jalones necesarios para que alguien emprenda la construcción completa; por eso titulamos Fundamentos y no Tratado".

De esta manera el libro pretende abarcar gran número de cuestiones diversas en poco más de cuatrocientas páginas, con lo que deja con frecuencia huecos importantes en la ilación y presenta cambios notables en el estilo. Empieza tratando el Programa de Erlangen con un estilo literario propio de un prólogo o de un discurso -como fue el caso de Klein-, en un conjunto de 75 páginas que bien pudieron formar un opúsculo desgajado del resto de la obra. Pasa luego a exponer la geometría proyectiva, comenzando por un estudio muy formalizado y detallado del concepto de espacio definido por axiomas gráficos, a partir de las nociones de punto y segmento. Remitiéndose para los detalles a la obra de Pasch, realiza después un rápido bosquejo de la obtención del espacio proyectivo elemental adjuntando elementos impropios o ideales por el método de Klein-Pasch (momento que aprovecha para mencionar el valor del trabajo de Reyes Prósper[13]).

A continuación introduce el concepto de espacio proyectivo abstracto (que hoy es el más habitual) basado en las nociones de punto y recta y con los axiomas de existencia e incidencia, sin referencia a axiomas de orden. En lo sucesivo, se alternan apartados dedicados al espacio proyectivo abstracto con otros referidos al plano elemental, en el que alcanza los resultados fundamentales del libro, una vez en el marco del espacio complejo.

En todo momento, el autor supone conocidos aspectos generales de la geometría, pues dice que[14]

12. FGPS, p. xxi.
13. En FGPS, p. 109, se dice que la teoría de los elementos impropios fue *iniciada por Klein, desarrollada completamente por Pasch y perfeccionada por Reyes Prósper*. Más adelante, p.141, menciona en la bibliografía dos obras de este último.
14. FGPS, p. 86.

"No podemos pretender el desarrollo sistemático de la Geometría completa desde sus comientos. Como indica el título de nuestro trabajo, suponemos conocida la Geometría elemental, que ya ha pasado, hace años, hasta á la enseñanza secundaria, expuesta en multitud de trabajos bien conocidos. Aun siendo así, haremos un ligero resumen, poniendo los jalones que señalan los puntos culminantes de este desarrollo, y haciendo éste con todo detalle para la Geometría plana, con nuestro sistema mixto de axiomas".

Este tipo de consideraciones concuerdan con las primeras líneas de la reseña ya mencionada de Pérès (p. 61):

"Sin hacer un tratados sitemático de Geometría proyectiva, el Sr. Rey Pastor reúne en este libro el estudio de cuestiones relacionadas con diversos dominios de la Geometría proyectiva y que juzga esenciales para su desarrollo. No se encontrarán en este libro resultados importantes esencialmente nuevos".

Sin embargo, la última afirmación parece algo obvia, pues la importancia y novedad del trabajo realizado por nuestro compatriota estriba en el tratamiento sintético de cuestiones ya conocidas por vía analítica. En otras recensiones se ha valorado mejor esta contribución.

Un aspecto que contribuye también a dar a la obra un carácter disperso es la abundancia de disquisiciones históricas -por otra parte realizadas con gran acierto- acerca de los diversos enfoques o aproximaciones a ciertos problemas; por ejemplo, el teorema fundamental de la proyectividad o las representaciones reales de elementos complejos.

Nos estamos refiriendo pues a una obra apresurada, en parte texto y en parte trabajo de investigación (lo que se refiere a la "geometría proyectiva superior, en oposición a la elemental o cuadrática") que se ocupa con desigual intensidad de un amplio abanico temático. Parece que el objetivo último del autor fuera la incorporación a una comunidad matemática atrasada de nuevos temas que animaran su actividad[15]:

"pretendemos llenar otro fin, quizás más importante que los anteriores: presentando á los jóvenes matemáticos españoles un cuadro del estado actual de esta ciencia; señalándoles los campos que aún están por cultivar, y donde pueden cosecharse puntos importantes, ahorrándoles las investigaciones bibliográficas, preliminar indespensable a todo trabajo matemático, y quizás lo parte más penose de él; en una palabra, orientándolos, quizás llegue á

15. FGPS, p. xxi.

operarse un cambio en la dirección actual de los estudios geométricos en España".

Pero, curiosamente, los temas esenciales del libro son los que entraban en vía muerta y los que tenían mejor futuro, como por ejemplo el Programa de Erlangen, la axiomática del espacio abstracto o la topología del espacio proyectivo, ocupan una posición auxiliar.

Especialmente significativo ha este respecto es el papel que el Programa de Erlangen ha cumplido en la marginación de la geometría sintética, cuya edad de oro es situada por Bourbaki, a grandes rasgos, entre la "Geometría descriptiva" de Monge y el discurso de Klein[16]. Mas en los Fundamentos se introduce el Programa de una manera no técnica, lo que tal vez impidió que se extendiera como tema de trabajo de investigación entre los jóvenes lectores del libro.

El cálculo vectorial proyectivo

Este es el título del último capítulo de la tercera parte de los Fundamentos, dedicada a la geometría proyectiva real. Terminaremos este trabajo describiendo el capítulo y dando noticia de los juicios que motivó en diferentes comentaristas contemporáneos de la obra.

Trata de las proyectividades del espacio, de algunos ejemplos importantes y sus composiciones; por lo que se trata de una parte del libro inmersa en el espíritu del Programa de Erlangen. Comienza con un apartado dedicado a generalidades sobre la composición de aplicaciones y otro sobre proyectividades cíclicas en la recta y el plano.

Las treinta últimas páginas contienen lo interesante de este capítulo, que son los apartados 3, 4 y 5, cuyos títulos son:

- Cálculo de segmentos proyectivos
- Cálculo vectorial proyectivo en las figuras de segunda categoría.
- Torsiones y giros proyectivos.

Es aquí donde el autor cumple el objetivo que antes hemos llamado P3, consistente en crear un algoritmo geométrico, del que hace un uso esencial en la obtención de los resultados más importantes de la tercera parte -y del conjunto- del libro, como son el teorema fundamental de la geometría algebraica y

16. BOURBAKI, N., (1972), Elementos de historia de las matemáticas, Alianza Editorial, Madrid, p.181.

concepto de curva analítica, ambos obtenidos por procedimientos geométricos puros. En el último capítulo de su libro de historia de la geometría proyectiva, Amodeo[17] comenta con detalles técnicos la esencia de este cálculo y su uso para obtener la noción sintética de curva analítica.

Según Rey Pastor, los segmentos se definen en las figuras de primera categoría y pueden ser de primera o segunda especie. Un segmento de primera especie es un par ordenado de elementos (AA'), una vez fijado un elemento Ω; pero hay que considerar que dos segmentos (AA') y (BB') son iguales si existe una proyectividad cuyo único punto doble es Ω y en la que A y B se transforman en A' y B' respectivamente. Dos observaciones cabe hacer a esta definición. En primer lugar, que los segmentos se definen como clases de equivalencia a partir de un conjunto inicial, como ya hiciera Staudt con las cuaternas[18]. Por otra parte, debe notarse que si la figura considerada es una recta métrica con punto impropio Ω, entonces las proyectividades cuyo único punto fijo es Ω son las traslaciones, y por tanto la igualdad de segmentos tiene el sentido métrico habitual. No obstante, Rey Pastor insiste en el carácter abstracto de la definición, afirmando (pp.255-256) que los segmentos

> "son entes abstractos, cada uno de los cuales representa una proyectividad, y no deben confundirse con los segmentos hasta ahora estudiados, los cuales son conjuntos de infinitos puntos definidos por dos de ellos. Nuestro cálculo de segmentos proyectivos es, en resumen, un cálculo de proyectividades de primera categoría".

En efecto, un segmento (AA') puede identificarse con la proyectividad (con Ω como único punto fijo) que lleva A en A', y que permite obtener un segmento (BB') igual al (AA') a partir de cualquier elemento B, sin más que tomar el transformado B' de B. Combinando esta transitividad con la composición (yuxtaposición) de proyectividades (segmentos), se puede definir la suma de segmentos, que tiene las propiedades que caracterizan a la hoy llamada estructura de grupo abeliano.

17. AMODEO, F., (1939), p. 155 y sgs.
18. El cálculo de cuaternas de Staudt fue usado por Rey Pastor en el último capítulo de la TGP, llegando a dar la fórmula simbólica axx'+bx+cx'+d=0 de la proyectividad (ABCX)=(A'B'C'X') determinada por tres puntos A, B, C y sus imágenes A', B', C', donde a,b,c,d, son cuaternas deducidas a partir de un sistema ΩOU y a=(ΩOUA), b=(ΩOUB), etc. Luego señala (p.224) que: "A partir de este punto puede desarrollarse una teoría simbólica de las figuras uniformes, paralela a la teoría analítica."

Además, el producto de (OA) por (OB), respecto al segmento unidad (OU), es el segmento (OC) determinado por

$$(\Omega OUA)\Pi(\Omega OBC)$$

donde Π representa la relación de proyectividad, es decir, C es el elemento transformado de A por la proyectividad que fija Ω y O llevando además U a B. Este producto tiene las propiedades habituales de la aritmética. Seguidamente realiza de una menera esquemática la conexión entre este cálculo de segmentos y las cuaternas de Staudt, afirmando (p. 264) que:

> "así como en Aritmética se introducen y estudian primero los números naturales y luego se define el número racional por un par de números naturales, nosotros seguimos método geométrico análogo, calculando primero con segmentos, y luego introduciendo las cuaternas como cocientes de dos segmentos".

En efecto, introduce el símbolo

$$(\Omega OAC)=(OC)/(OA)$$

"cualquiera que sea el punto unidad", probando que

$$(\Omega OAB)(\Omega OBC)=(\Omega OAC)$$

y con este producto de cuaternas particulares puede definir la cuaterna general (ABCD) en función de los segmentos (OA), (OB), (OC) y (OD). Llega así a las puertas de la definición de coordenadas en las figuras de primera categoría, lo que reconoce en cierto modo, pero reafirmando su posición a favor del método sintético y dejando entrever su resistencia a aceptar el álgebra abstracta[19]:

> "A partir de esta relación puede desarrollarse algorítmicamente toda la Geometría proyectiva. Cada proyectividad, involución, etc. está representada por una ecuación entre las cuaternas que determinan los diversos elementos. Las transformaciones de estas ecuaciones son las mismas del Algebra, pero con la diferencia esencial de que las letras no designan números, sino cuaternas de elementos. Mas este método, careciendo de la elegancia de los sintéticos, tiene en cambio todos los inconvenientes de la Geometría analítica.

19. FGPS, pp. 266.

Por otra parte, como á cada elemento (y por tanto á cada cuaterna) se le puede asignar un número, según hemos visto, la diferencia entre este método y el analítico es más aparente que real".

Recordemos que había también segmentos de segunda especie. Son pares ordenados [AA'] respecto a una involución fija $\Omega\bar{\Omega}$ en la figura de primera categoría bajo consideración. Ahora el criterio de igualdad entre dos segmentos [AA'] y [BB'] es la existencia de una proyectividad que es acorde y deja invariante la involución $\Omega\bar{\Omega}$, y respecto de la cual A', B' son homólogos de A, B. Si la figura es un haz de rectas en el plano euclídeo y la involución es la perpendicularidad, se comprende que los segmentos de segunda especie recogen la idea de ángulo. Con ellos puede definirse la estructura aditiva, pero no la multiplicativa[20]:

"Nada de extraño tiene esto, observando que en el caso particular en que los puntos dobles son los absolutos de la recta, el segmento no euclideano de segunda especie es el producto de una constante por el logarítmo neperiano de la razón doble de la cuaterna formada por los dos extemos y los dos puntos absolutos (Klein)...... más el producto ó cociente de logarítmos no es fácil expresarlo (y menos con construcciones proyectivas) en forma de logaritmo de otra razón doble, pues éste es un problema transcendente".

No obstante, sólo la adición es suficiente para que estos segmentos proyectivos sirvan para el estudio del cálculo vectorial proyectivo en las figuras de segunda categoría, más precisamente para trabajar con las colineaciones que extienden al marco proyectivo las semejanzas del grupo fundamental de la geometría elemental.

En el texto se introducen en primer lugar las dilataciones y las traslaciones proyectivas, que son las homologías de centro O y eje w, siendo ambos elementos no incidentes en el primer caso e incidentes en el segundo, de manera que se trata, si ω es la recta impropia, de extender proyectivamente las homotecias y las traslaciones de la geometría elemental; además estudia las propiedades normales de la composición de estas transformaciones y los grupos que con ellas se pueden formar. Determina las traslaciones, fijado el eje ω, por un vector AB con origen un punto cualquiera A y extremo su transformado B, con lo que el centro O se obtiene como intersección de ω con la recta soporte del vector. De este modo, componer traslaciones del mismo eje ω es sumar vectores mediante la regla del paralelogramo proyectivo, es decir, tomando como paralelas rectas que se cortan en ω.

20. FGPS, p. 261.

Finalmente, introduce las torsiones, que son (p.272) colineaciones

"con un triángulo doble $O\Omega\bar{\Omega}$ que tiene dos vértices imaginarios. Fijado el punto doble real O, y la involución $\Omega\bar{\Omega}$, la torsión está definida por el vector AB que forman dos puntos homólogos; á este vector, representante de la colineación, lo llamaremos también torsión o torsor de centro O".

Las torsiones incluyen a las dilataciones como caso particular, así que el cálculo se desarrolla esencialmente sobre traslaciones y torsiones, es decir, sobre vectores relativos a un eje ω y torsiones relativos a un punto O y a una recta w soporte de la involución de los puntos dobles imaginarios. Si suponemos como otras veces que w es la recta impropia del plano euclídeo, una torsión con estos elementos es una semejanza; por tanto el cálculo proyectivo es el estudio de las reglas de composición de traslaciones y semejanzas en clave proyectiva.

Los torsores AB se sustituyen con ventaja, a fin de caracterizar torsiones, por las llamadas ternas características (MNP), formadas por los puntos impropios M, N y P de OA, OB y AB respectivamente; lo que lleva a la introducción de los segmentos proyectivos de segunda especie (ángulos) para el tratamiento de las torsiones (semejanzas)[21]:

"Dos ternas (MNP) y $(M_1N_1P_1)$ representan la misma torsión, es decir, son equivalentes, si son proyectivamente iguales respecto del par $\Omega\Omega$, ó sea, si

$$[MM_1]=[NN_1]=[PP_1]$$

ó lo que es lo mismo, si

$$[MN]=[M_1N_1],\ [MP]=M_1P_1],\ [NP]=[N_1P_1]$$

......Este teorema permite reducir el estudio de las torsiones, y de las operaciones con ellas, al de la serie w, y su importancia es capital en la teoría que aquí iniciamos".

Otro ejemplo de torsión que destaca el autor es el de giro proyectivo, que es una torsión cuya terna característica (MNP) es tal que el conjugado armónico P' de P respecto de MN coincide con el conjugado de P en la involución $\Omega\bar{\Omega}$, definición que no depende de la terna elegida; esto corresponde a los giros euclídeos, como veremos por vía analítica, a manera de ejemplo, para los lectores no habituados al método sintético. Si O es el origen, w es la recta impropia $x_0=0$, y Ω, $\bar{\Omega}$ son los puntos cíclicos (1,0,i), (1,0,-i); entonces $\xi\xi'+1=0$ es la involución $\Omega\bar{\Omega}$ y la proyectividad subordinada por la torsión en w es de la forma

21. FGPS, p. 277.

$$b\xi\xi'+a(\xi'-\xi)+b=0$$

con lo que la ecuación de la semejanza resulta ser

$$x'=ax+by \quad , \quad y'=-bx+ay$$

Si tomamos el torsor AA' para determinar la torsión, con A(1,0), entonces es A'(a,-b) y la terna característica la forman los puntos impropios M(0,1,0), N(0,a,-b) y P(0,1-a,b), que completan cuaterna armónica con P'(0,1+a,-b). Por tanto la torsión es un giro si este punto es el (0, -b,1-a), es decir si $a^2+b^2=1$, caso en que la semejanza es un giro euclídeo.

Resulta pues que el cálculo proyectivo es la extensión proyectiva de las propiedades de composición de las transformaciones básicas del grupo fundamental de la geometría elemental, usando segmentos y vectores para la determinación de tales colineaciones y operaciones entre dichos elementos para representar su composición.

Su autor estimaba en gran medida esta aportación suya a la geometría proyectiva pura y, al contrario de lo que sucede en general, no da apenas referencias bibliográficas para el cálculo de segmentos proyectivos, y ninguna para el cálculo vectorial; afirma que (p. 287):

> "Respecto del cálculo de segmentos proyectivos, es muy escasa la literatura. En la obra clásica de Pasch, tantas veces citada, se halla ya contenida en germen; posterirmente fué desarrollada por Schur...
>
> Debemos, sin embargo, observar que este cálculo estudiado por Pasch, Schur, etc., se refiere exclusivamente a los segmentos que nosotros hemos llamado de primera especie; en la literatura de nosotros conocida, no aparecen los que llamamos de segunda especie".

Y en relación con el cálculo vectorial afirma lo siguiente (p. 288):

> "Sobre esta nueva teoría vectorial proyectiva, en que el vector aparece como representante de una colineación, no podemos citar ningún trabajo que a ella se dedique, ni siquiera en que se exponga esta idea."

Los juicios que dictaron en su día los críticos de la época que juzgaron los Fundamentos son diversos. Para Bieberbach[22]:

22. Citado en RIOS, S., SANTALO, L.A. y BALANZAT, M., (1979), p. 145.

"hace progresar la teoría de las colineaciones con un algoritmo vectorial proyectivo."

Asimismo, en la crítica de d'Ocagne se lee lo siguiente[23]:

"Pero la creación más esencial del autor reside sin duda en el establecimiento de un nuevo algoritmo, de esencia puramente geométrica, que, bajo el nombre de cálculo vectorial proyectivo, aplica con éxito a la demostración de las verdades encontradas en este dominio. Es, en suma, una especie de transposición, bajo la forma apropiada, en el dominio de la Geometría, de medios que no habían sido empleados aquí más que en el del Análisis y que pudiera parecer que debían permanecer confinados en él."

En cambio, Pérès es más severo, juzgando que dicha transposición es un simple ejercicio. Refiriéndose a las treinta páginas que ocupa el cálculo geométrico afirma que[24]:

"podrían, con gran ventaja de simplicidad, reducirse a un cuarto. Es una nota banal que todas las propiedades métricas toman, si se reemplazan la recta del infinito y la involución absoluta por una recta y una involución cualquiera, un enunciado proyectivo. El autor habría podido pues hacer notar que los conceptos que introduce aquí coinciden con conceptos métricos muy elementales y dispensarse de retomar su estudio por métodos proyectivos: siendo este estudio evidentemente posible gracias a la nota precedente."

Como en otros momentos de su recensión, este crítico francés limita el grado de originalidad del trabajo del autor de los Fundamentos, pero no cabe duda que, aunque la nota del Pérès es correcta, el trabajo de Rey Pastor tiene mérito en el planteamiento técnico de su cálculo y, más todavía, en el uso que de él hace en la última parte sobre geometría compleja, donde los segmentos de segunda especie juegan el papel de los ángulos, esenciales para estudiar las transformaciones conformes.

23. Traducido por el autor de la reseña de d'OCAGNE, (1917), para la Revue Générale des Sciences pures et appliquées, Paris.
24. Traducido por el autor de PERES, J., op. cit. p. 64.