Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 32, No. 1, 2014, pág. 39–54

Semántica categórica para subexponenciales en $SELL$

Carlos Ernesto Ramírez*

Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, Cali, Colombia.

Resumen. La semántica categórica ha permitido establecer de forma precisa y formal el significado de los términos y conectivos de distintas lógicas. En particular, los trabajos de distintos autores empezando por de Paiva y Hyland [3] han permitido abordar desde el enfoque categórico la semántica de la lógica lineal, tanto clásica como intuicionista. Uno de los aspectos más relevantes consiste en intentar dar una interpretación categórica al operador exponencial !. Mellies [11] y Bierman [4] finalmente han mostrado que esta interpretación corresponde a un composición entre adjuntos monoidales. Con la aparición de SELL, ahora se cuenta con una familia de subexponenciales ajustados dentro de una estructura de preorden. Lo que se pretende en este trabajo es obtener una interpretación categórica para esta familia de subexponenciales, inspirados en la misma noción de adjuntos monoidales, pero que respete la estructura de preorden asignada para la familia de exponenciales.
Palabras claves: Lógica lineal, categorías monoidales, categorías enriquecidas, semántica categórica.
MSC2010: 03F52, 18C50.

Categorical semantics for subexponentials in $SELL$

Abstract. Categorical semantics have established formal and accurately the meaning of the terms and connectives of different logics. In particular, the work of various authors, starting with de Paiva and Hyland [3], have allowed to look at the semantics of linear logic, both classical and intuitionists, from a categorical point of view. One of the most important task is to try to give a categorical interpretation to the exponential operator !. Mellies [11] and Bierman [4] have finally shown that this interpretation corresponds to a composition between monoidal adjoints. With the emergence of $SELL$, now we have a family of subexponential, adjusted within a preorder structure. The intention in this work is to obtain a categorical interpretation for this family of subexponentials, inspired by the very notion of monoidal adjoints, but preserving the preorder structure assigned to the exponential family.
Keywords: Linear logic, monoidal categories, enriched categories, categorical semantic.

* *E-mail*: carlos.ernesto.ramirez@correounivalle.edu.co.
Recibido: 12 de septiembre de 2013, Aceptado: 10 de febrero de 2014.
Para citar este artículo: C. E. Ramírez, Semántica categórica para subexponenciales en $SELL$, *Rev. Integr. Temas Mat.* 32 (2014), no. 1, 39–54.

1. Elementos básicos

Presentaremos en esta sección las definiciones básicas necesarias para comprender la estructura semántica de la interpretación categórica LL. Nos referimos a las nociones de categoría monoidal simétrica cerrada, funtor monoidal fuerte, tranformaciones naturales monoidales, comonoides conmutativos y morfismo de comonoides. Invitamos al lector a referirse al texto clásico de Mac Lane [10] para revisar las definiciones de comónada, coálgebra y morfismo coalgebraico.

Una categoría monoidal es una categoría $\mathcal{C}$ equipada con un funtor $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, un objeto 1 de $\mathcal{C}$ junto con isomorfismos naturales

$$\alpha_{A,B,C} : A \otimes (B \otimes C) \to (A \otimes B) \otimes C \quad \lambda_A : 1 \otimes A \to A \quad \rho_A : A \otimes 1 \to A,$$

haciendo que los diagramas siguientes conmuten:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "A\otimes\alpha"'] & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[d, "\alpha"] \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[r, "\alpha"] & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[r, "\alpha\otimes D"] & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (1 \otimes B) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "A\otimes\lambda"'] & (A \otimes 1) \otimes B \arrow[d, "\rho\otimes B"] \\
A \otimes B \arrow[r] & A \otimes B
\end{tikzcd}$$

y en donde se cumple que

$$\lambda_1 = \rho_1 : 1 \otimes 1 \to 1.$$

Una simetría para una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ es un isomorfismo natural

$$\gamma_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$$

que satisface $\gamma_{B,A} \circ \gamma_{B,A} = \mathbf{id}_{A\otimes B}$, y que hace que los siguientes diagramas conmuten:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "A\otimes\gamma_{B,C}"] \arrow[d, "\alpha_{A,B,C}"'] & A \otimes (C \otimes B) \arrow[r, "\alpha_{A,C,B}"] & (A \otimes C) \otimes B \arrow[d, "\gamma_{A,C}\otimes B"] \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "\gamma_{A\otimes B},C"] & C \otimes (A \otimes B) \arrow[r, "\alpha_{C,A,B}"] & (C \otimes A) \otimes B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes 1 \arrow[rr, "\gamma_{A,1}"] \arrow[dr, "\rho_A"'] & & 1 \otimes A \arrow[dl, "\lambda_A"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Una estructura cerrada sobre una categoría monoidal simétrica está dada por un bifuntor $(\_ \multimap \_) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$, junto con un isomorfismo

$$\mathcal{C}(A \otimes B, C) \cong \mathcal{C}(A, B, \multimap C)$$

que es natural en A, B y C. Una categoría monoidal simétrica cerrada es una categoría monoidal equipada con una simetría y una estructura cerrada.

Ahora, supongamos que contamos con un par de categorías monoidales simétricas $(\mathcal{M}, \times, e)$ y $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$. Un funtor monoidal simétrico es un funtor $U : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ dotado de tranformaciones naturales

$$m_{A,B} : U(A) \otimes U(B) \to U(A \times B) \qquad m_e : 1 \to U(e)$$

que hace que los siguientes diagramas conmuten:

$$\begin{tikzcd}
UA \otimes (UB \otimes UC) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "UA \otimes m_{B,C}"'] & (UA \otimes UB) \otimes UC \arrow[d, "m_{A,B} \otimes UC"] \\
UA \otimes U(B \times C) \arrow[d, "m_{A,B \times C}"'] & U(A \times B) \otimes UC \arrow[d, "m_{A \times B, C}"] \\
U(A \times (B \times C)) \arrow[r, "U(\alpha_{\mathcal{M}})"] & U((A \times B) \times C)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
UA \otimes 1 \arrow[r, "\rho_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "UA \otimes m_e"'] & UA \\
UA \otimes Ue \arrow[r, "m_{A,e}"] & U(A \times e) \arrow[u, "U(\rho_{\mathcal{M}})"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \otimes UB \arrow[r, "\lambda_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "m_e \otimes UB"'] & UB \\
Ue \otimes UB \arrow[r, "m_{e,B}"] & U(e \times B) \arrow[u, "U(\lambda_{\mathcal{M}})"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
UA \otimes UB \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "m_{A,B}"'] & UB \otimes UA \arrow[d, "m_{B,A}"] \\
U(A \times B) \arrow[r, "U(\gamma_{\mathcal{M}})"] & U(B \times A)
\end{tikzcd}$$

Un funtor monoidal simétrico es fuerte cuando m_e y $m_{A,B}$ son isomorfismos. Este funtor es estricto en caso de que estas transformaciones naturales sean identidades.

Una transformación natural monoidal

$$\theta : (U, m_{A,B}, m_e) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} (F, n_{A,B}, n_e) : (\mathcal{M}, \times, e) \longrightarrow (\mathcal{C} \otimes, 1)$$

entre funtores monoidales simétricos es una transformación natural entre los funtores base $\theta : U \longrightarrow F$ que hace que los diagramas siguientes conmuten:

$$\begin{tikzcd} UA \otimes UB \arrow[r, "m_{A,B}"] \arrow[d, "\theta_A \otimes \theta_B"'] & U(A \times B) \arrow[d, "\theta_{A\times B}"] \\ FA \otimes FB \arrow[r, "n_{A,B}"] & F(A \times B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "m_e"] \arrow[d] & Ue \arrow[d, "\theta_e"] \\ 1 \arrow[r, "n_e"] & Fe \end{tikzcd}$$

Es importante resaltar el siguiente lema:

Lema 1.1. *Las categorías monoidales simétricas, junto con los funtores monoidales simétricos y las transformaciones naturales monoidales, forman una 2-categoría*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d_A"] \arrow[d, "d_A"'] & A \otimes A \arrow[r, "A \otimes d_A"] & A \otimes (A \otimes A) \arrow[d, "\alpha_{A,A,A}"] \\ A \otimes A \arrow[rr, "d_A \otimes A"] & & (A \otimes A) \otimes A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "d_A"'] & A \\ 1 \otimes A \arrow[u, "\lambda_A"] & A \otimes A \arrow[l, "e_A \otimes A"'] \arrow[r, "A \otimes e_A"] & A \otimes 1 \arrow[u, "\rho_A"'] \end{tikzcd}$$

Consideremos ahora dos comonoides conmutativos (A, d_A, e_A) y (B, d_B, e_B). Un morfismo $f : A \longrightarrow B$ es comonoidal cuando el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\mathbf{id}_1"] & 1 \\ A \arrow[u, "e_A"] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_A"'] & B \arrow[u, "e_B"'] \arrow[d, "d_B"] \\ A \otimes A \arrow[r, "f \times f"] & B \otimes B \end{tikzcd}$$

En nuestra construcción semántica para $SELL$ será necesario contar con categorías dotadas de cierta estructura interna. Para ello presentamos la siguiente definición:

Definición 1.2 (Categoría $\mathcal{V}$-enriquecida). Una $\mathcal{V}$-categoría $\mathcal{A}$ consiste de:

(i) un conjunto *ob* $\mathcal{A}$ de objetos;

(ii) un objeto morfismo $\mathcal{A}(A, B) \in \mathcal{V}_0$ por cada par de objetos $A, B \in \mathcal{A}$;

(iii) una ley de composición $M = M_{ABC} : \mathcal{A}(B, C) \otimes \mathcal{A}(A, B) :\rightarrow \mathcal{A}(A, C)$ por cada tripla de objetos $A, B, C \in \mathcal{A}$;

(iv) un elemento identidad $j_A : I \to \mathcal{A}(A, A)$ por cada objeto $A \in \mathcal{A}$.

Estos objetos y morfismos están sujetos a axiomas de asociatividad y unidad expresados por la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{A}(C,D) \otimes \mathcal{A}(B,C)) \otimes \mathcal{A}(A,B) \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "M\otimes 1"'] & & \mathcal{A}(C,D) \otimes (\mathcal{A}(B,C) \otimes \mathcal{A}(A,B)) \arrow[d, "1\otimes M"] \\
\mathcal{A}(B,D) \otimes \mathcal{A}(A,B) \arrow[dr, "M"'] & & \mathcal{A}(C,D) \otimes \mathcal{A}(A,C) \arrow[dl, "M"] \\
& \mathcal{A}(A,D) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(B,B) \otimes \mathcal{A}(A,B) \arrow[r, "M"] & \mathcal{A}(A,B) & \mathcal{A}(A,B) \otimes \mathcal{A}(A,A) \arrow[l, "M"'] \\
I \otimes \mathcal{A}(A,B) \arrow[u, "j\otimes 1"] \arrow[ur, "l"'] & & \mathcal{A}(A,B) \otimes I \arrow[u, "1\otimes j"'] \arrow[ul, "r"]
\end{tikzcd}$$

siendo l y r los isomorfismos naturales de las categorías monoidales.

Una vez que hemos dotado de estructura la categoría, podemos ahora construir funtores que preserven en un sentido conveniente la estructura interna de la categoría enriquecida, es decir:

Definición 1.3 ($\mathcal{V}-$funtor)**.** Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ $\mathcal{V}-$categorías. Un $\mathcal{V}-$funtor $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una función

$$T : ob\mathcal{A} \to ob\mathcal{B},$$

en donde para cada para $A, B \in ob\,\mathcal{A}$ existe una función $T_{AB} : \mathcal{A}(A, B) \to \mathcal{B}(TA, TB)$ que satisface los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(B,C) \otimes \mathcal{A}(A,B) \arrow[r, "M"] \arrow[d, "T\otimes T"'] & \mathcal{A}(A,C) \arrow[d, "T"] \\
\mathcal{B}(TB,TC) \otimes \mathcal{B}(TA,TB) \arrow[r, "M"'] & \mathcal{B}(TA,TC)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathcal{A}(A,A) \arrow[dd, "T"] \\
I \arrow[ur, "j"] \arrow[dr, "j"'] & \\
& \mathcal{B}(TA,TA)
\end{tikzcd}$$

2. *Hacia una semántica categórica para lógica lineal*

Una vez que Jean-Yves Girard introduce la lógica lineal en 1987 [6], muchos investigadores ponen su empeño en obtener una estructura categórica conveniente, unificada y lo suficientemente amplia como para poder interpretar los conectivos introducidos por

Girard. La axiomatización propuesta por Seely [16] trata de asegurar que la categoría de Kleisli asociada a la comónoda $(!, \delta, \epsilon)$ sea una categoría cartesiana cerrada, aunque esta axiomatización se basó en una reducción de lógica lineal al caso intuicionista.

Sin embargo, Benton, Bierman, de Paiva y Hyland [3] retomaron esta axiomatización reconsiderando ahora la lógica lineal junto con el procedimiento de eliminación por corte ("cut-elimination" en inglés). Esta perspectiva les permitió notar que el modelo de Seely no era válido, puesto que la denotación categórica de pruebas π y π' equivalentes por eliminación por corte, correspondía a morfismos distintos en la categoría de Seely. Bajo esta consideración, en su tesis doctoral Bierman [4] ajustó la definición de Seely del tal forma que esta vez resultara válida. Originalmente la definición de categoría de Seely está dada por:

Definición 2.1 (Seely). Una **Categoría de Seely** $\mathcal{C}$ consiste en:

1. una categoría simétrica monoidal cerrada con productos finitos $(\mathcal{C}, \otimes, 1, \&, \top)$, junto con una comónada $(!, \delta, \epsilon)$;
2. para cada objeto A de $\mathcal{A}$, un comonoide $(!A, d_A, e_A)$ con respecto al producto $\otimes$;
3. dos isomorfismos naturales $n : !A \otimes !B \cong (A \& B)$ y $p : 1 \cong \top$;
4. el funtor ! toma la estructura de comonoide del producto cartesiano a la estructura de comonoide del producto $\otimes$ (de forma natural).

Bajo esta axiomática, lo que busca la categoría de Seely es asegurar que la categoría de Kleisly $\mathcal{C}_!$ derivada de la comónada $(!, \delta, \epsilon)$ sea una categoría cartesiana cerrada. Al ser cartesiana cerrada, $\mathcal{C}_!$ es monoidal y simétrica. Si consideramos ahora la adjunción canónica $U \dashv F$ que relaciona la categoría monoidal simétrica $\mathcal{C}$ con su categoría de Kleisli $\mathcal{C}_!$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_! \arrow[r, bend left=40, "U"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend left=40, "F"] \end{tikzcd}$$

lo que Bierman muestra en su tesis doctoral es que la categoría de Seely es válida cuando la adjunción canónica $U \dashv F$ es monoidal simétrica. Esto es lo que finalmente motiva a la siguiente definición:

Definición 2.2 (Bierman). Una categoría de Seely es llamada una **categoría nueva-Seely** cuando la adjunción canónica $U \dashv F$ es monoidal simétrica.

Ahora bien, la validez de las categorías nueva-Seely se obtiene al relacionar este tipo de categorías con las categorías lineales provenientes de la axiomatización de la lógica lineal intuicionista presentada por Benton, Bierman, de Paiva y Hyland en [3].

Definición 2.3 (Benton, Bierman, de Paiva y Hyland). Una **categoría lineal** $\mathcal{C}$ consiste de

1. una categoría monoidal cerrada $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$, junto con:
2. una comónada monoidal simétrica $(!, \delta, \epsilon, m_{A,B}, m_1)$ tal que
   a) para toda !-coálgebra libre $(!A, \delta_A)$ hay dos transformaciones naturales monoidales con componentes $e_A :!A \to 1$ y $d_A :!A \to !A \otimes !A$ que forman un comonoide conmutativo y son morfismos de coálgebras.
   b) Siempre que $f : (!A, \delta_A) \to (!B, \delta_B)$ es una morfismo de coálgebras entre coálgebras libres, entonces f es también un morfismo de comonoides.

La validez de las categorías lineales está probada en [3].

Ahora bien, ¿por qué fijar nuestra atención en categorías lineales? El siguiente lema justifica su importancia:

Lema 2.4 (Benton, Bierman, de Paiva y Hyland)**.** *Toda categoría lineal es un modelo válido de lógica lineal intuicionista.*

Este lema permite establecer entonces la validez del ajuste presentado por Bierman de las categorías de Seely, es decir:

Lema 2.5 (Bierman)**.** *Toda categoría nueva-Seely es una categoría lineal, y toda categoría lineal con productos finitos es una categoría nueva-Seely.*

Hay que reconocer que, si bien las categorías lineales y nueva-Seely son técnicamente robustas, su formulación es intrincada y compleja. Sin embargo, es posible establecer un ajuste en estas categorías que sea más sencillo de presentar, pero conservando la validez de la misma. Esta definición proviene de Benton [2].

Definición 2.6 (Benton)**.** Una **categoría lineal-no-lineal (LNL)** consiste en

1. una categoría simétrica cerrada monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$;
2. una categoría $(\mathcal{M}, \times, e)$ con productos finitos;
3. una adjunción $U \dashv F$ entre funtores $U : \mathcal{M} \to C$ y $F : \mathcal{C} \to M$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, bend left, "U"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend left, "F"] \end{tikzcd}$$

4. isomorfismos $m_{A,B} : U(A \times B) \to U(A) \otimes U(B)$ y $m_e : 1 \to U(e)$, haciendo de $(U, m_{A,B}, m_e)$ un funtor simétrico monoidal fuerte de $(\mathcal{M}, \times, e)$ a $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$.

Es posible mostrar que una adjunción $U \dashv F$ entre categorías monoidales es monoidal si y solo si el funtor adjunto izquierdo U es estrictamente monoidal. Así, las categorías lineales-no-lineales pueden ser reformuladas como adjunciones monoidales entre una categoría cartesiana $\mathcal{M}$ y una categoría monoidal simétrica cerrada $\mathcal{C}$. Esta caracterización corresponde a Kelly [8] [1]

[1]Kelly también probó el opuesto del lema a citar, es decir, una adjunción $U \dashv F$ es monoidal si y solo si U es fuerte. Esto significa que toda categoría nueva-Seely define una categoría lineal-no-lineal con $(\mathcal{M}, \times, e) = (\mathcal{C}_!, \&, \top)$.

Lema 2.7 (Kelly). *Supóngase que* $(\mathcal{M}, \times, e)$ *y* $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ *son categorías monoidales, y sea* $U \dashv F$ *una adjunción entre las categorías* $\mathcal{M}$ *y* $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[rr, bend left, "U"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathcal{C} \arrow[ll, bend left, "F"] \end{tikzcd}$$

Supóngase también que el funtor $(U, m_{A,B}, m_e)$ *es fuertemente monoidal de* $(\mathcal{M}, \times, e)$ *a* $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$*. Entonces, la adjunción* $U \dashv F$ *es monoidal.*

Debe hacerse notar, sin embargo, que estas axiomáticas no resultan simples de verificar y no son compatibles de forma simple con modelos basados en teoría de juegos. Para el caso de las categorías de nueva-Seely se requiere construir una comónada sobre la categoría monoidal $\mathcal{C}$. Y en el caso de categorías lineales-no-lineales, que si bien son más simples, se requiere introducir una categoría cartesiana $\mathcal{M}$ junto con una categoría monoidal $\mathcal{C}$. Ambos métodos no resultan para nada intuitivos. Ante esta situación Lafont [9] introdujo en su tesis doctoral una noción que resulta más afín con el espirítu de la lógica lineal. Para ello, Lafont parte de una categoría $\mathbf{coMon}(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ de comonoides conmutativos sobre $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ y el funtor de olvido $U : \mathbf{coMon}(\mathcal{C}, \otimes, 1) \to \mathcal{C}$. Por construcción, la categoría $\mathbf{coMon}(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ tiene productos finitos y el funtor U es estrictamente monoidal. Por lo tanto, según la definición 2.6, solo basta verificar si u es un funtor adjunto izquierdo al funtor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{coMon}(\mathcal{C}, \otimes, 1)$. A partir de esto se puede presentar la siguiente definición:

Definición 2.8 (Lafont). Una **categoría de Lafont** consiste en:

1. una categoría simétrica monoidal cerrada con productos finitos $(\mathcal{C}, \otimes, 1, \&, \top)$;
2. por cada objeto A de $\mathcal{C}$, el objeto $!A$ es el comonoide conmutativo libre generado por A.

Considerando el punto 2, podemos afirmar que el funtor de olvido $U : \mathbf{CoMon}(\mathcal{C}, \otimes, 1) \to \mathcal{C}$ tiene funtor adjunto F, y así $! = UF$ es el comonoide sobre $\mathcal{C}$ de esta adjunción:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{coMon}(\mathcal{C}, \otimes, 1) \arrow[rr, bend left, "U"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathcal{C} \arrow[ll, bend left, "F"] \end{tikzcd}$$

Bierman logra probar en su tesis doctoral el siguiente resultado:

Lema 2.9. *Toda categoría de Lafont es una categoría lineal.*

La idea básica de la semántica categórica es que toda fórmula A debe ser asociada con un objeto $[A]$ y una prueba π del secuente $\Gamma \vdash \Delta$ con un morfismo $[\pi] : [\Gamma] \to [\Delta]$.

Para el caso de la modalidad !, dada una prueba π del secuente $\Gamma, !A, !A, \Delta \vdash B$ y una interpretación $[\pi]$ de esta prueba, la aplicación de la regla de contracción, es decir, dada la prueba

$$\dfrac{\dfrac{\pi \atop \vdots}{\Gamma, !A, !A, \Delta \vdash B}}{\Gamma, !A, \Delta \vdash B} \text{ contracción,}$$

esta debe ser interpretada como la precomposición de $[\pi]$ con d, en donde d es la multiplicación del comonoide

$$[\Gamma]\otimes![A] \otimes [\Delta] \xrightarrow{id_{[\Gamma]}\otimes d \otimes id_{[\Delta]}} [\Gamma]\otimes![A]\otimes![A] \otimes [\Delta] \xrightarrow{[\pi]} [B] \ .$$

Se procede de forma análoga para la aplicación de la regla de debilitamiento ("weakening") a la prueba π del secuente $\Gamma, !A, \Delta \vdash B$, es decir

$$\dfrac{\dfrac{\pi \atop \vdots}{\Gamma, \Delta \vdash B}}{\Gamma, !A, \Delta \vdash B} \text{ debilitamiento}$$

se interpreta como la precomposición con la unidad u, es decir

$$[\Gamma]\otimes![A] \otimes [\Delta] \xrightarrow{id_{[\Gamma]}\otimes u \otimes id_{[\Delta]}} [\Gamma] \otimes [\Delta] \xrightarrow{[\pi]} [B] \ .$$

Para el caso de la regla de promoción, dada una prueba π del secuente $!\Gamma \vdash A$, la prueba siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{\pi \atop \vdots}{!\Gamma \vdash A}}{!\Gamma \vdash !A} \text{ promoción}$$

debe ser interpretada por al morfismo de comonoide único

$$![\Gamma] \xrightarrow{\widetilde{[\pi]}} ![A] \ ,$$

el cual existe, pues hay un morfismo $[\pi]$ del comonoide conmutativo $![\Gamma]$ a $[A]$.

Finalmente, dada una prueba π del secuente $\Gamma, A, \Delta \vdash B$, la prueba

$$\dfrac{\dfrac{\pi \atop \vdots}{\Gamma, A, \Delta \vdash B}}{!\Gamma, !A, \Delta \vdash B} \text{ abandono}$$

se interpreta mediante la precomposición con el morfismo $\epsilon : ![A] \to [A]$

$$[\Gamma]\otimes![A] \otimes [\Delta] \xrightarrow{id_{[\Gamma]}\otimes \epsilon \otimes id_{[\Delta]}} [\Gamma] \otimes [A] \otimes [\Delta] \xrightarrow{[\pi]} [B] \ .$$

A partir de los Lemas 2.4 y 2.8 se obtiene directamente que las categorías de Lafont son modelos válidos de lógica lineal intuicionista. Pero existe una desventaja. La interpretación de los exponenciales corresponde a la construcción de comonoides libres. Esto resulta restrictivo con otros modelos semánticos. Así pues, resulta más conveniente relajar la definición de categoría de Lafont para generar un híbrido entre las formulaciones de Seely y Lafont, terminando en una axiomática más simple de comprobar en la mayoría de modelos de lógica lineal e incluso sobre modelos basados en juegos semánticos. Como nuestra meta final consiste es construir una semántica categórica para los exponenciales en una variante de la lógica lineal, dirigimos nuestra atención a la estructura categórica correspondiente a los exponenciales desde este enfoque más simple. A este respecto citamos la definición presentada por Mellier [12].

Definición 2.10 (estructura exponencial)**.** Una estructura exponencial sobre una categoría monoidal simétrica cerrada $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ con productos finitos determinados por $(\&, \top)$ corresponde a:

1. para cada objeto A de $\mathcal{A}$, hay un comonoide conmutativo $(!A, d_a, e_A)$ con respecto al producto $\otimes$;
2. para todo objeto A de $\mathcal{A}$, hay un morfismo $\epsilon : !A \to A$ tal que para cada morfismo
$$f : !A \to B$$
existe un único morfimo de comonoides
$$\widetilde{f} : (!A, d_A, e_A) \to (!B, d_B, e_B)$$
que satisface
$$!A \xrightarrow{f} B \;=;\; !A \xrightarrow{\widetilde{f}} !B \xrightarrow{\epsilon_B} B \;;$$
3. para todo par de objetos A, B de $\mathcal{C}$, hay dos isomorfismos comonoidales entre los comonoides conmutativos
$$n_{A,B} : (!A, d_A, e_A) \otimes (!B, d_B, e_B) \cong (!A\&B, d_{A\&B}, e_{A\&B})$$
$$p_\top : (1, p_1^{-1} = \lambda_1^{-1}, \mathbf{id}_1) \cong (!\top, d_\top, e_\top).$$

Con esto es posible reformular una combinación más simple entre las categorías de Lafont y Seely.

Definición 2.11 (Lafont-Seely)**.** Una **categoría de Lafont-Seely** es una categoría simétrica monoidal cerrada $(\mathcal{C}, \otimes, 1, \multimap)$ con productos finitos $(\&, \top)$ equipada con una estructura exponencial.

3. *SELL*

Antes de introducir una extensión de la lógica lineal de Girard llamada $SELL$ (lógica lineal con subexponenciales), recordaremos algunos elementos sintácticos que serán necesarios en esta discusión. Un literal es una fórmula atómica (A) o su negación $(A^\perp)$. Los conectivos $\otimes$ y $\parr$ junto con sus unidades 1 y $\perp$ se denominan conectivos multiplicativos, mientras que los conectivos $\oplus$ y & junto con sus unidades 0 y $\top$ se denominan conectivos aditivos. Como es usual, contamos con los cuantificadores clásicos $\forall$ y $\exists$. Los modales en lógica lineal clásica, es decir, los exponenciales, están dados por ! y ?. Supondremos que todas las fórmulas se encuentran en forma normal negada, significando esto último que el alcance de todas las negaciones es atómico.

La presencia de exponenciales permite distinguir entre dos tipos de fórmulas: fórmulas lineales cuyo conectivo principal no es ?, y fórmulas no acotadas (clásicas) en donde el conectivo principal es ?. Siguiendo el principio básico establecido por Girard, las fórmulas lineales deben tomarse como recursos que solo pueden ser usados una única vez, mientras que las fórmulas no acotadas representan recursos que pueden ser usados cada vez que se les necesite. Esta separación entre fórmulas puede hacerse notoria en la sintaxis al usar contextos distintos en los secuentes ($\vdash \Theta : \Gamma$), en donde Θ corresponde a un conjunto de fórmulas que son exclusivamente no acotadas mientras que Γ corresponde solamente a fórmulas lineales. Tal separación entre fórmulas permite incorporar reglas estructurales, es decir, debilitamiento y contracción dentro de las reglas de introducción tal y como se hace en sistemas clásicos.

Ahora bien, en $SELL$ no solo se cuenta con los exponenciales ! y ?; en realidad se trata con una cantidad arbitraria de exponenciales. Por supuesto, esto tiene implicaciones bastante serias que deben ser comentadas. En principio, estos nuevos exponenciales no son canónicos en el siguiente sentido: supongamos que definimos un par de conjunciones distinguidas por colores, es decir $\wedge^a$ (conjunción azul) y $\wedge^r$ (conjunción roja). Siguiendo las reglas clásicas tendremos que

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge^a B \vdash \Delta}\ \wedge^a L \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge^a B}\ \wedge^a R$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge^r B \vdash \Delta}\ \wedge^r L \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge^r B}\ \wedge^r R$$

Es sencillo mostrar que para cualquier par de fórmulas A y B se tiene que $A \wedge^a B \equiv A \wedge^r B$, lo que significa que cualquier símbolo de introducción clásica que propongamos termina perteneciendo a la misma clase de equivalencia para este conectivo. Es en este sentido que usamos la palabra canónico, puesto que la elección de cualquier color particular para la conjunción no altera la probabilidad del sistema. ¿Es posible esperar tal comportamiento para los exponenciales en lógica lineal? La respuesta es no. En efecto, al igual que con la conjunción, supongamos que introducimos nuevos exponenciales indexados por colores azul y rojo,$!^a, ?^a, !^r, ?^r$, sujetos a las reglas estándar para exponenciales en lógica lineal:

$$\frac{\vdash ?^r\Gamma, F}{\vdash ?^r\Gamma, !^r F}\ !^r \qquad \frac{\vdash \Gamma, F}{\vdash \Gamma, ?^r F}\ D?^r \qquad \frac{\vdash ?^a\Gamma, F}{\vdash ?^a\Gamma, !^a F}\ !^a \qquad \frac{\vdash \Gamma, F}{\vdash \Gamma, ?^a F}\ D?^a.$$

Pero ahora es imposible mostrar que $!^r F \equiv !^a F$ y $?^r F \equiv ?^a F$. Este fenómeno inspiró a Nigam y Miller [14] a introducir una clase de exponenciales que denominaron subexponenciales. Así pues, es posible introducir tantos operadores exponenciales ($!^l, ?^l$) como sean necesarios. Estos operadores pueden o no admitir debilitamiento y contracción, y son organizados en un preorden ($\preceq$) expresando la relación de consecuencia entre estos operadores. Más formalmente, un sistema de pruebas para lógica lineal con exponenciales denominado $SELL_\Sigma$ se especifica mediante una signatura subexponencial Σ de la forma $\langle I, \preceq, \mathcal{U}\rangle$, donde I es el conjunto de etiquetas para los exponenciales, $\preceq$ es una relación de preorden entre los elementos de I y $\mathcal{U} \subseteq I$ es el conjunto de todas las etiquetas de exponenciales que admiten debilitamiento y contracción. Suponemos también que el preorden $\preceq$ es cerrado superiormente con respecto a $\mathcal{U}$, es decir, si $x \prec y$ y $y \in \mathcal{U}$, entonces $y \in \mathcal{U}$.

Dada una signatura exponencial σ, el sistema de pruebas $SELL_\Sigma$ contiene las mismas reglas de introducción de la lógica lineal para todos los conectivos, exceptuando los exponenciales. Estas reglas son especificadas por la signatura exponencial Σ de la siguiente forma:

$$\frac{\vdash C, \Delta}{\vdash ?^x C, \Delta}\ D,\ \text{si } x \in I, \qquad \frac{\vdash ?^y C, ?^y C, \Delta}{\vdash ?^y C, \Delta}\ C,\ \text{si } y \in \mathcal{U}, \qquad \frac{\vdash \Delta}{\vdash ?^z C, \Delta}\ W,\ \text{si } z \in \mathcal{U}.$$

La primera regla, conocida como abandono, puede ser aplicada a cualquier tipo de exponencial, mientras que las reglas de debilitamiento y contracción solo pueden ser aplicados a los exponenciales etiquetados en $\mathcal{U}$. La regla de promoción está determinada de la siguiente forma:

$$\frac{\vdash ?^{x_1} C_1, \ldots, ?^{x_n} C_n, C}{\vdash ?^{x_1} C_1, \ldots, ?^{x_n} C_n, !^a C}\ !^a \quad \text{donde } a \preceq x_i \text{ para todo } i = 1, \ldots, n.$$

Esta regla juega un papel importante en la especificación de sistemas de prueba, puesto que el ordenamiento introducido en I permite seleccionar sistemáticamente las fórmulas que serán o no introducidas.

Los exponenciales con etiquetas en $\mathcal{U}$ se denominan no acotados, siendo los demás exponenciales acotados.

Por supuesto, $SELL_\Sigma$ admite eliminación por corte (véase [5]).

Teorema 3.1. *Para cualquier signatura Σ, la eliminación por corte es admisible en $SELL_\Sigma$.*

4. Semántica categórica para subexponenciales

El poder expresivo de $SELL$ como un marco lógico que permite especificar sistemas deductivos ha quedado claro en trabajos como los de Pimentel [15] y Nigam [14]. Es por ello que es relevante introducir una semántica denotacional basada en categorías que permita interpretar los operadores exponenciales en $SELL$. Obviamente que lo que parece más natural es utilizar los resultados de [4] y [3], emulando así la estructura de comonoide y adjuntos monoidales para la interpretación del operador !. Sin embargo, en el caso de $SELL$ debe hacerse una salvedad: que contamos con una cantidad arbitraria de subexponenciales; y puesto que estos subexponenciales están sujetos a un orden parcial, es necesario que la estructura categórica utilizada preserve el orden introducido en la signatura exponencial.

Ahora bien, si se sigue la estructura para exponenciales determinada por la composición de dos adjuntos monoidales, es decir definiendo el operador exponencial ! como $! = L \circ M$ siendo L y M adjunciones monoidales entre una categoría $\mathcal{L}$ de denotaciones y una categoría cartesiana $\mathcal{M}$, entonces generaremos una estructura de comonoide monoidal conmutativo que es la que permite interpretar categóricamente al operador !.

Esto significa que para cada subexponencial l^i en la signatura contamos con adjunciones monoidales L_i y M_i, de tal forma que $l^i = L_i \circ M_i$, generando comonoides conmutativos monoidales para cada subexponencial en la signatura. Esto asegura que para cada subexponencial se preserva la propiedad del isomorfismo natural $m^{2,i}_{A,B} : l^i A \otimes l^i B \cong l^i(A\&B)$.

La idea es simple: basta asegurar la existencia de adjunciones monoidales por cada subexponencial. (Tal construcción puede obtenerse a través de la categoría co-Klesli del comonoide (l^i, e^i_A, d^i_A) o la categoría de coálgebras generada por la categoría Eilenberg-Moore).

Para el caso de lógica lineal intuicionista tenemos pues resuelto el problema de la interpretación de la regla de promoción. Sin embargo, en el caso de $SELL$ contamos con una estructura adicional en el enunciado de la regla. En efecto,

$$\frac{\vdash ?^{x_1}C_1, \ldots, ?^{x_n}C_n, C}{\vdash ?^{x_1}C_1, \ldots, ?^{x_n}C_n, !^a C} \; !^a \quad \text{donde } a \preceq x_i \text{ para todo } i = 1, \ldots, n.$$

Es decir, el etiquetado de la fórmula C por $!^a$ depende de que $a \preccurlyeq x_i$ para cada subexponencial en la signatura. Lo que deseamos ahora es que nuestra estructura categórica permita interpretar adecuadamente la ejecución de la regla de promoción para el caso de $SELL$. Recordemos que las etiquetas subexponenciales están indexadas en una estructura de preorden, y a su vez, todo preorden puede verse desde una perspectiva categórica. En este caso los objetos serían las etiquetas subexponenciales de la signatura, y tendremos una flecha de $x_1 \to x_2$ si y solo si $x_1 \preccurlyeq x_2$.

Ahora bien, dado que cada exponencial l^i es un funtor (la composición de funtores monoidales L_i y M_i), es necesario que este el funtor l^i preserve la estructura de preorden presente en la signatura, es decir, el funtor l^i debe respetar la relación de orden entre los objetos de la categoría de las etiquetas exponenciales. Así pues, la estructura de comonoide mononoidal debe corresponderse dentro de una categoría dotada de una estructura de orden interna junto con funtores que preserven este orden entre las denotaciones, es decir la categoría debe estar enriquecida por el orden parcial $\preccurlyeq$ de la signatura. Presentamos entonces un caso particular de la definición de funtor enriquecido como aparece en la Definición 1.3 en donde en vez de usar una estructura genérica $\mathcal{V}$ usamos un preorden **Pre**.

Definición 4.1 (categoría Preenriquecida). Una categoría **Pre**enriquecida o **Pre**categoría es una categoría $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{C}(A, B)$ es un preorden para cualquier par de $\mathcal{C}$-objetos A y B y la composición en $\mathcal{C}$ es monótona.

Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre **Pre**categorías es un funtor **Pre**enriquecido si preserva la relación de preorden entre los objetos.

Así pues, para interpretar la regla de promoción en $SELL$ es necesario entonces que los funtores monoidales L_i y M_i sean funtores **Pre**enriquecidos en las categorías **Pre**enriquecidas $\mathcal{L}$ de denotaciones.

De esta forma, la interpretación correspondiente a promotion en $SELL$ corresponde a:

$$!^a[\Gamma] \xrightarrow{[L_a \circ M_a]} !^a[C] \ ,$$

donde el functor comonoidal $!^a = L_a \circ M_a$ es un funtor **Pre**enriquecido. Así pues, dada la estructura de preorden con la que se dota la categoría de denotaciones, y la categoría cartesiana $\mathcal{M}$, la regla de promoción en $SELL$ tiene la misma interpretación que en el caso clásico, salvo que se preserve el orden en las etiquetas exponenciales, lo que se garantiza mediante funtores **Pre**enriquecidos.

En detalle, vamos a considerar una categoria monoidal simétrica cerrada $\mathcal{C}$. Debilitemos un poco las reglas del operador ! y vamos a dar una interpretación categórica de un operador más débil denotado por $\widehat{!}$ en siguiente sentido:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \widehat{!}A \vdash B}\ \widehat{!}L \qquad \frac{\widehat{!}B \vdash A}{\widehat{!}B \vdash \widehat{!}A}\ \widehat{!}R,$$

en donde A y B son fórmulas atómicas, por lo que $\widehat{!}R$ es una forma debilitada de promotion, además de que este operador no hace uso ni de contracción ni de debilitamiento. Sea ahora $(\widehat{!}, \epsilon, \delta)$ una comónada sobre $\mathcal{C}$. (Obsérvese que hemos denotado el funtor de la comónada con la propia notación del operador $\widehat{!}$, esto, solo para hacer más clara esta presentación). Así pues, la interpretación categórica del operador $\widehat{!}$ corresponde a

$$\frac{f : \Gamma \otimes A \longrightarrow B}{f \circ id_\Gamma \otimes \epsilon_A : \Gamma \otimes \widehat{!}A \longrightarrow B} \qquad \frac{f : \widehat{!}B \longrightarrow A}{\widehat{!}f \circ \delta_B : \widehat{!}B \longrightarrow \widehat{!}A}\ .$$

Por supuesto que lo que ahora deseamos es poder interpretar la promoción en su sentido más general, de allí que se hace necesario contar en nuestra categoría $\mathcal{C}$ con flechas del tipo

$$!!A_1 \otimes !!A_2 \otimes \cdots \otimes !!A_n \longrightarrow !(!A_1 \otimes !A_2 \otimes \cdots \otimes !A_n).$$

Pero esto indica que el operador ! debe ser entonces un endofuntor monoidal simétrico. Por lo tanto, si $(!\epsilon, \delta)$ es una comónada sobre una categoría monoidal simétrica cerrada $\mathcal{C}$, entonces, el operador ! deberá corresponder con una comónada monoidal $(!, \epsilon, \delta, m)$, donde ϵ y δ son transformaciones naturales monoidales. Así pues, usando los diagramas de coherencia para m podemos generalizar para el caso de aridades arbitrarias, es decir, contamos con la flecha:

$$m_n : !A_1 \otimes !A_2 \otimes \cdots \otimes !A_n \longrightarrow !(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n).$$

Así pues, la interpretación para promoción corresponde a

$$\frac{f : !B_1 \otimes \cdots !B_n \longrightarrow A}{!f \circ m_n \circ (\delta_{B_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{B_n}) : !B_1 \otimes \cdots \otimes !B_n \longrightarrow !A}\ .$$

Obsérvese que esta sería la misma interpretación que se tendría para la regla de promoción en $SELL$, salvo que en este caso es necesario que la etiqueta a del exponencial con la que se marca a la fórmula C debe ser más pequeña que el resto de etiquetas exponenciales. Si la categoría $\mathbf{coMon}(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ es una categoría **Pre**enriquecida, entonces podemos construir un functor $T : \mathbf{coMon}\mathcal{C} \longrightarrow \Sigma$ (en donde vemos el par $(\Sigma, \preceq)$ como una categoría). Aquí para todo comonoide (A, ϵ, δ) en $\mathbf{coMon}(\mathcal{C}, \otimes, 1)$, $T(A) = x_A$, es decir, $A =!^{x_A}$ es correspondido en la categoría Σ con la etiqueta x_A del comonoide A. Y dado que los morfismos de comonoide preservan la estructura de preorden definida en $\mathbf{coMon}(\mathcal{C}, \otimes, 1)$, entonces $T(f) =\rightarrow$, siendo $f \in \mathbf{coMon}(A, B)$ y $\rightarrow$ la única flecha entre x_A y x_B, esto es $x_A \preceq x_B$.

Así las cosas, para el caso de la regla de promoción en $SELL$, la interpretación corresponde a:

$$\frac{f :!^{x_1} B_1 \otimes \cdots !^{x_n} B_n \longrightarrow A}{!^a f \circ m_n \circ (\delta_{B_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{B_n}) :!^{x_1} B_1 \otimes \cdots \otimes !^{x_n} B_n \longrightarrow !^a A}$$

si $T(!^a) \preceq T(!^{x_i})$ para $i = 1, \ldots, n$.

5. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado una descripción de los distintos modelos categóricos que se han usado para dotar de significado a los operadores de lógica lineal, en particular para el exponencial !. Hemos introducido una lógica lineal extendida con subexponenciales $SELL$, y junto con ello hemos dotado de una semántica para la regla de promoción en $SELL$ valiéndonos de la estructura provista por las categorías enriquecidas.

Referencias

[1] Andreoli J.-M., "Logic Programming with Focusing Proofs in Linear Logic", *J. of Logic and Computation* 2 (1992), no. 3, 297–347.

[2] Benton P.N., *A mixed linear and non-linear logic: proofs, terms and models*, Proceedings of Computer Scienca Logic 94, Springer Verlag, LNCS 933, 1994.

[3] Benton P.N., Bierman G.M., de Paiva V.C.V., Hyland J.M.E., *Term assignment for intuitionist linear logic*, Technical Report 262, Computer Laboratory, University of Cambridge, 1992.

[4] Bierman G., *On intuitionist linear logic*, Thesis (Ph.D.), University of Cambridge, 1994.

[5] Danos V., Joinet J.-B. and Schellinx H., *The Structure of Exponentials: Uncovering the Dynamics of Linear Logic Proofs*, In Georg Gottlob, Alexander Leitsch and Daniele Mundici, editeurs, Kurt Gödel Colloquium, 713 of LNCS, p. 159-171. Springer, 1993.

[6] Girard J.-Y., "Linear logic", *Theoretical Computer Science* 50 (1987), 1–102.

[7] Kelly M., *Basic concepts of enriched category theory*, volume 64 of *LMS*, Lecture Notes. Cambridge University Press, 1982.

[8] Kelly M., "Doctrinal adjuntion", *Lecture Notes in Math.* 420 (1974), 257–280.

[9] Lafont Y., *Logiques, catégories et machines*, Ph.D. Thesis, Université Paris 7, 1988.

[10] Mac Lane S., *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verlag, 1971.

[11] Melliès P.-A., *Categorical Semantics of Linear Logic*, Panoramas et Synthèses 27, Société Mathématique de France, 2009.

[12] Melliès P.-A., *Categorical semantics of linear logic*, Interactive models of computation and program behaviour, Société Mathématique de France, 2009.

[13] Nigam V., *Exploiting non-canonicity in the sequent calculus*, Thesis (Ph.D.), Ecole Polytechnique, 2009.

[14] Nigam V. and Miller D., *Algorithmic specifications in linear logic with subexponentials*, In ACM SIG1015 PLAN Conference on Principles and Practice of Declarative Programming (PPDP), 129–140, 2009.

[15] Pimentel E., Nigam V. and Reis G., *An Extended Framework for Specifying and Reasoning about Proof Systems*, submitted to Logical Journal of the IGPL, (2012), p. 37.

[16] Seely R., *Linear logic, *-autonomous categories and cofree coalgebras*, Applications of categories in logic and computer science, Contemporary Mathematics 92, 1989.