Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 19, No 2, p. 51–57, julio-diciembre de 2001

Un modelo de captura con las torres y la exponencial iterada *

Primitivo Belén Acosta Humánez**

Resumen

En este artículo se trata un caso especial de un sistema depredador-presa, donde el tamaño de los pasos (o saltos) de ambas especies crece como exponenciales iteradas. Se supone que el depredador da a su presa una ventaja inicial antes de empezar la cacería: ¿es posible que la presa escape del depredador? Se darán condiciones sobre el tamaño de los pasos (o saltos) de ambas especies para determinar si la presa escapa a su depredador.

Abstract

In this paper it is assumed an special case of a predator-prey system, in which the length of step of both species grow as iterated exponentials. It is supposed that the predator give to its prey an initial advantage before of to start the chase: could the prey scape to its predator? Conditions about the size of jumps or strides of both species to determine if the prey can scape to its predator will be given.

1. INTRODUCCIÓN

Al igual que en [1], se supone que se tienen dos animales que hacen el mismo número de saltos por minuto, pero uno de ellos hace saltos más grandes que

*2000 *Mathematics Subject Classification* 26A18.

**Escuela de Matemáticas, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia; Email: primitivo.acosta@usa.edu.co

el otro. Si el salto del animal más pequeño (la presa) tiene longitud a, y el salto del animal más grande (depredador) tiene longitud b, es evidente que un depredador persistente siempre será capaz de alcanzar a su presa. Si se asume que la presa arranca un paso adelante del depredador, después de n pasos la distancia entre los dos será

$$nb - (n+1)a = n(b-a) - a\,. \tag{1.1}$$

Esto es claro porque $nb - (n+1)a = nb - na - a = n(b-a) - a$, y en consecuencia, si $n > \frac{a}{b-a}$ entonces el depredador habrá sobrepasado a su presa. Si se imagina un planeta en el cual las criaturas se mueven por saltos de longitud que se incrementa geométricamente, una criatura en dicho planeta está a una distancia a de donde empezó después de un salto, y a una distancia a^n después de n saltos. Se supone que $a > 1$, para indicar que las criaturas se alejan de su punto de partida. Se puede nuevamente hacer la pregunta de si una pequeña criatura que arranca un paso adelante de su depredador puede escapar de él. Si se supone que el paso inicial del depredador es de tamaño b, donde $b > a > 1$, tal que si $b^n > a^{n+1}$, entonces se puede afirmar que la criatura más pequeña es atrapada por el depredador. Esta situación es ilustrada en el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Si $b > a > 1$ y n es tal que $b^n > a^{n+1}$, entonces $n > (\log a)(\log \frac{b}{a})^{-1}$.*

Demostración. Como $b^n > a^{n+1}$ y la función logaritmica es monótona creciente y positiva para valores mayores que 1, entonces $\log b^n > \log a^{n+1}$, lo cual indica que $n \log b > (n+1)\log a$; entonces $\frac{\log b}{\log a} > \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, por lo tanto, $\frac{1}{n} < \frac{\log b}{\log a} - 1 = \frac{\log b - \log a}{\log a} = \frac{\log \frac{b}{a}}{\log a}$; así que finalmente se tiene $n > \frac{\log a}{\log \frac{b}{a}} = \log a \left(\log \frac{b}{a}\right)^{-1}$. $\square$

2. El modelo de torres y la exponencial iterada

Por supuesto, se puede imaginar un planeta aún más extraño en el cual una criatura da un salto inicial de tamaño a seguido por un salto que lo mueve a una distancia a^a de su punto de partida, y otro que lo lleva a una distancia a^{a^a}, y así sucesivamente. Por lo tanto, la distancia a la cual la criatura viaja está determinada por torres de a, tal como se presenta en la siguiente definición.

Definición 2.1. Dado cualquier $a \in \mathbb{R}$, se define la torre 0 de a por $T(a,0) = a$. Recursivamente para $n \geq 1$, se define la $n-$ésima torre de a como

$$T(a,n) = a^{T(a,n-1)}. \tag{2.1}$$

Wilhelm Ackermann [2] introdujo una forma natural de ordenamiento de operaciones sobre los números reales de tal forma que la suma es una operación de tipo 1, la multiplicación es una operación de tipo 2, la potenciación es de tipo 3, la operación $T(a,n)$ es de tipo 4 y así sucesivamente. Esto indica que vivimos en un planeta de tipo 2. Los dos planetas descritos anteriormente son respectivamente de tipo 3 y 4. Es decir, las criaturas de los planetas de tipo 2 y 3 no pueden escapar de sus depredadores aunque tengan pasos de ventaja al iniciar la cacería. ¿Es cierto lo mismo para criaturas en planetas de tipo 4?. Sorprendentemente, si sus pasos crecen con un tamaño suficientemente grande entonces serán capaces de escapar de sus más rápidos depredadores, sin importar cuán persistentes sean. Para llegar al teorema que confirmará esta última afirmación se presentará el siguiente lema.

Lema 2.1. *Dado $\lambda > \mu > 0$ y dado $\eta > 0$, si $x > 0$ y $y - x > \log((\eta+1)\lambda/\mu)$, entonces $\mu e^y - \lambda e^x > \eta\lambda > 0$.*

Demostración. Como $y - x > \log((\eta+1)\lambda/\mu)$, y debido a que la función exponencial es monótona creciente, se tiene que $e^{y-x} > \frac{(\eta+1)\lambda}{\mu}$, así que $\mu e^{y-x} > (\eta+1)\lambda$. Multiplicando por e^x se obtiene $\mu e^y > (\eta+1)\lambda e^x$ y por lo tanto $\mu e^y > \eta\lambda e^x + \lambda e^x$, así que $\mu e^y - \lambda e^x > \eta\lambda e^x$. Puesto que $x > 0$, $e^x > 1$, y como $\lambda > \mu > 0$, se tiene $\mu e^y - \lambda e^x > \eta\lambda e^x > \eta\lambda$, de lo cual se concluye que $\mu e^y - \lambda e^x > \eta\lambda > 0$. □

Nota 2.1. *Sean $E_\lambda(x) = \lambda e^x$ y $E_\mu(y) = \mu e^y$ con $\lambda > \mu > 1/e$, x y y como en el Lema 2.1. Se escoge η tal que*

$$\log\left(\frac{\eta+1}{\eta\mu}\right) < 1. \tag{2.2}$$

Debido a que $\log x < 1$ para $0 < x < e$, se tiene que $0 < \frac{\eta+1}{\eta\mu} < e$, por lo tanto $\eta + 1 - \eta\mu e < 0$. Entonces $\eta(\mu e - 1) > 1$, así que $\eta > \frac{1}{\mu e - 1}$. Si $\mu e - 1 > 0$, entonces $\mu > \frac{1}{e}$, por lo tanto $\lambda > \mu > 1/e$. Nuevamente E_λ^j denota la $j-$ésima función exponencial.

Corolario 2.1. *Con las condiciones del Lema 2.1, para todo $j \geq 1$ se cumple*

$$E_\mu^j(y) > E_\lambda^j(x). \tag{2.3}$$

Demostración. Usando el hecho de que $x \geq 1+\log x$, del Lema 2.1 y la ecuación (2.2) se tiene que

$$\mu e^y - \lambda e^x > \eta\lambda > \log \eta\lambda + \log \frac{\eta+1}{\eta\mu} = \log(\eta+1)\,\lambda/\mu, \tag{2.4}$$

así que $E_\lambda(x)$ y $E_\mu(y)$ satisfacen la hipótesis del Lema 2.1. La prueba ahora se sigue por inducción. □

Se presenta ahora el siguiente teorema, el cual es el resultado principal de este artículo:

Teorema 2.1. *Si $a \leq e^{1/e}$, entonces existe $n_0(a)$ tal que $T(b,n) > T(a,n+1)$ para todo $n > n_0(a)$. Si $a > e^{1/e}$, entonces existe $b_0 > a$ tal que $T(b,n) < T(a,n+1)$ para cualesquiera n y $b \in \big(a, b_0(a)\big]$.*

Demostración. Note que si se define $F_a(x) = a^x$, y se denota la $n-$ésima composición de F_a consigo misma por $F_a^n(a)$, entonces $F_a^n(a) = T(a,n+1)$. El gráfico de $F_a(x)$ para $a < e^{1/e}$ corta la recta $y = x$ en dos puntos $l(a)$ y $r(a)$, los cuales están a la derecha de a. Bajo la iteración de $F_a(x)$, $l(a)$ es atractor, y la sucesión $F_a^n(a) = T(a,n+1)$ se aproximará desde la izquierda. En otras palabras, una criatura cuyo paso inicial es de tamaño $a < 1/e$ se cansa rápidamente, dando progresivamente pasos pequeños, y nunca logrará sobrepasar a $l(a)$. Es fácil ver que si $b > a$ entonces cualquier $F_b(x)$ no interseca la recta $y = x$ ó $l(b)$ está a la derecha de $l(a)$. En el primer caso la criatura más grande nunca se cansa, mientras que en el segundo se aproximará al punto $l(b)$. En cualquier caso, eventualmente debe sobrepasar a la criatura más pequeña. El caso $a = e^{1/e}$ se trata en forma similar. Para tratar el caso $a > e^{1/e}$, se convierte el problema de comparación de torres de potencias de diferentes bases a un problema de comparación de iteradas de una función exponencial. Dado $a > e^{1/e}$, sea $e^y = T(a,n_0+1)$ y $\mu = \log a$; ahora, sea $e^x = T(a,n_0)$ y $\lambda = \log b_0$, donde $a < b_0 < a^a$ y n_0 se determina más adelante. Para a dado, η es fijo y tal que la ecuación (2.2) se mantiene constante. Note que $\lambda = \log b_0 > \log a = \mu > 1/e$. Se tiene que

$$E_\mu(y) = \mu e^y = T(a,n_0+1)\log a, \tag{2.5}$$

y de la misma forma,

$$E_\mu(x) = \mu e^x = T(b_0,n_0)\log b. \tag{2.6}$$

Se mostrará que existen n_0 y b_0 tales que x y y satisfacen las condiciones del Lema 2.1. Por el Corolario 2.1 se sigue que $E_\mu^j(y) > E_\lambda^j(x)$ para todo j. En términos de las torres se tiene que $T(a, n_0+1)\log a > T(b_0, n_0)\log b$ para todo j. Dado que $\log b_0 > \log a$, y debido a la monotonía de las torres, se concluye que

$$T(a, n) > T(b, n-1) \tag{2.7}$$

para todo $b \in (a, b_0)$ y para todo n. Es suficiente encontrar n_0 y b_0 tales que $x > 0$ y $y - x > (\eta + 1)\lambda$.

La condición $x > 0$ se sigue automáticamente para cualquier $b_0 > a$ y cualquier n_0 con $a > 1/e$. Por lo tanto, si $n \to \infty$ entonces $T(a, n) - T(a, n_0) \to \infty$. Se puede encontrar n_0 tal que

$$(T(a, n_0) - T(a, n_0 - 1))\log a > (\eta + 3)\log a^a, \tag{2.8}$$

de lo cual resulta

$$(T(a, n_0) - T(a, n_0 - 1))\log a > (\eta + 3)\log b_0 \tag{2.9}$$

para cualquier valor de $a < b_0 < a^a$.

Dado $b_1 > a$, se define

$$T(b_1, n_0 - 1) - T(a, n_0 - 1) = 1. \tag{2.10}$$

Similarmente, se puede escoger b_2 lo suficientemente cerca de a tal que

$$T(a, n_0 - 1)(\log b_2 - \log a) < \log b_2. \tag{2.11}$$

Claramente, $a < b_1$, $b_2 < a^a$. Sea $b = \text{mín}\{b_1, b_2\}$. De la definición de x y y se tiene que

$$y - x = T(a, n_0)\log a - T(b_0, n_0 - 1)\log b_0, \tag{2.12}$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} y - x = {} & (T(a, n_0) - T(a, n_0 - 1))\log a - T(a, n_0 - 1)(\log b - \log a) \\ & - (T(b_0, n_0 - 1) - T(a, n_0 - 1))\log b_0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

De aquí se tiene que

$$y - x > (\eta + 3)\log b_0 - 2\log b_0, \tag{2.14}$$

o también

$$y - x > (\eta + 1)\log b_0 = (\eta + 1)\,\lambda. \tag{2.15}$$

Entonces, dado cualquier a, se pueden obtener b_0 y n_0 tales que la ecuación (2.7) se mantiene constante. □

Ejemplo 2.1. Sea $a = 1{,}3$, $b = 1{,}4$. Al graficar simultáneamente a^x, b^x y la recta $y = x$, se observa que la primera intersección de a^x con la recta $y = x$ es el punto $l(a)$, la segunda intersección de a^x con la recta $y = x$ es el punto $r(a)$. La primera intersección de b^x con la recta $y = x$ es el punto $l(b)$, la segunda intersección de b^x con la recta $y = x$ es el punto $r(b)$. Por otro lado, al hacer $b = 1{,}5$, b^x no se interseca con la recta $y = x$.

Ejemplo 2.2. De otra manera, cuando $a > e^{1/e}$ (por ejemplo $a = 1{,}6$), la gráfica de $F_a(x)$ no cruza la diagonal, así que no hay puntos fijos. En este caso se muestra que la presa puede escapar al infinito y eludir a su depredador. Note que si el paso inicial es un poco más grande que $e^{1/e}$ (por ejemplo $a = 1{,}45$), la criatura disminuirá su paso, hasta que su paso sea $x = e$, después de lo cual tomará un segundo aire, y hará progresivamente pasos más grandes.

Nota 2.2. *El Teorema 2.1 indica que las criaturas cuyo tamaño del paso sea más grande que $e^{1/e}$ pueden escapar de su depredador, quien a su vez tiene un tamaño de paso más pequeño que $b_0(a)$, mientras que las criaturas más pequeñas siempre serán atrapadas.*

Nota 2.3. *Para resaltar: el paso inicial más pequeño que un depredador necesita dar para capturar una presa con paso inicial de tamaño a tiene una cota inferior dada por*

$$\gamma(a) = \sup\{b \mid T(a, n+1) > T(b, n)\, \forall n \in \mathbb{N}\}. \tag{2.16}$$

La función γ se puede denominar "función de captura". El Teorema 2.1 implica que $\gamma(a) = a$ si $a \leq e^{1/e}$, y $\gamma(a) > a$ si $a > e^{1/e}$. También se define γ para $b_n(a)$, siendo $b_n(a)$ el tamaño del paso inicial del depredador para capturar la presa en n pasos, de manera que

$$T(b_n(a), n) = T(a, n+1), \tag{2.17}$$

donde n es el número de pasos que necesita una criatura cuyo paso inicial sea de tamaño $b_n(a)$ para capturar a otra criatura cuyo paso inicial sea de tamaño a; por lo tanto, se sigue que $\gamma(a) = \lim_{n\to\infty} b_n(a)$.

Nota 2.4. *La función de captura tiene algunas propiedades interesantes. Usando estimación se puede mostrar que γ es una función creciente. Otras propiedades de la función $\gamma(a)$ son difíciles de establecer. Se puede conjeturar que esta función es suave; no puede ser analítica en el punto $a = e^{1/e}$, pero en este punto $\gamma(a)$ y la recta $y = x$ tienen una tangencia de orden infinito.*

3. Comentarios finales

El problema de capturar tiene su origen en la dinámica compleja. Robert Louis Devaney y Mónica Moreno Rocha han definido una particular familia semilineal de funciones continuas h_λ que actúan en el plano, la cual tiene dinámica y topología similar a la exhibida por la familia exponencial compleja λe^z (ver [3]). Esta familia actúa exponencialmente en la coordenada x (la acción es conjugada a λe^x), y esencialmente es lineal en la coordenada y. Mónica Moreno Rocha en su Tesis Doctoral ([4]) ha mostrado que para cualquier par de parámetros μ y λ, las funciones $h\lambda$ y $h\mu$ no son topológicamente conjugadas. La prueba está basada en la imposibilidad de capturar como se describe arriba, pero en el entorno de h_λ.

Referencias

[1] R.L. Devaney, K. Josic, M. Moreno Rocha, P. Seal, Y. Shapiro and A.T. Frumosu. *Playing catchup with iterated exponentials.* Department of Mathematics and Statistics, Boston University, 2002.

[2] Wilhelm Ackermann. "Zum hilbertschen Aufbauder reellen Zahlen". *Math. Ann.* 99(1928), p. 118-133.

[3] R.L. Devaney and M. Moreno Rocha. "A semilinear model for exponential Dynamics and Topology". *Topology Proceedings*, 26, 2001.

[4] M. Moreno Rocha. *On Indecomposable Subsets of the Julia Set for Unstable Exponentials.* Ph.D. Dissertation, Boston University (2002).