Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 31, No. 2, 2013, pág. 121–132

Funciones inducidas conexas

Sergio A. Pérez*
Universidad Industrial de Santander, Escuela Matemáticas, Bucaramanga, Colombia.

Resumen. Se dice que una función $f\colon X \to Y$ definida entre espacios topológicos es conexa si la gráfica $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es conexa. Dado un continuo X, se consideran los hiperespacios: 2^X, la colección de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X; $C(X)$, el conjunto de todos los subcontinuos de X; y $F_n(X)$, los subconjuntos no vacíos de a lo más n puntos de X. Además, dada una función $f\colon X \to Y$ entre continuos, consideramos las funciones inducidas $2^f : 2^X \to 2^Y$ definidas por $2^f(A) = \overline{f(A)}$ para cada $A \in 2^X$; $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(Y)$, la función restricción $F_n(f) = 2^f|_{F_n(X)}$; y si f es una función de Darboux débil, definimos $C(f)\colon C(X) \to C(Y)$ por $C(f) = 2^f|_{C(X)}$. En este artículo estudiamos las relaciones entre las siguientes cinco afirmaciones: 1) f es conexa; 2) $C(f)$ es conexa; 3) $F_n(f)$ es conexa, para algún $n \geq 2$; 4) $F_n(f)$ es conexa, para todo $n \geq 2$; 5) 2^f es conexa.

Palabras claves: Continuo, funciones inducidas, funciones conexas, funció Darboux débil, funciones casicontinuas.
MSC2010: 54E40, 54B20, 54C10.

Induced connected functions

Abstract. A function between topological spaces $f\colon X \to Y$ is said to be connected provided that the graph $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ is connected. Given a continuum X, some hyperspaces are considered: 2^X, the collection of all non-empty closed subsets of X; $C(X)$, the set of all subcontinua of X, and $F_n(X)$ the set of nonempty subsets of at most n points of X. Moreover, given $f\colon X \to Y$ a function between continua, consider the induced functions: $2^f\colon 2^X \to 2^Y$, defined by $2^f(A) = \overline{f(A)}$ for each $A \in 2^X$; $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(Y)$, the restriction function $F_n(f) = 2^f|_{F_n(X)}$; and, if f is a weak Darboux function, we define $C(f)\colon C(X) \to C(Y)$ by $C(f) = 2^f|_{C(X)}$. In this paper we study the relationships between the following five statements: 1) f is connected; 2) $C(f)$ is connected; 3) $F_n(f)$ is connected, for some $n \geq 2$; 4) $F_n(f)$ is connected, for all $n \geq 2$; 5) 2^f is connected.

Keywords: Continuum, induced functions, connected functions, weak Darboux function, almost continuous functions.

* *E-mail*: sergio.2060@hotmail.com
Recibido: 24 de julio de 2013, Aceptado: 20 de agosto de 2013.

1. Introducción

Uno de los teoremas más importantes en topología que involucra funciones continuas es el Teorema del punto fijo de Brouwer, demostrado por Luitzen E. J. Brouwer a principios del siglo XX. Años más tarde, en 1959, en el trabajo titulado "Fixed point theorems for connectivity maps", J. Stallings da ejemplos de funciones, no necesariamente continuas, que satisfacen el teorema de Brouwer [11]. Esta clase de funciones Stallings las llamó funciones de conectividad.

El trabajo de Stallings motivó a estudiar propiedades topológicas de funciones no necesariamente continuas, pero que involucraban en su definición, propiedades inherentes a las funciones continuas. Investigadores importantes como Brown, Garret, Kellum y el mismo Stallings, siguiendo la misma línea que las funciones de conectividad definidas por Stallings, dedicaron parte de su trabajo al estudio de "peculiaridades" de estas clases de funciones, que clasificaron en 4 grupos que son: funciones de Darboux, funciones conexas, funciones de conectividad local y funciones casicontinuas (ver [4], [7], [8], [9] y [11]).

En este trabajo estudiamos algunos aspectos relacionados con las funciones conexas. Es importante resaltar que en este escrito las funciones no son necesariamente continuas y los espacios siempre serán continuos. Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y diferente del vacío. Una función $f\colon X \to Y$ definida entre continuos se denomina *conexa* si la gráfica $\Gamma(f)$ es conexa. Dado un continuo X, se consideran los hiperespacios: 2^X, la colección de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X; $C(X)$, el conjunto de todos los subcontinuos de X; y $F_n(X)$, los subconjuntos no vacíos de a lo más n puntos de X. Además, dada una función $f\colon X \to Y$ entre continuos, consideramos las funciones inducidas: $2^f\colon 2^X \to 2^Y$, definida por $2^f(A) = \overline{f(A)}$ para cada $A \in 2^X$; $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(Y)$, la función restricción $F_n(f) = 2^f|_{F_n(X)}$; y si f es una función de Darboux débil, definimos $C(f)\colon C(X) \to C(Y)$ por $C(f) = 2^f|_{C(X)}$. En [5] se estudiaron algunas relaciones entre clases de funciones no continuas y sus respectivas funciones inducidas. En este artículo estudiamos las relaciones entre las siguientes afirmaciones:

1. f es conexa;
2. $C(f)$ es conexa;
3. $F_n(f)$ es conexa, para algún $n \geq 2$;
4. $F_n(f)$ es conexa, para todo $n \geq 2$;
5. 2^f es conexa.

En el desarrollo de este estudio mostramos ejemplos, planteamos algunas preguntas y, entre los resultados más destacados, probamos los siguientes teoremas:

Sea $f\colon X \to Y$ una función definida entre continuos. Si f es una función conexa, entonces $F_n(f)$ es conexa, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $f\colon X \to Y$ una función definida entre continuos. Si $F_n(f)$ es una función conexa, entonces $F_k(f)$ es una función conexa, para todo $k \geq n$.

Sea $f\colon X \to Y$ una función definida entre continuos. Si f es conexa, entonces 2^f es conexa.

Este artículo está organizado como sigue, en la Sección 2 definimos y mostramos algunas propiedades generales de los continuos, los hiperespacios de continuos y las funciones inducidas. En la Sección 3, que llamamos Resultados, mostramos las relaciones, ejemplos y preguntas relacionadas con las afirmaciones 1, 2, 3, 4 y 5. Finalmente, en la última sección, mostramos algunas soluciones particulares a las preguntas que planteamos en la Sección 3.

2. Preliminares

Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $\delta > 0$, la bola abierta con centro en a y radio δ la denotamos por $B_d(a, \delta)$. Si $A \subset X$, la clausura de A en X se denota por $\overline{A}$. El símbolo $\mathbb{N}$, denota el conjunto de los números naturales. Si $A \subset X$, la restricción de la función f al conjunto A se denotará por $f|_A$. Para una función $f \colon X \to Y$, la gráfica de la función f la denotaremos por $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$.

Dado un continuo X, consideramos los siguientes hiperespacios de X:

1. $2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y diferente del vacío}\}$;
2. $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$;
3. $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}, n \in \mathbb{N}$.

Para A, B en 2^X, definimos $H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$, por

$$H(A, B) = \text{ínf}\{r > 0 : A \subset N_d(r, B) \text{ y } B \subset N_d(r, A)\},$$

donde $N_d(s, E) = \{x \in X : d(x, e) < s \text{ para algún } e \in E\}$, para $s > 0$ y $E \in 2^X$. La métrica H es conocida como la *métrica de Hausdorff*. Para conocer más acerca de la métrica de Hausdorff, consultar [6].

Consideremos la colección de subconjuntos de 2^X

$$\beta = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_l\rangle : U_i \text{ es abierto en } X, \text{ para cada } i\},$$

donde $\langle U_1, U_2, \ldots, U_l\rangle = \{A \in 2^X : A \subset \cup_{i=1}^{l} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i\}$. La familia β forma una base de alguna topología sobre 2^X. La topología generada por β se conoce como la *topología de Vietoris* [6, Teorema 1.2].

La topología inducida por la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris en un continuo, son la misma [6, Teorema 3.2]. Por esta razón, usaremos de acuerdo con la situación, y de manera desprevenida, la métrica de Hausdorff o la topología de Vietoris.

Aunque el siguiente resultado es fácil de demostrar, y creemos que la prueba debe estar en la literatura, no pudimos encontrarla. Por tanto, hacemos una demostración para comodidad del lector.

Proposición 2.1. *Sea Z un espacio métrico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Z es conexo;*

2. $F_n(Z)$ *es conexo, para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

3. $F_n(Z)$ *es conexo, para algún* $n \in \mathbb{N}$*.*

Demostración. Supongamos primero que Z es conexo y probemos *2*. Sabemos que Z^n es conexo para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varphi\colon Z^n \to F_n(Z)$, definida por $\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. La función φ es continua y sobreyectiva [1]. Así, $F_n(Z) = \varphi(Z^n)$ es conexo para todo $n \in \mathbb{N}$. La Afirmación de que *2* implica *3* es inmediata.

Finalmente, mostremos que *3* implica *1*. Supongamos que Z no es conexo, es decir, $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos de Z diferentes del vacío tales que $(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) = \emptyset$. Consideremos los siguientes subconjuntos en $F_n(Z)$:

$$\mathcal{A} = \langle Z, A\rangle \cap F_n(Z) \text{ y } \mathcal{B} = \langle B\rangle \cap F_n(Z).$$

Es claro que $F_n(Z) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Sea $D \in \mathcal{B}$, es decir, $D \subset B$. Como $B \cap \overline{A} = \emptyset$, $D \subset Z \setminus \overline{A}$. Sea $\mathcal{U} = \langle Z \setminus \overline{A}\rangle \cap F_n(Z)$. Nótese que $D \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Así, $D \notin \overline{\mathcal{A}}$, y por tanto $\overline{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. De manera similar podemos probar que $\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{B}} = \emptyset$. Por lo tanto, $F_n(Z)$ no es conexo. ☑

En seguida definimos las funciones inducidas entre hiperespacios que usaremos a lo largo de este artículo.

Definición 2.2. Sea $f\colon X \to Y$ una función entre continuos. Definimos $2^f\colon 2^X \to 2^Y$, que llamaremos *la función inducida entre los hiperespacios* 2^X *y* 2^Y, por $2^f(A) = \overline{f(A)}$ para cada $A \in 2^X$.

Definición 2.3. Sea $f\colon X \to Y$ una función entre continuos. Definimos $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(Y)$, que llamaremos *la función inducida entre los hiperespacios* $F_n(X)$ *y* $F_n(Y)$, por $F_n(f) = 2^f|_{F_n(X)}$.

La siguiente definición es necesaria para definir la función inducida $C(f)$.

Definición 2.4. Sea $f\colon X \to Y$ una función entre continuos. Decimos que f es *Darboux débil* si $f(A)$ es conexo para todo $A \in C(X)$.

Definición 2.5. Sea $f\colon X \to Y$ una función Darboux débil. Definimos $C(f)\colon C(X) \to C(Y)$, llamada *la función inducida entre los hiperespacios* $C(X)$ *y* $C(Y)$ por $C(f) = 2^f|_{C(X)}$.

Note que $C(f)$ no estaría bien definida si no tomamos f función Darboux débil.

El límite superior de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se define como $\limsup x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k$. Es fácil ver que si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, el límite superior siempre existe.

Todo número $x \in (0, 1]$ se puede expresar en una única representación binaria infinita, es decir, $x = 0.a_1a_2\ldots$ donde los dígitos a_i son ceros o unos y, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe

$m \geq k$ tal que $a_m = 1$. Considere la función $f\colon [0,1] \to [0,1]$, que se conoce como *función de Cesàro-Vietoris*, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \limsup \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La función de Cesàro-Vietoris está bien definida y es conexa [12]. Algunas propiedades de esta función se pueden encontrar en [12]; destacamos que $f(A) = [0,1]$ para todo conexo no degenerado $A \subset [0,1]$.

3. Resultados

En esta sección presentamos algunos resultados generales sobre las funciones inducidas conexas.

Proposición 3.1. *Sean $f\colon X \to Y$ una función definida entre continuos y $n \in \mathbb{N}$. Definamos $\varphi\colon F_n(\Gamma(f)) \to \Gamma(F_n(f))$ por*

$$\varphi(\{(a_1, f(a_1)), \ldots, (a_k, f(a_k))\}) = (\{a_1, \ldots, a_k\}, \{f(a_1), \ldots, f(a_k)\}),$$

para $a_1, a_2, \ldots, a_k \in X$, donde $k \leq n$. Entonces φ es una función continua y sobreyectiva.

Demostración. Claramente φ es una función bien definida y sobreyectiva. Veamos que φ es continua. Sean $\{(a_1, f(a_1)), \ldots, (a_k, f(a_k))\}$ un punto de $F_n(\Gamma(f))$ y $(\mathcal{U}\times\mathcal{V})\cap\Gamma(F_n(f))$ un abierto de $\Gamma(F_n(f))$, tales que

$$\varphi(\{(a_1, f(a_1)), \ldots, (a_k, f(a_k))\}) = (\{a_1, \ldots, a_k\}, \{f(a_1), \ldots, f(a_k)\}) \in (\mathcal{U}\times\mathcal{V})\cap\Gamma(F_n(f)).$$

Existen $U_1, U_2, \ldots, U_l$ y $V_1, V_2, \ldots, V_m$ abiertos de X y Y, respectivamente, tales que

$$\{a_1, \ldots, a_k\} \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_l\rangle \cap F_n(X) \subset \mathcal{U}$$

y

$$\{f(a_1), \ldots, f(a_k)\} \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle \cap F_n(Y) \subset \mathcal{V}.$$

Sean

$$W_i = \bigcap\{U \in \{U_1, U_2, \ldots, U_l\} : a_i \in U\} \quad \text{y} \quad N_i = \bigcap\{V \in \{V_1, V_2, \ldots, V_m\} : f(a_i) \in V\},$$

para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Consideremos el conjunto abierto

$$\mathcal{W} = (\langle W_1 \times N_1, W_2 \times N_2, \ldots, W_k \times N_k\rangle) \cap F_n(\Gamma(f)) \ \text{ de } \ F_n(\Gamma(f)).$$

Obsérvese que, por definición, $\{(a_1, f(a_1)), \ldots, (a_k, f(a_k))\} \in \mathcal{W}$. Veamos que

$$\varphi(\mathcal{W}) \subset (\langle U_1, U_2, \ldots, U_l\rangle \times \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle) \cap \Gamma(F_n(f)) \subset (\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \cap \Gamma(F_n(f)).$$

Sea $B = \{(b_1, f(b_1)), \ldots, (b_s, f(b_s))\} \in \mathcal{W}$. Tenemos que

$$\varphi(B) = (\{b_1, \ldots, b_s\}, \{f(b_1), \ldots, f(b_s)\}).$$

Sabemos que

$$\{b_1, \ldots, b_s\} \subset \bigcup_{i=1}^{k} W_i \subset \bigcup_{i=1}^{l} U_i$$

y

$$\{f(b_1), \ldots, f(b_s)\} \subset \bigcup_{i=1}^{k} N_i \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_i.$$

Sean U_i y V_j, con $i \in \{1, \ldots, l\}$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$. Como

$$\{a_1, \ldots, a_k\} \in (\langle U_1, U_2, \ldots, U_l \rangle) \cap F_n(X)$$

y

$$\{f(a_1), \ldots, f(a_k)\} \in (\langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle) \cap F_n(Y),$$

existen r y t, tales que $a_r \in U_i$ y $f(a_t) \in V_j$. Así, $W_r \subset U_i$ y $N_t \subset V_j$. Como

$$\{b_1, \ldots, b_s\} \cap W_r \neq \emptyset \ \text{ y } \ \{f(b_1), \ldots, f(b_s)\} \cap N_t \neq \emptyset,$$

tenemos que $\{b_1, \ldots, b_s\} \cap U_i \neq \emptyset$ y $\{f(b_1), \ldots, f(b_s)\} \cap V_j \neq \emptyset$ para cualesquiera i, j. Así, $\varphi(B) \in (\langle U_1, U_2, \ldots, U_l \rangle \times \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle) \cap \Gamma(F_n(f))$. Por lo tanto,

$$\varphi(\mathcal{W}) \subset (\langle U_1, U_2, \ldots, U_l \rangle \times \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle) \cap \Gamma(F_n(f)) \subset (\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \cap \Gamma(F_n(f)),$$

y, φ es continua. ☑

A continuación damos una relación entre la conexidad de las funciones f y $F_n(f)$ para cualquier entero positivo n.

Teorema 3.2. *Sea $f\colon X \to Y$ una función definida entre continuos. Si f es una función conexa, entonces $F_n(f)$ es conexa, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. La función f es conexa, es decir, $\Gamma(f)$ es un conjunto conexo. El conjunto $F_n(\Gamma(f))$ es conexo por la Proposición 2.1. Así, $\Gamma(F_n(f))$ es conexa para todo $n \in \mathbb{N}$, por la Proposición 3.1. De ello resulta que $F_n(f)$ es una función conexa para todo $n \in \mathbb{N}$. ☑

Además, dados dos enteros positivos diferentes n y m, podemos relacionar las funciones inducidas $F_n(f)$ y $F_m(f)$.

Teorema 3.3. *Sea $f\colon X \to Y$ una función definida entre continuos. Si $F_n(f)$ es una función conexa, entonces $F_k(f)$ es una función conexa, para todo $k \geq n$.*

Demostración. Supongamos que $F_n(f)$ es una función conexa. Veamos que $F_{n+1}(f)$ es una función conexa. Para cada $a \in X$ consideremos el siguiente subconjunto de $\Gamma(F_{n+1}(f))$:

$$\mathcal{C}_a = \{(\{a, x_1, \ldots, x_l\}, \{f(a), f(x_1), \ldots, f(x_l)\}) \mid \{x_1, \ldots, x_l\} \in F_n(X)\}.$$

Sea $\varphi\colon \Gamma(F_n(f)) \to \mathcal{C}_a$ definida por

$$\varphi(\{x_1, \ldots, x_l\}, \{f(x_1), \ldots, f(x_l)\}) = (\{a, x_1, \ldots, x_l\}, \{f(a), f(x_1), \ldots, f(x_l)\}).$$

Claramente φ es una función sobreyectiva. Probemos que φ es una función continua. Sean

$$(\{x_1, \ldots, x_l\}, \{f(x_1), \ldots, f(x_l)\}) \in \Gamma(F_n(f))$$

y

$$\mathcal{W} = (\langle U_1, U_2, \ldots, U_s\rangle \times \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle) \cap \mathcal{C}_a$$

un conjunto abierto de $\mathcal{C}_a$ tal que

$$\varphi(\{x_1, \ldots, x_l\}, \{f(x_1), \ldots, f(x_l)\}) = (\{a, x_1, \ldots, x_l\}, \{f(a), f(x_1), \ldots, f(x_l)\}) \in \mathcal{W}.$$

Esto quiere decir claramente que

$$\{a, x_1, \ldots, x_l\} \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_s\rangle \ \text{ y } \ \{f(a), f(x_1), \ldots, f(x_l)\} \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle.$$

Sean

$$W_i = \bigcap\{U \in \{U_1, U_2, \ldots, U_s\} : x_i \in U\}$$

y

$$N_i = \bigcap\{V \in \{V_1, V_2, \ldots, V_m\} : f(x_i) \in V\},$$

para cada $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Sea

$$\mathcal{M} = (\langle W_1, W_2, \ldots, W_l\rangle \times \langle N_1, N_2, \ldots, N_l\rangle) \cap \Gamma(F_n(f)).$$

No es difícil verificar que

$$(\{x_1, \ldots, x_l\}, \{f(x_1), \ldots, f(x_l)\}) \in \mathcal{M}$$

y

$$\varphi(\mathcal{M}) \subset (\langle U_1, U_2, \ldots, U_s\rangle \times \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle) \cap \mathcal{C}_a = \mathcal{W}.$$

Por lo tanto, φ es una función continua. De lo anterior, $\mathcal{C}_a$ es un conjunto conexo, para cada $a \in X$. Ahora, notemos que

$$\Gamma(F_{n+1}(f)) = \bigcup\nolimits_{a\in X}\mathcal{C}_a \ \text{ y } \ \mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b \neq \emptyset,$$

para cualesquiera a y b elementos de X. De ello se deduce que $\Gamma(F_{n+1}(f))$ es un conjunto conexo. Así, $F_{n+1}(f)$ es una función conexa. Usando un razonamiento inductivo concluimos que $F_k(f)$ es conexa, para cualquier $k \geq n$. ☑

Pregunta 3.4. ¿Existe una función $f\colon X \to Y$ entre continuos tal que $F_n(f)$ sea conexa para algún n, y f no sea conexa?

Pregunta 3.5. ¿Existen una función $f\colon X \to Y$ entre continuos y $m < n$, tales que $F_n(f)$ sea conexa y $F_m(f)$ no sea conexa?

Destaquemos que una respuesta negativa a la Pregunta 3.4 nos genera inmediatamente la equivalencia entre la conexidad de las funciones f y $F_n(f)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. El siguiente teorema es el resultado más importante de esta sección.

Teorema 3.6. *Sea $f\colon X \to Y$ una función definida entre continuos. Si f es conexa, entonces 2^f es conexa.*

Demostración. Sabemos que f es una función conexa. Esto es, el conjunto $\Gamma(f)$ es conexo. Por ende, la función $F_n(f)$ es conexa para todo $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 3.2. De este modo, $\Gamma(F_n(f))$ es un conjunto conexo para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\Gamma(F_n(f)) \subset \Gamma(F_{n+1}(f))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(F_n(f))$ es un conjunto conexo.

Veamos que $\Gamma(2^f) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(F_n(f))}$. Sean $(A, \overline{f(A)}) \in \Gamma(2^f)$ y

$$\mathcal{W} = (\langle U_1, U_2, \ldots, U_k\rangle \times \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle) \cap (2^X \times 2^Y)$$

un abierto de $2^X \times 2^Y$ que contiene a $(A, \overline{f(A)})$. Seleccionamos puntos $f(a_i) \in f(A) \cap V_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, y $\widehat{a_i} \in A \cap U_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Así,

$$(\{\widehat{a_1}, \ldots, \widehat{a_k}, a_1, \ldots, a_m\}, \{f(\widehat{a_1}), \ldots, f(\widehat{a_k}), f(a_1), \ldots, f(a_m)\}) \in \mathcal{W} \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(F_n(f)).$$

Por lo tanto, $\Gamma(2^f) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(F_n(f))}$. Como

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(F_n(f)) \subset \Gamma(2^f) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(F_n(f))},$$

entonces $\Gamma(2^f)$ es un conjunto conexo [3, Teorema 1.6, p.109]. De esta forma, 2^f es una función conexa. ☑

Con el siguiente ejemplo damos respuesta negativa a algunas de las implicaciones que nos propusimos estudiar en este trabajo.

Ejemplo 3.7. Existe una función f conexa tal que 2^f es conexa y $C(f)$ no es conexa.

Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ la función de Cesàro-Vietoris definida en los preliminares. La función f es casicontinua [2]. Por ende, f es una función conexa [11, Proposición 3]. Además, la función 2^f es conexa por el Teorema 3.6.

Demostremos que $C(f)\colon C([0,1]) \to C([0,1])$ no es conexa. Consideremos los conjuntos

$$\mathcal{A} = \{([a,b], [0,1]) \in \Gamma(C(f)) : 0 \leq a < b \leq 1\}$$

y

$$\mathcal{B} = \{(\{x\}, \{f(x)\}) : x \in [0,1]\}.$$

Claramente $\Gamma(C(f)) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, porque $f(C) = [0,1]$ para todo conexo no degenerado $C \subset [0,1]$. Veamos primero que $\overline{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Sean

$$(\{x\}, \{f(x)\}) \in \mathcal{B} \ \text{ y } \ (\langle B_d(x, 1/3)\rangle \times \langle B_d(f(x), 1/3)\rangle) \cap \mathcal{B}$$

un conjunto abierto de $\mathcal{B}$ que contiene al punto $(\{x\}, \{f(x)\})$. Tenemos que $[0,1] \notin \langle B_d(f(x), 1/3)\rangle$. Así, $\overline{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Por otra parte, usando el hecho de que $F_1([0,1])$ es un conjunto cerrado, obtenemos que $\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{B}} = \emptyset$. Por lo tanto, $\Gamma(C(f))$ no es un conjunto conexo. Así, $C(f)$ no es una función conexa.

Las siguientes preguntas complementan lo que hemos desarrollado y todas las implicaciones que podemos estudiar relacionadas con las funciones conexas y sus funciones inducidas.

Pregunta 3.8. ¿Existe una función $f\colon X \to Y$ definida entre continuos tal que $C(f)$ sea conexa y f no sea conexa?

Pregunta 3.9. ¿Existe una función $f\colon X \to Y$ definida entre continuos tal que $C(f)$ sea conexa y 2^f no sea conexa?

Pregunta 3.10. ¿Existe una función $f\colon X \to Y$ definida entre continuos tal que 2^f sea conexa y f no sea conexa?

4. Soluciones particulares

En esta sección consideramos una proposición y dos corolarios particulares donde mostramos casos en los cuales la función inducida $C(f)$ no es conexa.

En las pruebas de los siguientes resultados denotamos por π_1 a la función proyección $\pi_1\colon X \times Y \to X$ definida por $\pi_1(x, y) = x$.

Proposición 4.1. *Sea $f\colon X \to Y$ una función de Darboux débil entre continuos y no conexa. Supóngase que existe un subconjunto cerrado K de X tal que $X \setminus K = U \cup V$, donde U y V son abiertos disjuntos y $U \neq \emptyset$. Si existen conjuntos no vacíos A y B de $X \times Y$ tales que:*

1. $\Gamma(f) = A \cup B$;
2. $(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) = \emptyset$;
3. $K \subset \pi_1(B)$;
4. $U \cap \pi_1(A)$ *es totalmente disconexo,*

entonces $C(f)$ no es conexa.

Demostración. Consideremos los siguientes conjuntos no vacíos:

$$\mathcal{A} = \{(D, \overline{f(D)}) : D \in C(X) \text{ y } D \subset U \cap \pi_1(A)\} \text{ y } \mathcal{B} = \Gamma(C(f)) \setminus \mathcal{A}.$$

Claramente $\Gamma(C(f)) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Probemos que $\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{B}} = \emptyset$. Sea $(D, \overline{f(D)}) \in \mathcal{A}$. Como $D \subset U \cap \pi_1(A)$ y $U \cap \pi_1(A)$ es totalmente disconexo, tenemos que existe $x \in X$, tal que $(D, \overline{f(D)}) = (\{x\}, \{f(x)\})$. Nótese que $(x, f(x)) \in A$. Sabemos que $\overline{B} \cap A = \emptyset$. Así, existen abiertos W_1 y W_2 de X y Y, respectivamente, tales que $(x, f(x)) \in W_1 \times W_2$ y $(W_1 \times W_2) \cap B = \emptyset$. Sean $N = W_1 \cap U$ y $\mathcal{U} = (\langle N \rangle \times \langle W_2 \rangle) \cap (C(X) \times C(Y))$. Es claro que $\mathcal{U}$ es abierto, $(\{x\}, \{f(x)\}) \in \mathcal{U}$ y $(\{y\}, \{f(y)\}) \notin \mathcal{U}$ para todo $(y, f(y)) \in B$.

Probemos que $\mathcal{B} \cap \mathcal{U} = \emptyset$. Sea $(E, \overline{f(E)}) \in \mathcal{B}$. Entonces existe $x_0 \in E$, tal que $x_0 \notin \pi_1(A)$ ó $x_0 \notin U$. Si $x_0 \notin U$, entonces $x_0 \notin N$ y $(E, \overline{f(E)}) \notin \mathcal{U}$. Supongamos ahora que $x_0 \notin \pi_1(A)$. Esto es, $x_0 \in \pi_1(B)$ y $(x_0, f(x_0)) \in B$. Como $(\{y\}, \{f(y)\}) \notin \mathcal{U}$ para todo $(y, f(y)) \in B$, tenemos que $x_0 \in E \setminus N$ y $(E, \overline{f(E)}) \notin \mathcal{U}$. Lo anterior muestra que $\mathcal{B} \cap \mathcal{U} = \emptyset$ y $\mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{B}} = \emptyset$.

Veamos ahora que $\mathcal{B} \cap \overline{\mathcal{A}} = \emptyset$. Sea $(L, \overline{f(L)}) \in \mathcal{B}$. Supongamos primero que existe $y \in X$ tal que $(L, \overline{f(L)}) = (\{y\}, \{f(y)\})$. Tenemos que $y \notin \pi_1(A)$ ó $y \notin U$. Si $y \notin \pi_1(A)$, entonces $y \in \pi_1(B)$. Como $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $(y, f(y)) \in B$, haciendo un procedimiento similar al usado anteriormente podemos decir que $(\{y\},\{f(y)\}) \notin \overline{\mathcal{A}}$. Por otra parte, si $y \notin U$, entonces tenemos dos nuevas posibilidades: $y \in K$ ó $y \in V$. Cuando $y \in K \subset \pi_1(B)$, obtenemos nuevamente que $(\{y\},\{f(y)\}) \notin \overline{\mathcal{A}}$. Ahora, si $y \in V$, basta tomar

$$\mathcal{V} = (\langle V\rangle \times \langle Y\rangle) \cap (C(X) \times C(Y)),$$

donde

$$(\{y\},\{f(y)\}) \in \mathcal{V}, \quad \mathcal{V} \cap \mathcal{A} = \emptyset \ \text{ y } \ (\{y\},\{f(y)\}) \notin \overline{\mathcal{A}}.$$

Finalmente, supongamos que L es un subcontinuo no degenerado de X. Sea $\delta > 0$ tal que $\text{diám}(L) = \delta$. Sea

$$\mathcal{W} = (B_H(L, \delta/3) \times B_H(\overline{f(L)}, \delta/3)) \cap (C(X) \times C(Y)).$$

Nótese que $(L, \overline{f(L)}) \in \mathcal{W}$. Además, no es difícil ver que si $(D, \overline{f(D)}) \in \mathcal{W}$, entonces el $\text{diám}(D) > 0$. De lo anterior,

$$\mathcal{W} \cap \mathcal{A} = \emptyset \ \text{ y } \ (L, \overline{f(L)}) \notin \overline{\mathcal{A}}.$$

Por lo tanto, podemos concluir que $C(f)$ no es una función conexa. ☑

Corolario 4.2. *Sea $f\colon X \to Y$ una función de Darboux débil entre continuos y no conexa. Si existen subconjuntos no vacíos A y B de $X \times Y$ tales que:*

1. $\Gamma(f) = A \cup B$;
2. $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$;
3. *$\pi_1(A)$ o $\pi_1(B)$ son totalmente disconexos,*

entonces $C(f)$ no es conexa.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\pi_1(A)$ es totalmente disconexo. Sean $U = X$ y $V = K = \emptyset$. Usando la Proposición 4.1 tenemos que $C(f)$ no es conexa. ☑

Corolario 4.3. *Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$ una función Darboux débil y no conexa. Si existen subconjuntos no vacíos A y B de $[0,1] \times [0,1]$ tales que:*

1. $\Gamma(f) = A \cup B$;
2. $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$;
3. *$\pi_1(A)$ o $\pi_1(B)$ tienen una cantidad finita de componentes no degeneradas,*

entonces $C(f)$ no es una función conexa.

Demostración. Supongamos que $\pi_1(A)$ tiene una cantidad finita de componentes no degeneradas. Veamos que cada componente es un intervalo cerrado en $[0,1]$. Supongamos que alguna componente no degenerada es de la forma $(x,y]$, para algunos x y y en $[0,1]$. Entonces $(x, f(x)) \in B$. Como $B \cap \overline{A} = \emptyset$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\delta < |y-x| \ \text{ y } \ (B_d(x,\delta) \times B_d(f(x),\delta)) \cap A = \emptyset.$$

Sea $E = [x, x+\delta/2]$. Nótese que $(c, f(c)) \in A$ para cada $c \in E\backslash\{x\}$. Así, $f(E)$ no es degenerado. Además, si $c \in E\backslash\{x\}$, entonces $f(c) \notin B_d(f(x),\delta)$; es decir,

$$f(E) \cap B_d(f(x),\delta) = \{f(x)\},$$

y por tanto $f(E)$ no es conexo. Lo anterior contradice que f es de Darboux débil. De esta forma, toda componente no degenerada de $\pi_1(A)$ es cerrada en $[0,1]$. De manera similar se muestra que toda componente de $\pi_1(B)$ es cerrada en $[0,1]$.

Sean $[z_1, w_1]$ y $[z_2, w_2]$ componentes no degeneradas de $\pi_1(A)$, donde $w_1 < z_2$ y no existe otra componente no degenerada de $\pi_1(A)$ entre w_1 y z_2. Nótese que $(w_1, z_2) \not\subset \pi_1(B)$, pues las componentes de $\pi_1(B)$ son cerradas. Así, existen y_1,y_2 y x en (w_1, z_2) tales que $y_1 < x < y_2$, con $x \in \pi_1(A)$ y $\{y_1, y_2\} \subset \pi_1(B)$. De esta manera, tomando $K = \{y_1, y_2\}$, $U = (y_1, y_2)$ y $V = (-\infty, y_1) \cup (y_2, \infty)$, podemos concluir que $C(f)$ no es conexa, por la Proposición 4.1. ☑

La respuesta a la siguiente pregunta nos ayudaría a dar una solución completa al problema para las funciones conexas, por lo menos para funciones definidas del intervalo $[0,1]$ en sí mismo.

Pregunta 4.4. Si $f\colon [0,1] \to [0,1]$ no es conexa, ¿existe entonces una separación de su gráfica $\Gamma(f) = A \cup B$ tal que exista un intervalo no degenerado $[a,b]$ donde el conjunto $[a,b] \cap \pi_1(A)$ sea totalmente disconexo?

5. Agradecimientos

El autor agradece al profesor Javier Camargo por sus comentarios y sugerencias. Además, el autor agradece a los árbitros de la *Revista Integración* por sus interesantes aportes que contribuyeron a mejorar el trabajo.

Referencias

[1] Borsuk K. and Ulam S., "On symmetric products of topological spaces", *Bull. Amer. Math. Soc.* 37 (1931), no. 12, 875–882.

[2] Brown J.B., "Almost continuity of the Cesàro-Vietoris function", *Proc. Amer. Math. Soc.* 49 (1975), 185–188.

[3] Dugundji J., *Topology,* Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[4] Garrett B.D., "When almost continuity implies connectivity", *Topology Proc.* 13 (1988), no. 2, 203–210.

[5] Illanes A., “Induced almost continuous functions on Hyperspaces”, *Colloq. Math.* 105 (2006), no. 1, 69–76.

[6] Illanes A. and Nadler S.B. Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances,* Monographs and textbooks in Pure and Applied Mathematics 216, Marcel Dekker, New York, 1999.

[7] Kellum K.R. and Rosen H., “Compositions of continuous functions and connected functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.* 115 (1992), no. 1, 145–149.

[8] Nadler S.B. Jr., “Continua on which all real-valued connected functions are connectivity functions”, *Topology Proc.* 28 (2004), no. 1, 229–239.

[9] Nadler S.B. Jr., “Local connectivity functions on arcwise connected spaces and certain continua”, *Topology Appl.* 153 (2006), no. 8, 1279–1290.

[10] Nadler S.B. Jr., *Continuum Theory. An Introduction*, Monographs and textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

[11] Stallings J., “Fixed point theorems for connectivity maps”, *Fund. Math.* 47 (1959), 249–263.

[12] Vietoris L., “Stetige Mengen”, *Monatsh. Math. Phys.* 31 (1921), no. 1, 173–204.