**Revista Integración**
*Escuela de Matemáticas*
*Universidad Industrial de Santander*
*Vol. 31, No. 2, 2013, pág. 153–164*

# Una introducción a los retractos absolutos y a los retractos de vecindad absolutos

Sergio Macías*
Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Matemáticas, C.P. 04510, México D.F., México.

**Resumen.** El objetivo de este trabajo es presentar algunas de las propiedades elementales que tienen los retractos absolutos y los retractos de vecindad absolutos.
**Palabras claves**: Cubo de Hilbert, espacio contráctil, extensor absoluto, extensor de vecindad absoluto, retracto, retracto absoluto, retracto de vecindad, retracto de vecindad absoluto.
**MSC2010**: 54C15, 54C55, 54G05.

## An introduction to absolute retracts and absolute neighborhood retracts

**Abstract.** The purpose of this paper is to present elementary properties of absolute retracts and absolute neighborhood retracts.
**Keywords**: Hilbert cube, contractile space, absolute extensor, extensor absolute neighborhood retract, absolute retract, neighborhood retracts, absolute neighborhood retracts.

## 1. Introducción

A principios de los años treinta del siglo XX, Karol Borsuk define el concepto de retracto [1], así como los conceptos de retracto absoluto y retracto de vecindad absoluto [2]. La teoría de estos espacios, llamada *Teoría de los Retractos*, se ha desarrollado tanto, que para 1967 ya se habían escrito dos libros sobre ellos: [6] y [3]. La teoría de los retractos ha resultado ser muy útil en la topología de dimensión infinita [4], [9] y [10]. Se han estudiado los retractos absolutos en la teoría de los hiperespacios de espacios métricos, compactos y conexos [11] y [5] (véanse [7] y [8] para saber más sobre hiperespacios).

El objetivo de este trabajo es presentar algunas de las propiedades elementales que tienen los retractos absolutos y los retractos de vecindad absolutos.

* *E-mail*: sergiom@matem.unam.mx.
Recibido: 30 de septiembre de 2013, Aceptado: 26 de noviembre de 2013.

## 2. Preliminares

Empezaremos presentando la noción que emplearemos en el resto del trabajo.

**Notación.** Consideraremos los siguientes conjuntos:

• $\mathbb{N}$ denota al conjunto de números naturales.

• $\mathbb{R}^n$ denota al espacio euclidiano de dimensión $n$ cuya norma, $||\cdot||$, está dada por:

$$||(x_1, \ldots, x_n)|| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

• La *bola cerrada de dimensión $n$ y de radio* 1 es: $\mathcal{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$.

• La *esfera de dimensión $n-1$ y de radio* 1 es: $\mathcal{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| = 1\}$.

• El *cubo de Hilbert*, denotado $\mathcal{Q}$ es: $\mathcal{Q} = \prod_{n=1}^{\infty}[0,1]_n$, donde $[0,1]_n$ es una copia de $[0,1]$. La distancia, $\rho$, entre dos puntos de $\mathcal{Q}$ está dada por:

$$\rho((x_n)_{n=1}^{\infty}, (x'_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|x_n - x'_n|.$$

**Definición 2.1.** Decimos que un espacio métrico, separable y no vacío $X$ es contráctil si existen un punto $x_0$ en $X$ y una función continua $H\colon X \times [0,1] \twoheadrightarrow X$ tales que $H((x,0)) = x$ y $H((x,1)) = x_0$, para toda $x \in X$.

**Definición 2.2.** Sea $X$ un espacio métrico, separable, compacto y no vacío. Entonces $C(X, \mathbb{R})$ denota al conjunto de todas las funciones continuas de $X$ en $\mathbb{R}$. A $C(X, \mathbb{R})$ se le puede dar la estructura de espacio vectorial definiendo la suma y la multiplicación por escalares de manera puntual. Si $f \in C(X, \mathbb{R})$, entonces definimos su *norma* como: $||f|| = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$. Es fácil ver que $||\cdot||\colon C(X, \mathbb{R}) \to [0, \infty)$ es, de hecho, una norma. En consecuencia, la función $\rho\colon C(X, \mathbb{R}) \times C(X, \mathbb{R}) \to [0, \infty)$ dada por $\rho(f, g) = ||f - g||$ es una métrica para $C(X, \mathbb{R})$ y, por tanto, genera una topología.

**Definición 2.3.** Sean $V$ un espacio vectorial métrico, separable y no vacío, y $C$ un subconjunto no vacío de $V$. Decimos que $C$ es un *conjunto convexo* si para cualesquiera dos elementos $c_0$ y $c_1$ de $C$, se tiene que el conjunto $\{(1-t)c_0 + tc_1 \mid t \in [0,1]\}$ está contenido en $C$.

**Definición 2.4.** Sean $V$ un espacio vectorial, el cual es métrico, separable y no vacío, y $A$ un subconjunto no vacío de $V$. El *casco convexo de $A$*, denotado $conv(A)$, se define como: $conv(A) = \bigcap\{C \mid A \subset C$ y $C$ es un conjunto convexo$\}$.

**Teorema 2.5** ([9, 1.2.3])**.** *Para cada espacio métrico, separable, compacto y no vacío $(X, d)$, existe un encaje isométrico $h\colon X \to C(X, \mathbb{R})$ tal que:*

(1) *para cada subconjunto $Y$ de $X$, $h(Y)$ es un subconjunto cerrado de $conv(h(Y))$, y*

(2) $h(X) \subset \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid ||f|| \leq \operatorname{diam}(X)\}$.

El siguiente resultado es conocido como *el Teorema de extensión de Dugundji.*

**Teorema 2.6** ([9, 1.4.13]). *Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado, separable y no vacío. Para cada espacio $X$, cada subespacio cerrado $A$ de $X$ y toda función continua $f\colon A \to V$, existe una función continua $F\colon X \to V$ tal que $F|_A = f$ y $F(X) \subset conv(f(A))$.*

Como consecuencia del Teorema 2.6, obtenemos *el Teorema de extensión de Tietze.*

**Teorema 2.7.** *Sean $X$ un espacio métrico, separable y no vacío y $A$ un subconjunto cerrado de $X$. Si $f\colon A \to [0,1]$ es una función continua, entonces existe una función continua $F\colon X \to [0,1]$ tal que $F|_A = f$.*

Del Teorema 2.7 se obtiene *el Lema de Urysóhn.*

**Teorema 2.8.** *Sea $X$ un espacio métrico, separable y no vacío. Si $A$ y $B$ son subconjuntos cerrados de $X$, entonces existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.*

**Teorema 2.9.** *Todo espacio métrico, separable y no vacío $X$ se puede encajar en el cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$.*

*Demostración.* Recordemos que todos nuestros espacios son métricos y separables. Sea $\mathcal{U}$ una base numerable de $X$. Consideremos la familia

$$\mathcal{W} = \{(U,V) \mid U,V \in \mathcal{U},\ Cl(U) \subset V \text{ y } V \neq X\}.$$

Notemos que $\mathcal{W}$ es un conjunto numerable. Para cada $(U,V) \in \mathcal{W}$, por el Teorema 2.8, existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f(Cl(U)) = \{0\}$ y $f(X \setminus V) = \{1\}$. Sea $\mathfrak{F} = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ la colección de funciones obtenidas de esta manera. Definimos $h\colon X \to \mathcal{Q}$ como $h(x) = (f_n(x))_{n=1}^{\infty}$. Es fácil ver que $h$ es un encaje. ☑

## 3. Retractos absolutos y retractos de vecindad absolutos

**Definición 3.1.** Sean $X$ un espacio métrico, separable y no vacío y $A$ un subespacio no vacío de $X$. Decimos que $A$ es un *retracto de* $X$ si existe una función continua $r\colon X \twoheadrightarrow A$ tal que $r(a) = a$, para toda $a \in A$. A la función $r$ se le llama una *retracción.*

**Ejemplo 3.2.** Observemos que la función $r\colon \mathbb{R}^{n+1} \twoheadrightarrow \mathcal{B}^n$ dada por

$$r(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathcal{B}^n; \\ \dfrac{x}{||x||}, & \text{si } x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathcal{B}^n, \end{cases}$$

es una retracción.

Una propiedad importante de los retractos es la siguiente:

**Teorema 3.3.** *Sean $X$ un espacio métrico, separable y no vacío y $A$ un subespacio no vacío de $X$. Si $A$ es un retracto de $X$, entonces $A$ es cerrado en $X$.*

*Demostración.* Supongamos que $A$ es un retracto de $X$ y que $r\colon X \twoheadrightarrow A$ es una retracción. Si $A = X$ entonces, claramente, $A$ es cerrado en $X$. Supongamos que $A \neq X$. Sea $x_0 \in X \setminus A$. Notemos que $r(x_0) \neq x_0$. Entonces existen dos subconjuntos abiertos $U_0$ y $V_0$ de $X$ tales que $x_0 \in U_0$, $r(x_0) \in V_0$ y $U_0 \cap V_0 = \emptyset$. Como $r$ es continua, $r^{-1}(V_0)$ es un subconjunto abierto de $X$ tal que $x_0 \in r^{-1}(V_0)$. Sea $W_0 = U_0 \cap r^{-1}(V_0)$. Entonces $W_0$ es un subconjunto abierto de $X$, $x_0 \in W_0$ y $W_0 \cap r(W_0) = \emptyset$. Supongamos que $W_0 \cap A \neq \emptyset$. Sea $a \in W_0 \cap A$. Entonces, como $a \in A$, $r(a) = a$ y, como $a \in W_0$, $r(a) \in W_0$. Esto implica que $a \in W_0 \cap r(W_0)$, lo cual es una contradicción. De donde, $W_0 \subset X \setminus A$ y $X \setminus A$ es abierto en $X$. Por tanto, $A$ es cerrado en $X$. ☑

**Teorema 3.4.** *Un subespacio $A$ de un espacio métrico, separable y no vacío $X$ es un retracto de $X$ si y sólo si para cada espacio $Y$ y cada función continua $f\colon A \to Y$, existe una función continua $F\colon X \to Y$ tal que $F|_A = f$.*

*Demostración.* Supongamos que $A$ es un retracto de $X$. Sean $Y$ un espacio y $f\colon A \to Y$ una función continua. Como $A$ es un retracto de $X$, existe una retracción $r\colon X \twoheadrightarrow A$. Sea $F = f \circ r$. Entonces $F$ es una función continua de $X$ en $Y$ tal que $F(a) = f \circ r(a) = f(a)$, para toda $a \in A$. Por tanto, $F|_A = f$.

Inversamente, supongamos que para cada espacio $Y$ y cada función continua $f\colon A \to Y$, existe una función continua $F\colon X \to Y$ tal que $F|_A = f$. Sean $Y = A$ y $f = 1_A$. Entonces, por hipótesis, existe una función continua $F\colon X \to A$ tal que $F|_A = 1_A$. Por tanto, $A$ es un retracto de $X$. ☑

**Teorema 3.5.** *Todo retracto de un espacio métrico, separable y no vacío contráctil es contráctil.*

*Demostración.* Sean $X$ un espacio contráctil y $A$ un retracto de $X$. Sea $r\colon X \twoheadrightarrow A$ una retracción. Como $X$ es contráctil, existen un punto $x_0$ en $X$ y una función continua $H\colon X \times [0,1] \twoheadrightarrow X$ tales que $H((x,0)) = x$ y $H((x,1)) = x_0$, para toda $x \in X$. Sea $F\colon A \times [0,1] \twoheadrightarrow A$ definida por $F((a,t)) = r \circ H((a,t))$, para cada $(a,t) \in A \times [0,1]$. Entonces $F$ es una función bien definida y continua tal que para toda $a \in A$, se tiene que $F((a,0)) = r \circ H((a,0)) = r(a) = a$ y $F((a,1)) = r \circ H((a,1)) = r(x_0)$. Por tanto, $A$ es contráctil. ☑

**Definición 3.6.** Sean $X$ un espacio métrico, separable y no vacío y $A$ un subespacio no vacío de $X$. Decimos que $A$ es un *retracto de vecindad de* $X$ si existen un abierto $U$ de $X$ tal que $A \subset U$ y una retracción $r\colon U \twoheadrightarrow A$.

**Ejemplo 3.7.** $\mathcal{S}^n$ es un retracto de vecindad de $\mathbb{R}^{n+1}$, sean $U = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ y $r\colon U \twoheadrightarrow \mathcal{S}^n$ dada por $r(x) = \dfrac{x}{||x||}$.

**Definición 3.8.** Decimos que un espacio métrico, separable y no vacío $X$ es un *retracto absoluto* si para cada espacio $Z$ y cada encaje $h\colon X \to Z$ tal que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de $Z$, se tiene que $h(X)$ es un retracto de $Z$.

**Definición 3.9.** Decimos que un espacio métrico, separable y no vacío $X$ es un *extensor absoluto* si para cada espacio $Z$, cada subconjunto cerrado y no vacío $A$ de $Z$ y toda función continua $f\colon A \to X$, existe una función continua $F\colon Z \to X$ tal que $F|_A = f$.

**Definición 3.10.** Decimos que un espacio métrico, separable y no vacío $X$ es un *retracto de vecindad absoluto* si para cada espacio $Z$ y cada encaje $h\colon X \to Z$ tal que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de $Z$, se tiene que $h(X)$ es un retracto de vecindad de $Z$.

**Definición 3.11.** Decimos que un espacio métrico, separable y no vacío $X$ es un *extensor de vecindad absoluto* si para cada espacio $Z$, cada subconjunto cerrado y no vacío $A$ de $Z$ y toda función continua $f\colon A \to X$, existen un subconjunto abierto $U$ de $Z$ tal que $A \subset U$ y una función continua $F\colon U \to X$ tal que $F|_A = f$.

Observermos que todo retracto (extensor) absoluto es un retracto (extensor) de vecindad absoluto, y el recíproco no es cierto.

**Teorema 3.12.** *El ser un extensor absoluto y un extensor de vecindad absoluto son propiedades topológicas.*

*Demostración.* Veremos que el ser un extensor de vecindad absoluto es una propiedad topológica. La prueba para el caso de un extensor absoluto es análoga.

Sean $X$ un extensor de vecindad absoluto y $Y$ un espacio homeomorfo a $X$. Sea $h\colon Y \twoheadrightarrow X$ un homeomorfismo. Para ver que $Y$ es un extensor de vecindad absoluto, sean $Z$ un espacio, $A$ un subconjunto cerrado no vacío de $Z$ y $f\colon A \to Y$ una función continua. Notemos que $h \circ f\colon A \to X$ es una función continua. Como $X$ es un extensor de vecindad absoluto, existen un subconjunto abierto $U$ of $Z$ tal que $A \subset U$ y una función continua $g\colon U \to X$ tal que $g|_A = h \circ f$. Definimos $F\colon U \to Y$ como $F = h^{-1} \circ g$. Entonces $F$ es una función continua tal que si $a \in A$ entonces

$$F(a) = h^{-1} \circ g(a) = h^{-1} \circ h \circ f(a) = f(a).$$

De aquí se sigue que $F|_A = f$. Por tanto, $Y$ es un extensor de vecindad absoluto. ☑

Nuestro próximo objetivo es probar que los conceptos de retracto absoluto y extensor absoluto son equivalentes, y que lo mismo sucede con los conceptos de retracto de vecindad absoluto y de extensor de vecindad absoluto.

**Teorema 3.13.** *Sea $X$ un espacio métrico, separable y no vacío. Entonces:*

(1) *$X$ es un retracto absoluto si y sólo si $X$ es un extensor absoluto.*

(2) *$X$ es un retracto de vecindad absoluto si y sólo si $X$ es un extensor de vecindad absoluto.*

*Demostración.* Sólo probaremos (2); la demostración de (1) es similar.

Supongamos que $X$ es un retracto de vecindad absoluto. Veremos que $X$ es un extensor de vecindad absoluto. Para esto, sean $Z$ un espacio, $A$ un subconjunto cerrado y no vacío de $Z$ y $f\colon A \to X$ una función continua. Por el Teorema 2.9, existe un encaje $h'\colon X \to \mathcal{Q}$. Por el Teorema 2.5, existen un espacio vectorial normado $V$ y un encaje $h''\colon \mathcal{Q} \to V$ tal que $h'' \circ h'(X)$ es un subconjunto cerrado de $h''(\mathcal{Q})$ y, por tanto de $V$. Sea $h = h'' \circ h'$. Como $X$ es un retracto de vecindad absoluto, existen un abierto $U$ de $V$ que contiene a $h(X)$ y una retracción $r\colon U \twoheadrightarrow h(X)$. Por el Teorema 2.6, existe una función continua

$g\colon Z \to V$ tal que $g|_A = h \circ f$. Sea $W = g^{-1}(U)$. Entonces $W$ es un subconjunto abierto de $Z$ tal que contiene a $A$. Definimos $F\colon W \to X$ como $F(w) = h^{-1} \circ r \circ g(w)$, para toda $w \in W$. Observemos que $F$ es una función continua y que si $a \in A$, entonces

$$F(a) = h^{-1} \circ r \circ g(a) = h^{-1} \circ r \circ h \circ f(a) = h^{-1} \circ h \circ f(a) = f(a).$$

En consecuencia, $F|_A = f$. Por tanto, $X$ es un extensor de vecindad absoluto.

Ahora supongamos que $X$ es un extensor de vecindad absoluto. Mostraremos que $X$ es un retracto de vecindad absoluto. Sean $Z$ un espacio y $h\colon X \to Z$ un encaje tales que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de $Z$. Como $h(X)$ es un extensor de vecindad absoluto (Teorema 3.12), para la función identidad $1_{h(X)}$ existen un subconjunto abierto $U$ de $Z$ que contiene a $h(X)$ y una función continua $F\colon U \twoheadrightarrow h(X)$ tal que $F|_{h(X)} = 1_{h(X)}$. Esto implica que $F$ una retracción y que $h(X)$ es un retracto de $U$. Por tanto, $X$ es un retracto de vecindad absoluto. ☑

Como consecuencia de los Teoremas 3.12 y 3.13, se tiene:

**Corolario 3.14.** *El ser un retracto absoluto y un retracto de vecindad absoluto son propiedades topológicas.*

El siguiente resultado nos proporciona un ejemplo de retracto absoluto.

**Teorema 3.15.** *Si $C$ es un subconjunto convexo de un espacio vectorial normado separable y no vacío $V$, entonces $C$ es un retracto absoluto.*

*Demostración.* Sean $Z$ un espacio y $h\colon C \to Z$ un encaje tal que $h(C)$ es cerrado en $Z$. Observemos que $h^{-1}\colon h(C) \to C$ es una función continua. Por el Teorema 2.6, existe una función continua $H\colon Z \to conv(C)$ tal que $H|_{h(C)} = h^{-1}$. Como $C$ es convexo, $conv(C) = C$. Sea $r\colon Z \twoheadrightarrow h(C)$ definida como $r = h \circ H$. Entonces $r$ es una función continua y $r(h(c)) = h \circ H(h(c)) = h \circ h^{-1}(h(c)) = h(c)$. De donde $r$ es una retracción. Por tanto, $C$ es un retracto absoluto. ☑

**Teorema 3.16.** *Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) *Todo subconjunto abierto y no vacío de un retracto de vecindad absoluto es un retracto de vecindad absoluto.*

(2) *Todo retracto de un retracto absoluto es un retracto absoluto.*

(3) *Todo retracto de un retracto de vecindad absoluto es un retracto de vecindad absoluto.*

(4) *El producto de una familia a lo más numerable de espacios métricos, separables y no vacíos es un retracto absoluto si y sólo si cada factor es un retracto absoluto.*

(5) *El producto de una familia finita de retractos de vecindad absolutos es un retracto de vecindad absoluto.*

*Demostración.* Veamos que se cumple (1). Sean $X$ un retracto de vecindad absoluto y $U$ un subconjunto abierto de $X$. Para mostrar que $U$ es un retracto de vecindad absoluto, sean $Z$ un espacio y $h\colon U \to Z$ un encaje de tal forma que $h(U)$ es un subconjunto cerrado de $Z$. Entonces $h^{-1}\colon h(U) \to U \subset X$ es una función continua. Como $X$ es un retracto de vecindad absoluto, por el Teorema 3.13, existen un subconjunto abierto $V$ de $Z$ tal que $h(U) \subset V$ y una función continua $F\colon V \to X$ tal que $F|_{h(U)} = h^{-1}$. Como $U$ es un abierto de $X$, $W = F^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de $V$ y, por tanto, de $Z$ tal que $h(U) \subset W \subset V$. Sea $r\colon W \to h(U)$ dada por $r(w) = h \circ F(w)$. Observemos que $r$ es una función continua. Para ver que $r$ es una retracción, sea $h(u) \in h(U)$. Entonces $r(h(u)) = h \circ F(h(u)) = h \circ h^{-1}(h(u)) = h(u)$. De aquí se sigue que $h(U)$ es un retracto de $W$. Por tanto, $U$ es un retracto de vecindad absoluto.

Probemos (3). La demostración de (2) se similar. Sean $X$ un retracto de vecindad absoluto y $Y$ un retracto de $X$. Sea $r\colon X \twoheadrightarrow Y$ una retracción. Sean $Z$ un espacio, $A$ un subconjunto cerrado y no vacío de $Z$ y $f\colon A \to Y \subset X$ una función continua. Como $X$ es un retracto de vecindad absoluto, por el Teorema 3.13, existen un abierto $V$ de $Z$ tal que $A \subset V$ y una función continua $g\colon V \to X$ tal que $g|_A = f$. Sea $F = r \circ g$. Entonces $F$ es una función continua de $V$ en $Y$ tal que

$$F(a) = r \circ g(a) = r \circ f(a) = f(a),$$

para toda $a \in A$. De donde, $F|_A = f$. Por tanto, por el Teorema 3.13, $Y$ es un retracto de vecindad absoluto.

Veamos que (4) se satisface. Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $\pi_m\colon \prod_{n=1}^{\infty} X_n \twoheadrightarrow X_m$ la función proyección. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x'_n \in X_n$. Sean $m \in \mathbb{N}$ e $i_m\colon X_m \to \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ dada por $i_m(x_m) = (x'_1, \ldots, x'_{m-1}, x_m, x'_{m+1}, \ldots)$. Notemos que $i_m$ es un encaje de $X_m$ en $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. También observemos que

$$i_m \circ \pi_m\colon \prod_{n=1}^{\infty} X_n \to i_m(X_m)$$

es una retracción. De aquí se obtiene que, si $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un retracto absoluto y $m \in \mathbb{N}$, entonces $i_m(X_m)$ es un retracto absoluto, por la parte (2) de este teorema. Por tanto, por el Corolario 3.14, $X_m$ es un retracto absoluto. Supongamos ahora que para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n$ es un retracto absoluto. Para mostrar que $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un retracto absoluto, sean $Z$ un espacio, $A$ un subconjunto cerrado y no vacío de $Z$ y $f\colon A \to \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Por el Teorema 3.13, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una función continua $f_n\colon Z \to X_n$ tal que $f_n|_A = \pi_n \circ f$. Definimos $F\colon Z \to \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ como $F(z) = (f_n(z))_{n=1}^{\infty}$. Entonces $F$ es una función continua tal que

$$F(a) = (f_n(a))_{n=1}^{\infty} = (\pi_n \circ f(a))_{n=1}^{\infty} = f(a).$$

Por consiguiente, $F|_A = f$. Por tanto, por el Teorema 3.13, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un retracto absoluto.

Mostremos (5). Lo haremos para el caso de dos factores; el caso general se seguirá por inducción matemática. La prueba es similar a la dada en (4), pero incluimos los detalles para la conveniencia del lector. Supongamos que $X_1$ y $X_2$ son retractos de vecindad absolutos. Para probar que $X_1 \times X_2$ es un retracto de vecindad absoluto, sean $Z$ un espacio, $A$ un subconjunto cerrado y no vacío de $Z$ y $f\colon A \to X_1 \times X_2$ una función continua. Por el Teorema 3.13, existen dos subconjuntos abiertos $V_1$ y $V_2$ de $Z$ tales que $A \subset V_1$ y $A \subset V_2$, y dos funciones continuas $f_1\colon V_1 \to X_1$ y $f_2\colon V_2 \to X_2$ tales que $f_1|_A = \pi_1 \circ f$ y $f_2|_A = \pi_2 \circ f$. Sean $V = V_1 \cap V_2$ y $F\colon V \to X_1 \times X_2$ dada por $F(v) = (f_1(v), f_2(v))$. Entonces $F$ es una función continua y

$$F(a) = (f_1(a), f_2(a)) = (\pi_1 \circ f(a), \pi_2 \circ f(a)) = f(a).$$

De lo anterior concluimos que $F|_A = f$. Por tanto, por el Teorema 3.13, $X_1 \times X_2$ es un retracto de vecindad absoluto. ☑

El siguiente resultado nos proporciona más ejemplos de retractos abolutos:

**Corolario 3.17.** *Los siguientes espacios con retractos absolutos:* $\mathbb{R}^n$, $[0,1]^n$, *con* $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}$ *y* $\mathbb{R}^\infty$.

*Demostración.* El corolario se sigue de los Teoremas 3.15 y 3.16. ☑

**Teorema 3.18.** *Todo retracto de vecindad de un retracto de vecindad absoluto es un retracto de vecindad absoluto.*

*Demostración.* Sean $X$ un retracto absoluto de vecindad y $A$ un retracto de vecindad de $X$. Entonces existen un abierto $U$ de $X$ tal que $A \subset U$ y una retracción $r\colon U \twoheadrightarrow A$. Para ver que $A$ es un retracto de vecindad absoluto, sean $Z$ un espacio, $B$ un subconjunto cerrado y no vacío de $Z$ y $f\colon B \to A \subset X$ una función continua. Como $X$ es un retracto de vecindad absoluto, por el Teorema 3.13, existen un abierto $V$ de $Z$ tal que $B \subset V$ y una función continua $g\colon V \to X$ tal que $g|_B = f$. Como $U$ es un abierto de $X$, $W = g^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de $V$ y, por tanto, de $Z$ tal que $B \subset W$. Sea $F\colon W \to A$ dada por $F = r \circ g$. Entonces $F$ es una función continua y

$$F(b) = r \circ g(b) = r \circ f(b) = f(b),$$

para toda $b \in B$. De esta forma obtenemos que $F|_B = f$. Por tanto, por el Teorema 3.13, $A$ es un retracto de vecindad absoluto. ☑

**Corolario 3.19.** *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}^n$ *es un retracto de vecindad absoluto.*

*Demostración.* Por el Ejemplo 3.7, $\mathcal{S}^n$ es un retracto de vecindad de $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces, por el Corolario 3.17 y el Teorema 3.18, se tiene que $\mathcal{S}^n$ es un retracto de vecindad absoluto. ☑

En la parte (5) del Teorema 3.16 sólo probamos que el producto finito de retractos de vecindad absolutos es un retracto de vecindad absoluto. El siguiente teorema nos indica por qué el resultado anterior no se puede generalizar a productos numerables.

**Teorema 3.20.** *Sea* $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ *una familia numerable de espacios métricos, separables y no vacíos. Entonces* $\prod_{n=1}^\infty X_n$ *es un retracto de vecindad absoluto si y sólo si cada* $X_n$ *es un retracto de vecindad absoluto y existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $X_n$ *es un retracto absoluto para cada* $n \geq m$.

*Demostración.* Supongamos que cada $X_n$ es un retracto de vecindad absoluto y que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $X_n$ es un retracto absoluto para cada $n \geq m$. Como $\prod_{n=1}^\infty X_n$ es homeomorfo a $\prod_{n=1}^{m-1} X_n \times \prod_{n=m}^\infty X_n$, por las partes (4) y (5) del Teorema 3.16, se tiene que $\prod_{n=1}^\infty X_n$ es un retracto de vecindad absoluto.

Supongamos que $\prod_{n=1}^\infty X_n$ es un retracto de vecindad absoluto. En la prueba de la parte (4) del Teorema 3.16 vimos que cada $X_m$ es homeomorfo a un retracto de $\prod_{n=1}^\infty X_n$. De donde, por la parte (3) del Teorema 3.16 y el Corolario 3.14, resulta que cada $X_m$ es un retracto de vecindad absoluto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos un punto $x_n \in X_n$. Por los Teoremas 2.9 y 2.5, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen un espacio vectorial normado $V_n$, un subespacio convexo $C_n$ de $V_n$ y un encaje $h_n \colon X_n \to C_n$ de tal forma que $h_n(X_n)$ es un subconjunto cerrado de $C_n$. Como $\prod_{n=1}^{\infty} h_n(X_n)$ es cerrado en $\prod_{n=1}^{\infty} C_n$ y $\prod_{n=1}^{\infty} h_n(X_n)$ es un retracto de vecindad absoluto (Corolario 3.14), existen un abierto $U$ de $\prod_{n=1}^{\infty} C_n$ tal que $\prod_{n=1}^{\infty} h_n(X_n) \subset U$ y una retracción $r \colon U \twoheadrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} h_n(X_n)$. En particular, $U$ es un abierto que tiene al punto $(h_n(x_n))_{n=1}^{\infty}$. Así que, existen $m \in \mathbb{N}$ y abiertos $W_1, \ldots, W_m$ de $C_1, \ldots, C_m$, respectivamente, tales que

$$h_1(x_1) \in W_1, \ldots, h_m(x_m) \in W_m \quad \text{y} \quad (h_n(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \bigcap_{j=1}^{m} \pi_{C_j}^{-1}(W_j) \subset U,$$

donde $\pi_{C_j} \colon \prod_{n=1}^{\infty} C_n \twoheadrightarrow C_j$ es la función proyección para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Por el Teorema 3.15 y la parte (4) del Teorema 3.16, tenemos que $\prod_{n=1}^{\infty} C_n$ es un retracto absoluto. Ahora definimos la función

$$g \colon \{h_1(x_1)\} \times \cdots \times \{h_m(x_m)\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} C_n \longrightarrow \{h_1(x_1)\} \times \cdots \times \{h_m(x_m)\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} h_n(X_n)$$

como

$$\begin{aligned} & g((h_1(x_1), \ldots, h_m(x_m), c_{m+1}, \ldots)) = \\ & \quad (h_1(x_1), \ldots, h_m(x_m), \pi_{C_{m+1}}(r((h_1(x_1), \ldots, h_m(x_m), c_{m+1}, \ldots))), \\ & \qquad \pi_{C_{m+2}}(r((h_1(x_1), \ldots, h_m(x_m), c_{m+1}, \ldots))), \ldots). \end{aligned}$$

Se puede ver que $g$ es una retracción. De donde, por la parte (2) del Teorema 3.16, $\prod_{n=m+1}^{\infty} h_n(X_n)$ es un retracto absoluto. Lo que implica, por el Corolario 3.14, que $\prod_{n=m+1}^{\infty} X_n$ es un retracto absoluto. Finalmente, por la parte (4) del Teorema 3.16, $X_n$ es un retracto absoluto, para toda $n \geq m+1$. ☑

El siguiente teorema nos permite construir nuevos retractos absolutos y retractos de vecindad absolutos de otros dados.

**Teorema 3.21.** *Sean $X$ un espacio métrico, separable y no vacío, $X_1$ y $X_2$ subconjuntos cerrados y no vacíos de $X$ tales que $X = X_1 \cup X_2$. Sea $X_0 = X_1 \cap X_2$. Entonces se cumple lo siguiente:*

(1) *Si $X_0$, $X_1$ y $X_2$ son retractos absolutos, entonces $X$ es un retracto absoluto.*

(2) *Si $X$ y $X_0$ son retractos absolutos, entonces $X_1$ y $X_2$ también son retractos absolutos.*

(3) *Si $X_0$, $X_1$ y $X_2$ son retractos de vecindad absolutos, entonces $X$ es un retracto de vecindad absoluto.*

(4) *Si $X$ y $X_0$ son retractos de vecindad absolutos, entonces $X_1$ y $X_2$ también son retractos de vecindad absolutos.*

*Demostración.* Sólo probaremos (3) y (4), las demostraciones de (1) y (2) son similares.

Para ver (3), supongamos que $X_0$, $X_1$ y $X_2$ son retractos de vecindad absolutos. Sean $Z$ un espacio y $h \colon X \to Z$ un encaje de tal forma que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de $Z$. Mostraremos que existen un subconjunto abierto $U$ de $Z$ tal que $h(X) \subset U$ y una retracción $R\colon U \twoheadrightarrow h(X)$. Para este fin, sean:

$$Z_0 = \{z \in Z \mid d(z, h(X_1)) = d(z, h(X_2))\},$$

$$Z_1 = \{z \in Z \mid d(z, h(X_1)) \leq d(z, h(X_2))\}$$

y

$$Z_2 = \{z \in Z \mid d(z, h(X_1)) \geq d(z, h(X_2))\}.$$

Observemos que si $j \in \{0, 1, 2\}$, entonces $Z_j \cap h(X) = h(X_j)$. Además, $Z_1 \cap Z_2 = Z_0$ y $Z = Z_1 \cup Z_2$.

Como $X_0$ es un retracto de vecindad absoluto, por el Corolario 3.14, $h(X_0)$ es un retracto de vecindad absoluto. Como $h(X_0)$ es cerrado en $Z_0$, existen un abierto $V$ de $Z_0$ tal que $h(X_0) \subset V_0$ una retracción $r_0'\colon V_0 \twoheadrightarrow h(X_0)$. Sea $V_1$ un abierto de $Z_0$ tal que $h(X_0) \subset V_1 \subset Cl(V_1) \subset V_0$. Tomemos $W_0 = Cl(V_1)$ y $r_0 = r_0'|_{W_0}$. Dada $j \in \{1, 2\}$, definimos $r_j\colon W_0 \cup h(X_j) \twoheadrightarrow h(X_j)$ como:

$$r_j(z) = \begin{cases} r_0(z), & \text{si } z \in W_0; \\ z, & \text{si } z \in h(X_j), \end{cases}$$

para toda $z \in W_0 \cup h(X_j)$. Observermos que $r_j$ es una retracción. Como $h(X_1)$ y $h(X_2)$ son retractos de vecindad absolutos (Corolario 3.14), por el Teorema 3.13, existen vecindades cerradas (por un argumento semejante al dado en el párrafo anterior) $W_1$ y $W_2$ de $W_0 \cup h(X_1)$ y $W_0 \cup h(X_2)$ en $Z_1$ y $Z_2$, respectivamente, y funciones continuas $R_1\colon W_1 \to h(X_1)$ y $R_2\colon W_2 \to h(X_2)$ tales que $R_1|_{W_0 \cup h(X_1)} = r_1$ y $R_2|_{W_0 \cup h(X_2)} = r_2$.

Dada $j \in \{1, 2\}$, sea $U_j$ una vecindad cerrada de $h(X_j)$ en $Z_j$ de tal forma que $U_j \subset W_j$ y $U_j \cap Z_0 \subset W_0$. Entonces $U_1 \cap U_2 \subset W_0$. De donde se sigue que la función $R\colon U_1 \cup U_2 \twoheadrightarrow h(X)$ dada por:

$$R(z) = \begin{cases} R_1(z), & \text{si } z \in U_1; \\ R_2(z), & \text{si } z \in U_2, \end{cases}$$

para cada $z \in U_1 \cup U_2$, está bien definida y es una retracción. Como $U_1 \cup U_2$ es una vecindad de $h(X)$ en $Z$, se tiene, por tanto, que $X$ es un retracto de vecindad absoluto.

Para probar (4), supongamos que $X$ y $X_0$ son retractos de vecindad absolutos. Como $X_0$ es un retracto de vecindad absoluto y es cerrado en $X$, existen un subconjunto abierto $U_0$ de $X$ tal que $X_0 \subset U_0$ y una retracción $r\colon U_0 \twoheadrightarrow X_0$. Definimos $R\colon X_1 \cup U_0 \twoheadrightarrow X_1$ como

$$R(x) = \begin{cases} x, & \text{si } s \in X_1; \\ r(x), & \text{si } x \in U_0, \end{cases}$$

para toda $x \in X_1 \cup U_0$. Notemos que $R$ es una retracción. Como $X_1 \cup U_0$ es un abierto de $X$ y $X$ es un retracto de vecindad absoluto, por la parte (1) del Teorema 3.16, se tiene que $X_1 \cup U_0$ es un retracto de vecindad absoluto. De la parte (3) del Teorema 3.16, como $X_1$ es un retracto de $X_1 \cup U_0$, resulta que $X_1$ es un retracto de vecindad absoluto.

La prueba de que $X_2$ es un retracto absoluto de vecindad es similar. ☑

El siguiente resultado es conocido como *El Teorema de Extensión Homotópica de Borsuk*.

**Teorema 3.22** ([9, 1.6.3]). *Sean $X$ un retracto de vecindad absoluto, $Z$ un espacio, $A$ un subconjunto cerrado y no vacío de $Z$ y $f\colon A\times[0,1]\to X$ una función continua. Si existe una función continua $F_0\colon Z\to X$ tal que $F_0(a)=f((a,0))$, para toda $a\in A$, entonces existe una función continua $F\colon Z\times[0,1]\to X$ tal que para toda $z\in Z$, $F((z,0))=F_0(z)$ y $F((a,t))=f((a,t))$, para toda $a\in A$ y toda $t\in[0,1]$.*

**Teorema 3.23.** *Sea $X$ un espacio métrico, separable y no vacío. Entonces $X$ es un retracto absoluto si y sólo si $X$ es un retracto de vecindad absoluto contráctil.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ es un retracto absoluto. Claramente, $X$ es un retracto de vecindad absoluto. Veremos que $X$ es contráctil. Por los Teoremas 2.9 y 2.5, existen un espacio vectorial normado $V$, un subespacio convexo $C$ de $V$ y un encaje $h\colon X\to C$ de tal forma que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de $C$. Como $X$ es un retracto absoluto, $h(X)$ es un retracto de $C$. Por el Teorema 3.5, basta ver que $C$ es contráctil. Para esto, sea $c_0$ un punto de $C$. Definimos $H\colon C\times[0,1]\twoheadrightarrow C$ como $H((c,t))=(1-t)c+tc_0$. Como $C$ es convexo, $H$ está bien definida y es continua. Además, para cada $c\in C$, $H((c,0))=(1-0)c+0c_0=c$ y $H((c,1))=(1-1)c+1c_0=c_0$. De donde $C$ es contráctil. Por tanto, $X$ es contráctil.

Ahora supongamos que $X$ es un retracto de vecindad absoluto y contráctil. Para ver que $X$ es un retracto absoluto, sean $Z$ un espacio, $A$ un subconjunto cerrado y no vacío de $Z$ y $f\colon A\to X$. Como $X$ es contráctil, existen un punto $x_0$ en $X$ y una función continua $H\colon X\times[0,1]\twoheadrightarrow X$ tales que para toda $x\in X$, $H((x,0))=x$ y $H((x,1))=x_0$. Sea $f'\colon A\times[0,1]\to X$ dada por $f'((a,t))=H((f(a),1-t))$. Sea $F_0\colon Z\to X$ dada por $F_0(z)=x_0$. Entonces $F_0$ es una función continua y, para toda $a\in A$, $f'((a,0))=H((f(a),1-0))=H((f(a),1))=x_0=F_0(a)$. Por el Teorema 3.22, existe una función continua $F\colon Z\times[0,1]\to X$ tal que para cada $(a,t)\in A\times[0,1]$, $F((a,t))=f'((a,t))$. Sea $F_1\colon Z\to X$ dada por $F_1(z)=F((z,1))$. Entonces $F_1$ es una función continua tal que para toda $a\in A$,

$$F_1(a)=F((a,1))=f'((a,1))=H((f(a),1-1))=H((f(a),0))=f(a).$$

De donde, $F_1|_A=f$. Por tanto, por el Teorema 3.13, $X$ es un retracto absoluto. ☑

**Agradecimiento.** El autor le agradece al árbitro sus comentarios.

## Referencias

[1] Borsuk K., "Sur les rétractes", *Fund. Math.* 17 (1931), 152–170.

[2] Borsuk K., "Über eine Klasse von Lokal Zusammenhängenden Räume", *Fund. Math.* 19 (1932), 220–242.

[3] Borsuk K., *Theory of retracts*, Monografie Matematyczne Tom 44, Warzaw, 1967.

[4] Chapman T.A., *Lecture on Hilbert cube manifolds*, Regional Conference Series in Mathematics, No. 28, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1976.

[5] Ganea T., "Symmetrische potenzen topologischer Räume", *Math. Nachr.* 11 (1954), 305–316.

[6] Hu S.T., *Theory of retracts*, Wayne State University Press, Detroit, 1965.

[7] Macías S., *Topics on continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[8] Macías S., "Un breve panorama de los hiperespacios de continuos", *Rev. Integr. Temas Mat.* 23 (2005), no. 2, 1–13.

[9] Van Mill J., *Infinite-dimensional topology*, North Holland Mathematical Library, Amsterdam, 1989.

[10] Van Mill J., *The infinite-dimensional topology of function spaces*, North Holland Mathematical Library, Amsterdam, 2001.

[11] Wojdisławski M., "Rétracts absolus et hyperspaces des continus", *Fund. Math.* 32 (1939), 184–192.