Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 32, No. 2, 2014, pág. 117–128

Métricas rotacionalmente invariantes y el problema de Steklov

Óscar Andrés Montaño Carreño*

Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, Cali, Colombia.

Resumen. Bajo condiciones en el signo de la curvatura de Ricci, encontramos cotas para el primer valor propio de Steklov en una bola n-dimensional dotada con una métrica rotacionalmente invariante.

Palabras clave: Valor propio de Steklov, métrica rotacionalmente invariante, curvatura de Ricci.
MSC2010: 35P15, 53C20, 53C42, 53C43.

Rotationally invariant metrics and the Steklov problem

Abstract. Under conditions on the sign of the Ricci curvature, we find bounds for the first Steklov eigenvalue, in a n-dimensional ball endowed with a rotationally invariant metric.

Keywords: Steklov eigenvalue, rotationally invariant metric, Ricci curvature.

1. Introducción

Sea $(\overline{M}, g)$ una variedad Riemanniana n-dimensional, compacta, conexa y con borde suave ∂M; dada una función $u \in C^\infty(\partial M)$, sea $\hat{u}$ la extensión armónica de u, es decir, $\hat{u}$ es la única solución del problema

$$\begin{cases} \Delta_g \hat{u} &= 0 \ \text{ en } M, \\ \quad \hat{u} &= u \ \text{ sobre } \partial M. \end{cases}$$

El operador Dirichlet-Neumann es el operador definido por

$$L : C^\infty(\partial M) \to C^\infty(\partial M),$$
$$Lu = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta},$$

* Email: oscar.montano@correounivalle.edu.co
Recibido: 26 de febrero de 2014, Aceptado: 02 de mayo de 2014.
Para citar este artículo: O.A. Montaño Carreño, Métricas rotacionalmente invariantes y el problema de Sketlov, *Rev. Integr. Temas Mat.* 32 (2014), no. 2, 117-128.

donde η es la normal unitaria exterior a ∂M. L es un operador autoadjunto no negativo en $L^2(\partial M)$ con espectro discreto

$$0 = \nu_0 < \nu_1 \leq \cdots \leq \nu_k \leq \cdots,$$

con ν_k tendiendo a infinito. Los valores propios para este problema fueron estudiados en 1902 por Steklov [13] y son a menudo llamados valores propios de Steklov. El primer valor propio no cero ν_1 de L es conocido como el primer valor propio de Steklov y está caracterizado variacionalmente por

$$\nu_1 = \min_{\varphi \in C^\infty(\overline{M})} \left\{ \frac{\int_M |\nabla \varphi|^2 \, dv}{\int_{\partial M} \varphi^2 d\sigma} : \int_{\partial M} \varphi d\sigma = 0 \right\}. \tag{1}$$

Para la bola n-dimensional unitaria $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ los valores propios de la función Dirichlet-Neumann son $\nu_k = k$, $k = 0, 1, 2, ...$, y las funciones propias están dadas por el espacio de polinomios armónicos homogéneos de grado k restringidos a la esfera $(n-1)$-dimensional S^{n-1}. Las funciones coordenadas $\{x_1, \cdots, x_n\}$ son funciones armónicas con grado de homogeneidad uno, y ellas son funciones propias correspondientes al primer valor propio de Steklov sobre la bola unitaria. El primer valor propio de Steklov sobre la bola n-dimensional de radio $r > 0$ es $\nu_1(B_r) = \frac{1}{r}$, y el correspondiente espacio propio es el generado por las funciones coordenadas.

Una forma práctica de plantear el problema de Steklov es encontrar una función de temperatura φ, en estado estacionario sobre M, tal que el flujo en cada punto de la frontera sea proporcional a la temperatura en dicho punto, es decir, encontrar una solución del problema

$$\begin{aligned} \Delta_g \varphi &= 0 \text{ en } M, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= \nu \varphi \text{ sobre } \partial M. \end{aligned} \tag{2}$$

Al igual que en el problema de Dirichlet y de Neumann, en el problema de Steklov se han hecho estimativos geométricos para el primer valor propio; por ejemplo, en dominios del plano están los trabajos de Weinstock [14], Kuttler y Sigillito [9] y Payne [12]; en variedades Riemannianas tenemos los trabajos de Escobar [3, 4, 5], Wang y Xia [15], [16] e Ilias y Makhoul [8].

Para métricas rotacionalmente invariantes $ds^2 + f^2(s)\, dw^2$, en la bola n-dimensional, B_r, $r > 0$, Escobar [2] demostró que, en coordenadas polares, la primera función propia asociada al primer valor propio de Steklov se puede escribir en la forma

$$\varphi(s, w) = \psi(s) e(w),$$

donde $e(w)$ satisface la ecuación $\overline{\Delta} + (n-1)e = 0$ sobre S^{n-1}, y ψ satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} &\frac{1}{f^{n-1}(s)} \frac{d}{ds}\left(f^{n-1}(s) \frac{d}{ds} \psi(s) \right) - \frac{(n-1)\psi(s)}{f^2(s)} = 0, \text{ en } (0, r), \\ &\psi'(r) = \nu_1 \psi(r), \ \psi(0) = 0. \end{aligned}$$

Cuando $n = 2$, la ecuación se puede resolver explícitamente; en este caso ψ tiene la forma

$$\psi(s) = (Cte)e^{\int^s \frac{dt}{f(t)}},$$

y por lo tanto el primer valor propio de Steklov es $\nu_1 = \dfrac{1}{f(r)}$.

Para dimensiones mayores, $n \geq 3$, Montaño [10] demostró que si la curvatura de Ricci es no negativa sobre B_r y la curvatura media $h(r)$ es mayor que cero sobre ∂B_r, entonces

$$\nu_1 \geq h(r).$$

Con un argumento distinto al anterior, y curvatura de Ricci no positiva, Montaño [11] demostró que

$$\nu_1 \leq h(r).$$

En este artículo, para métricas rotacionalmente invariantes en la bola n-dimensional B_r encontramos una cota superior y una cota inferior para el primer valor propio del problema de Steklov, cuando la curvatura de Ricci es no negativa y no positiva, respectivamente.

2. Preliminares

2.1. Métricas rotacionalmente invariantes

Sea $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ la esfera unitaria n-dimensional; llamaremos parametrización estándar de S^{n-1} la parametrización

$$\begin{aligned} y(w) &= y(w_1, \cdots, w_{n-1}) \\ &= (x_1(w), \cdots, x_n(w)), \end{aligned} \tag{3}$$

donde

$$\begin{aligned} x_1(w) &= \prod_{j=1}^{n-1} \operatorname{sen} w_j, \\ x_i(w) &= \Big(\prod_{j=i}^{n-1} \operatorname{sen} w_j \Big) \cos w_{i-1}, i = 2, \cdots, n-1, \\ x_n(w) &= \cos w_{n-1}. \end{aligned}$$

En esta parametrización la matriz de la primera forma fundamental tiene la forma

$$\tilde{G}(w) = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{g}_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{g}_{n-2n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{g}_{ii}(w) = \prod_{j=i+1}^{n-1} \operatorname{sen}^2 w_j, \ i = 1, ..., n-2. \tag{4}$$

Si consideramos coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$, todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir en la forma

$$x(s,w) = sy(w),$$

con $s \geq 0$, siendo $y(w)$ la parametrización estándar de S^{n-1} dada en (3).

Definición 2.1. Diremos que g es una métrica rotacionalmente invariante sobre $\mathbb{R}^n$ si en coordenadas polares se puede escribir en la forma

$$ds^2 + f^2(s)\, dy^2, \tag{5}$$

donde dy^2 representa la métrica usual sobre S^{n-1} y f es una función suave con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

Sobre la bola n-dimensional $B_r(0)$, diremos que g es rotacionalmente invariante si además satisface la condición

$$f(s) > 0 \text{ para } 0 < s \leq r.$$

Si g es una métrica rotacionalmente invariante y G es la matriz de la primera forma fundamental asociada a la parametrización $x(s,w) = sy(w)$, entonces

$$G(s,w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f^2\tilde{g}_{11} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & f^2\tilde{g}_{n-1n-1} \end{pmatrix}.$$

Puesto que la conexión de Levi-Civita está determinada por la relación

$$\begin{aligned}\langle D_Y X, Z\rangle =& \frac{1}{2}(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle \\ & - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z]X\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle),\end{aligned} \tag{6}$$

entonces para los campos coordenados, correspondientes a la parametrización dada por $x(s,w) = sy(w)$, tenemos

$$D_{\frac{\partial x}{\partial s}} \frac{\partial x}{\partial s} = \overline{0}, \tag{7}$$

$$D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{f'}{f}\frac{\partial x}{\partial w_i}, \tag{8}$$

$$g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}} \frac{\partial x}{\partial w_j}, \frac{\partial x}{\partial s}\Big) = -ff'\tilde{g}_{ij}, \tag{9}$$

$$g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}} \frac{\partial x}{\partial w_j}, \frac{\partial x}{\partial w_k}\Big) = f^2\tilde{g}\Big(\tilde{D}_{\frac{\partial y}{\partial w_i}} \frac{\partial y}{\partial w_j}, \frac{\partial y}{\partial w_k}\Big), \tag{10}$$

$$\Gamma_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k, 1 \leq i,j,k \leq n-1. \tag{11}$$

$\tilde{D}$ denota la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica $\tilde{g}$ de S^{n-1}, y Γ_{ij}^k y $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ denotan los símbolos de Christoffel de las conexiones D y $\tilde{D}$, respectivamente.

2.2. Gradiente

Sea φ una función suave sobre (B_r, g), donde g es una métrica rotacionalmente invariante y B_r está parametrizada por $x(s,w) = sy(w)$. Entonces el campo gradiente está dado por

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial s} + \sum_{i=1}^{n-1} g^{ii}\frac{\partial\varphi}{\partial w_i}\frac{\partial x}{\partial w_i}.$$

De la ecuación anterior se deduce que

$$\begin{aligned}
|\nabla\varphi|^2 &= \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\Big)^2 + \frac{1}{f^2}\sum_{i=1}^{n-1}\tilde{g}^{ii}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial w_i}\Big)^2\\
&= \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\Big)^2 + \frac{1}{f^2}\left|\overline{\nabla}\varphi\right|^2,
\end{aligned}$$

donde $\overline{\nabla}$ denota el gradiente sobre S^{n-1}.

3. Curvaturas

3.1. Curvatura media

Si (B_r, g), $r > 0$, es la bola n-dimensional con centro en el origen y dotada con una métrica rotacionalmente invariante g, entonces la curvatura media sobre su frontera está dada por

$$h(r) = \frac{f'(r)}{f(r)}.$$

En efecto, puesto que $\frac{\partial x}{\partial s}(r,w) = y(w)$ es normal unitario exterior a la frontera de B_r, la identidad (8) implica que

$$g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial w_i}\Big) = g\Big(\frac{f'}{f}\frac{\partial x}{\partial w_i}, \frac{\partial x}{\partial w_i}\Big) = \Big(\frac{f'}{f}\Big)g\Big(\frac{\partial x}{\partial w_i}, \frac{\partial x}{\partial w_i}\Big),$$

y como consecuencia la curvatura media $h(r)$ está dada por

$$\begin{aligned}
h(r) &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} g\Big(\frac{\partial x}{\partial w_i}, \frac{\partial x}{\partial w_i}\Big)^{-1} g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial w_i}\Big)\\
&= \frac{f'(r)}{f(r)}.
\end{aligned} \tag{12}$$

3.2. Curvatura seccional radial

La curvatura seccional en la dirección radial está dada por

$$K\Big(\frac{\partial x}{\partial w_i}, \frac{\partial x}{\partial s}\Big) = \frac{-f''(s)}{f(s)},\ i = 1, ..., n-1. \tag{13}$$

Demostración. De (8) se sigue que

$$g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial s},\frac{\partial x}{\partial w_i}\Big)=ff'\tilde g\Big(\frac{\partial y}{\partial w_i},\frac{\partial y}{\partial w_i}\Big).$$

Derivando en la dirección radial y despejando obtenemos

$$\begin{aligned}g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial s}}D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial s},\frac{\partial x}{\partial w_i}\Big)&=-g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial s},D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial s}\Big)+(f')^2\tilde g\Big(\frac{\partial y}{\partial w_i},\frac{\partial y}{\partial w_i}\Big)+ff''\tilde g\Big(\frac{\partial y}{\partial w_i},\frac{\partial y}{\partial w_i}\Big)\\&=-g\Big(\frac{f'}{f}\frac{\partial x}{\partial w_i},\frac{f'}{f}\frac{\partial x}{\partial w_i}\Big)+(f')^2\tilde g\Big(\frac{\partial y}{\partial w_i},\frac{\partial y}{\partial w_i}\Big)+ff''\tilde g\Big(\frac{\partial y}{\partial w_i},\frac{\partial y}{\partial w_i}\Big)\\&=ff''\tilde g\Big(\frac{\partial y}{\partial w_i},\frac{\partial y}{\partial w_i}\Big).\end{aligned}$$

La igualdad (7) implica que

$$g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}D_{\frac{\partial x}{\partial s}}\frac{\partial x}{\partial s},\frac{\partial x}{\partial w_i}\Big)=g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\overline{0},\frac{\partial x}{\partial w_i}\Big)=0,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}K\Big(\frac{\partial x}{\partial w_i},\frac{\partial x}{\partial s}\Big)&=\frac{1}{g\Big(\frac{\partial x}{\partial w_i},\frac{\partial x}{\partial w_i}\Big)}\Big\{g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}D_{\frac{\partial x}{\partial s}}\frac{\partial x}{\partial s},\frac{\partial x}{\partial w_i}\Big)-g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial s}}D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial s},\frac{\partial x}{\partial w_i}\Big)\Big\}\\&=\frac{-ff''\tilde g_{ii}}{f^2\tilde g_{ii}}\\&=\frac{-f''}{f}.\end{aligned}$$

☑

3.3. Curvaturas seccionales no radiales

Las curvaturas seccionales no radiales $K(\frac{\partial x}{\partial w_i},\frac{\partial x}{\partial w_j})$, $i\neq j$, están dadas por

$$K\Big(\frac{\partial x}{\partial w_i},\frac{\partial x}{\partial w_j}\Big)=\frac{1-(f'(s))^2}{f^2(s)}. \tag{14}$$

Demostración. Empezaremos por encontrar una relación entre los tensores de curvatura. De la caracterización de la conexión de Levi-Civita (6) se tiene

$$g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial w_i},\frac{\partial x}{\partial w_j}\Big)=-\frac{1}{2}g_{ii,j};$$

entonces, derivando con respecto a $\frac{\partial x}{\partial w_j}$ tenemos

$$g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_j}}D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial w_i},\frac{\partial x}{\partial w_j}\Big)+g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial w_i},D_{\frac{\partial x}{\partial w_j}}\frac{\partial x}{\partial w_j}\Big)=-\frac{1}{2}g_{ii,jj}.$$

Con un argumento similar se tiene

$$g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}D_{\frac{\partial x}{\partial w_j}}\frac{\partial x}{\partial w_i},\frac{\partial x}{\partial w_j}\Big)+g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial w_j},D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial w_j}\Big)=\frac{1}{2}g_{jj,ii}.$$

De las dos últimas ecuaciones obtenemos

$$R\Big(\frac{\partial x}{\partial w_i}, \frac{\partial x}{\partial w_j}, \frac{\partial x}{\partial w_i}, \frac{\partial x}{\partial w_j}\Big) = g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial w_j}, D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial w_j}\Big) - g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial w_i}, D_{\frac{\partial x}{\partial w_j}}\frac{\partial x}{\partial w_j}\Big) - \frac{1}{2}(g_{ii,jj} + g_{jj,ii}). \tag{15}$$

De forma análoga para S^{n-1} se deduce

$$\tilde{R}\Big(\frac{\partial y}{\partial w_i}, \frac{\partial y}{\partial w_j}, \frac{\partial y}{\partial w_i}, \frac{\partial y}{\partial w_j}\Big) = \tilde{g}\Big(\tilde{D}_{\frac{\partial y}{\partial w_i}}\frac{\partial y}{\partial w_j}, \tilde{D}_{\frac{\partial y}{\partial w_i}}\frac{\partial y}{\partial w_j}\Big) - \tilde{g}\Big(\tilde{D}_{\frac{\partial y}{\partial w_i}}\frac{\partial y}{\partial w_i}, \tilde{D}_{\frac{\partial y}{\partial w_j}}\frac{\partial y}{\partial w_j}\Big) - \frac{1}{2}(\tilde{g}_{ii,jj} + \tilde{g}_{jj,ii}). \tag{16}$$

Puesto que $g_{ii,jj} = f^2\tilde{g}_{ii,jj}$, de las ecuaciones (15) y (16) se obtiene

$$\begin{aligned} R - f^2\tilde{R} = {} & g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial w_j}, D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial w_j}\Big) - g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial w_i}, D_{\frac{\partial x}{\partial w_j}}\frac{\partial x}{\partial w_j}\Big) \\ & - f^2\left\{\tilde{g}\Big(\tilde{D}_{\frac{\partial y}{\partial w_i}}\frac{\partial y}{\partial w_j}, \tilde{D}_{\frac{\partial y}{\partial w_i}}\frac{\partial y}{\partial w_j}\Big) - \tilde{g}\Big(\tilde{D}_{\frac{\partial y}{\partial w_i}}\frac{\partial y}{\partial w_i}, D_{\frac{\partial y}{\partial w_j}}\frac{\partial y}{\partial w_j}\Big)\right\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Por otro lado tenemos:

$$\begin{aligned} g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial w_j}, D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial w_j}\Big) &= g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial w_j}, \sum_k \Gamma_{ij}^k\frac{\partial x}{\partial w_k} - ff'\tilde{g}_{ij}\frac{\partial x}{\partial s}\Big) \\ &= \sum_k \Gamma_{ij}^k g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial w_j}, \frac{\partial x}{\partial w_k}\Big) - g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial w_j}, ff'\tilde{g}_{ij}\frac{\partial x}{\partial s}\Big) \\ &= \sum_k \tilde{\Gamma}_{ij}^k f^2\tilde{g}\Big(\tilde{D}_{\frac{\partial y}{\partial w_i}}\frac{\partial y}{\partial w_j}, \frac{\partial y}{\partial w_k}\Big) + \Big(ff'\tilde{g}_{ij}\Big)^2 \\ &= f^2\tilde{g}\Big(\tilde{D}_{\frac{\partial y}{\partial w_i}}\frac{\partial y}{\partial w_j}, \tilde{D}_{\frac{\partial y}{\partial w_i}}\frac{\partial y}{\partial w_j}\Big) + \Big(ff'\tilde{g}_{ij}\Big)^2, \end{aligned}$$

es decir

$$g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial w_j}, D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial w_j}\Big) = f^2\tilde{g}\Big(\tilde{D}_{\frac{\partial y}{\partial w_i}}\frac{\partial y}{\partial w_j}, \tilde{D}_{\frac{\partial y}{\partial w_i}}\frac{\partial y}{\partial w_j}\Big) + \Big(ff'\tilde{g}_{ij}\Big)^2. \tag{18}$$

Similarmente se deduce que

$$g\Big(D_{\frac{\partial x}{\partial w_i}}\frac{\partial x}{\partial w_i}, D_{\frac{\partial x}{\partial w_j}}\frac{\partial x}{\partial w_j}\Big) = f^2\tilde{g}\Big(\tilde{D}_{\frac{\partial y}{\partial w_i}}\frac{\partial y}{\partial w_i}, \tilde{D}_{\frac{\partial y}{\partial w_j}}\frac{\partial y}{\partial w_j}\Big) + (ff')^2\tilde{g}_{ii}\tilde{g}_{jj}. \tag{19}$$

De las ecuaciones (17), (18) y (19) se llega a

$$R - f^2\tilde{R} = -(ff')^2\left|\frac{\partial y}{\partial w_i} \wedge \frac{\partial y}{\partial w_j}\right|^2. \tag{20}$$

Dividiendo la relación obtenida entre los tensores de curvatura por

$$\left|\frac{\partial x}{\partial w_i} \wedge \frac{\partial x}{\partial w_j}\right|^2 = f^4\left|\frac{\partial y}{\partial w_i} \wedge \frac{\partial y}{\partial w_j}\right|^2 \tag{21}$$

y despejando, obtenemos

$$\begin{aligned}K &= \frac{R}{\left|\frac{\partial x}{\partial w_i} \wedge \frac{\partial x}{\partial w_j}\right|^2}\\ &= \frac{1}{f^2}\frac{\tilde{R}}{\left|\frac{\partial y}{\partial w_i} \wedge \frac{\partial y}{\partial w_j}\right|^2} - \frac{(f')^2}{f^2}\\ &= \frac{1}{f^2}\tilde{K} - \frac{(f')^2}{f^2}\\ &= \frac{1-(f')^2}{f^2}.\end{aligned}$$

☑

4. Resultados

Antes de enunciar y demostrar los resultados principales de esta sección, debemos hacer la siguiente observación que será importante para dichas demostraciones.

Observación 4.1. La curvatura de Ricci no negativa (respectivamente no positiva) implica que las curvaturas seccionales radiales son no negativas (respectivamente no positivas). Para esto basta observar que

$$\begin{aligned}Ricci\left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial s}\right) &= \sum_{i=1}^{n-1} R\left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\frac{\partial x}{\partial w_i}}{\left|\frac{\partial x}{\partial w_i}\right|}, \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\frac{\partial x}{\partial w_i}}{\left|\frac{\partial x}{\partial w_i}\right|}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n-1} K\left(\frac{\partial x}{\partial w_i}, \frac{\partial x}{\partial s}\right)\\ &= -(n-1)\frac{f''(s)}{f(s)}.\end{aligned}$$

4.1. Curvatura de Ricci no negativa

Teorema 4.2 (Cota superior)**.** *Sea (B_r, g) una bola en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ dotada con una métrica rotacionalmente invariante. Supongamos que B_r tiene curvatura de Ricci no negativa. Entonces el primer valor propio para el problema de Steklov ν_1 satisface*

$$\nu_1 \leq \left\{\frac{r}{f(r)}\right\}^{n+1} \frac{1}{r}.$$

La igualdad se tiene solamente para la métrica estándar de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. La curvatura seccional radial no negativa implica $f''(s) \leq 0$ y por lo tanto f' es una función decreciente para $0 \leq s \leq r$. Puesto que f' es decreciente, entonces $1 = f'(0) \geq f'(s)$, lo que implica que $f(s) - s$ es decreciente, y como consecuencia $0 = f(0) - 0 \geq f(s) - s$, es decir,

$$f(s) \leq s. \tag{22}$$

De otro lado, puesto que $(f - sf')' \geq 0$, entonces $(f - sf')$ es creciente, y por lo tanto $(f - sf') \geq (f - sf')(0) = 0$. La desigualdad anterior implica que $(\frac{s}{f})' = \frac{f - sf'}{f^2} \geq 0$, y como consecuencia

$$1 = \lim_{s \to 0} \frac{s}{f(s)} \leq \frac{s}{f(s)} \leq \frac{r}{f(r)}. \tag{23}$$

De las identidades (22) y (23) se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\int\limits_{B_r} |\nabla\varphi|^2 \, dv_g}{\int\limits_{\partial B_r} \varphi^2 d\sigma_g} &= \frac{\int\limits_{B_r} \left\{ (\frac{\partial\varphi}{\partial s})^2 + \frac{1}{(f(s))^2} \left|\overline{\nabla}\varphi\right|^2 \right\} f^{n-1}(s) dy ds}{\int\limits_{\partial B_r} \varphi^2 f^{n-1}(r) dy} \\
&\leq \left\{ \frac{r}{f(r)} \right\}^{n-1} \frac{\int\limits_{B_r} \left\{ (\frac{\partial\varphi}{\partial s})^2 + \frac{1}{(f(s))^2} \left|\overline{\nabla}\varphi\right|^2 \right\} s^{n-1} dy ds}{\int\limits_{\partial B_r} \varphi^2 r^{n-1} dy} \\
&= \left\{ \frac{r}{f(r)} \right\}^{n-1} \frac{\int\limits_{B_r} \left\{ (\frac{\partial\varphi}{\partial s})^2 + (\frac{s}{f(s)})^2 \frac{1}{s^2} \left|\overline{\nabla}\varphi\right|^2 \right\} s^{n-1} dy ds}{\int\limits_{\partial B_r} \varphi^2 r^{n-1} dy} \\
&\leq \left\{ \frac{r}{f(r)} \right\}^{n-1} \frac{\int\limits_{B_r} \left\{ (\frac{\partial\varphi}{\partial s})^2 + (\frac{r}{f(r)})^2 \frac{1}{s^2} \left|\overline{\nabla}\varphi\right|^2 \right\} s^{n-1} dy ds}{\int\limits_{\partial B_r} \varphi^2 r^{n-1} dy} \\
&\leq \left\{ \frac{r}{f(r)} \right\}^{n+1} \frac{\int\limits_{B_r} \left\{ (\frac{\partial\varphi}{\partial s})^2 + \frac{1}{s^2} \left|\overline{\nabla}\varphi\right|^2 \right\} s^{n-1} dy ds}{\int\limits_{\partial B_r} \varphi^2 r^{n-1} dy} \\
&= \left\{ \frac{r}{f(r)} \right\}^{n+1} \frac{\int\limits_{B_r} |\nabla\varphi|^2 \, dv_\delta}{\int\limits_{\partial B_r} \varphi^2 d\sigma_\delta},
\end{aligned}$$

donde δ es la métrica estándar de $\mathbb{R}^n$.
Si φ es función propia para (B_r, δ), entonces es admisible para (B_r, g), es decir, $\displaystyle\int_{\partial B_r} \varphi d\sigma_g = 0$, y por lo tanto de la caracterización variacional (1) se sigue que

$$\nu_1(B_r, g) \leq \frac{\int\limits_{B_r} |\nabla\varphi|^2 \, dv_g}{\int\limits_{\partial B_r} \varphi^2 d\sigma_g} \leq \left\{ \frac{r}{f(r)} \right\}^{n+1} \frac{1}{r}. \tag{24}$$

La igualdad se da si $f(s) \equiv s$, es decir, g es la métrica estándar de $\mathbb{R}^n$. ☑

4.2. Curvatura de Ricci no positiva

Teorema 4.3 (Cota inferior). *Sea (B_r, g) una bola en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ dotada con una métrica rotacionalmente invariante. Supongamos que B_r tiene curvatura de Ricci no positiva.*

Entonces el primer valor propio para el problema de Steklov ν_1 *satisface*

$$\nu_1 \geq \left\{ \frac{r}{f(r)} \right\}^{n+1} \cdot \frac{1}{r}.$$

La igualdad se tiene solamente para la métrica estándar de $\mathbb{R}^n$*.*

Demostración. Haciendo un razonamiento análogo al usado para deducir las identidades (22) y (23) se puede demostrar:

$$f(s) \geq s, \tag{25}$$

$$1 = \lim_{s \to 0} \frac{s}{f(s)} \geq \frac{s}{f(s)} \geq \frac{r}{f(r)}. \tag{26}$$

De las anteriores identidades se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\int\limits_{B_r} |\nabla \varphi|^2 \, d\upsilon_g}{\int\limits_{\partial B_r} \varphi^2 d\sigma_g} &= \frac{\int\limits_{B_r} \left\{ (\frac{\partial \varphi}{\partial s})^2 + \frac{1}{(f(s))^2} \left|\overline{\nabla} \varphi\right|^2 \right\} f^{n-1}(s) dy ds}{\int\limits_{\partial B_r} \varphi^2 f^{n-1}(r) dy} \\
&\geq \left\{ \frac{r}{f(r)} \right\}^{n-1} \frac{\int\limits_{B_r} \left\{ (\frac{\partial \varphi}{\partial s})^2 + \frac{1}{(f(s))^2} \left|\overline{\nabla} \varphi\right|^2 \right\} s^{n-1} dy ds}{\int\limits_{\partial B_r} \varphi^2 r^{n-1} dy} \\
&= \left\{ \frac{r}{f(r)} \right\}^{n-1} \frac{\int\limits_{B_r} \left\{ (\frac{\partial \varphi}{\partial s})^2 + (\frac{s}{f(s)})^2 \frac{1}{s^2} \left|\overline{\nabla} \varphi\right|^2 \right\} s^{n-1} dy ds}{\int\limits_{\partial B_r} \varphi^2 r^{n-1} dy} \\
&\geq \left\{ \frac{r}{f(r)} \right\}^{n-1} \frac{\int\limits_{B_r} \left\{ (\frac{\partial \varphi}{\partial s})^2 + (\frac{r}{f(r)})^2 \frac{1}{s^2} \left|\overline{\nabla} \varphi\right|^2 \right\} s^{n-1} dy ds}{\int\limits_{\partial B_r} \varphi^2 r^{n-1} dy} \\
&\geq \left\{ \frac{r}{f(r)} \right\}^{n+1} \frac{\int\limits_{B_r} \left\{ (\frac{\partial \varphi}{\partial s})^2 + \frac{1}{s^2} \left|\overline{\nabla} \varphi\right|^2 \right\} s^{n-1} dy ds}{\int\limits_{\partial B_r} \varphi^2 r^{n-1} dy} \\
&= \left\{ \frac{r}{f(r)} \right\}^{n+1} \frac{\int\limits_{B_r} |\nabla \varphi|^2 \, d\upsilon_\delta}{\int\limits_{\partial B_r} \varphi^2 d\sigma_\delta}.
\end{aligned}$$

Si φ_1 es función propia para (B_r, g), entonces $\varphi = \varphi_1 - a$ es admisible para (B_r, δ), donde

$a = \dfrac{\int_{\partial B_r} \varphi_1 d\sigma_\delta}{\int_{\partial B_r} d\sigma_\delta}$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\nu_1(B_r, g) = \frac{\int_{B_r} |\nabla \varphi_1|^2 \, dv_g}{\int_{\partial B_r} \varphi_1^2 d\sigma_g} &= \frac{\int_{B_r} |\nabla \varphi|^2 \, dv_g}{\int_{\partial B_r} \varphi^2 d\sigma_g - \int_{\partial B_r} a^2 d\sigma_g} \\
&\geq \frac{\int_{B_r} |\nabla \varphi|^2 \, dv_g}{\int_{\partial B_r} \varphi^2 d\sigma_g} \geq \left\{ \frac{r}{f(r)} \right\}^{n+1} \frac{1}{r}.
\end{aligned}$$

La igualdad se da si $f(s) \equiv s$, es decir, g es la métrica estándar de $\mathbb{R}^n$. ☑

Referencias

[1] Bramble J.H. and Payne L.E., "Bounds in the Neumann problem for second order uniformly elliptic operators", *Pacific J. Math.* 12 (1962), 823-833.

[2] Escobar J.F., "Topics in PDE's and Differential Geometry", in *XII Escola de Geometria Diferencial*, Goiania (Ed. da UFG), (2002), 88 p.

[3] Escobar J.F., "The geometry of the first non-zero Stekloff eigenvalue", *J. Funct. Anal.* 150 (1997), no. 2, 544-556.

[4] Escobar J.F., "An isoperimetric inequality and the first Steklov eigenvalue", *J. Funct. Anal.* 165 (1999), no. 1, 101-116.

[5] Escobar J.F., "A comparison theorem for the first non-zero Steklov eigenvalue", *J. Funct. Anal.* 178 (2000), no. 1, 143-155.

[6] Escobar J.F., "The Yamabe problem on manifolds with boundary", *J. Differential Geom.* 35 (1992), no. 1, 21-84.

[7] Escobar J.F., "Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary", *Ann. of Math.* (2) 136 (1992), no. 1, 1-50.

[8] Ilias S. and Makhoul O., "A Reilly inequality for the first Steklov eigenvalue", *Differential Geom. Appl.* 29 (2011), no. 5, 699-708.

[9] Kuttler J.R. and Sigillito V.G., "Lower bounds for Stekloff and free membrane eigenvalues", *SIAM Review* 10 (1968), 368-370.

[10] Montaño O.A., "The Stekloff problem for rotationally invariant metrics on the ball", *Rev. Colombiana Mat.* 47 (2013), no. 2, 181-190.

[11] Montaño O.A., "Cota superior para el primer valor propio del problema de Steklov", *Rev. Integr. Temas Mat.* 31 (2013), no. 1, 53-58.

[12] Payne L.E., "Some isoperimetric inequalities for harmonic functions", *SIAM J. Math. Anal.* 1 (1970), 354-359.

[13] Steklov V.A., "Sur les problemes fondamentaux de la physique mathematique", *Ann. Sci. École Norm* 19 (1902), 445-490.

[14] Weinstock R., "Inequalities for a classical eigenvalue problem", *J. Rational Mech. Anal.* 3 (1954), 745-753.

[15] Wang Q. and Xia C., "Sharp bounds for the first non-zero Steklov eigenvalues", *J. Funct. Anal* 257 (2009), no. 9, 2635-2644.

[16] Xia C. and Wang Q., "Inequalities for the Steklov eigenvalues", *Chaos Solitons Fractals* 48 (2013), 61-67.

[17] Xia C., "Rigidity of compact manifolds with boundary and nonnegative Ricci curvature", *Proc. Amer. Math. Soc.* 125 (1997), no. 6, 1801-1806.