Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 29, No. 2, 2011, pág. 97–108

Tripletas asociadas a diagramas de nudos virtuales*

Margarita Toro⋆, José Gregorio Rodríguez
Universidad Nacional de Colombia, Escuela de Matemáticas, A.A. 568, Medellín, Colombia.

Resumen. En este artículo estudiamos el conjunto T de las tripletas (E, A, B), donde $E \in \{-1, 1\}^n$, $A \in \mathbb{Z}^n$ y B es una matriz antisimétrica de orden n con componentes enteras, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos una relación de equivalencia sobre el conjunto T y estudiamos propiedades de sus clases de equivalencia. La motivación para estudiar estas tripletas proviene de la teoría de los nudos virtuales, ya que mostramos cómo asignarle una tripleta a cada diagrama de un nudo virtual. Esta asignación depende del diagrama y en sí misma no es un invariante de nudos virtuales. La relación de equivalencia definida en T busca resolver este problema.
Palabras claves: tripletas, diagramas de nudos virtuales, nudos virtuales, matrices basadas, códigos nudales, nudos combinatorios.
MSC2000: 57M27, 57Q45, 05–XX.

Triplets associated to virtual knot diagrams

Abstract. In this paper we study the set T of triplets (E, A, B), where $E \in \{-1, 1\}^n$, $A \in \mathbb{Z}^n$ and B is an integral antisymmetric matrix of order n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. We define an equivalence relation on the set T and then we study properties of its equivalence classes. We describe a method to assign to each virtual knot diagram a triplet, and this is the motivation to study the set of triplets. As the assignation of a triplet depends on the virtual knot diagram, it is not a virtual knot invariant. But we try to solve this problem by using the equivalence relation defined on T.
Keywords: triplets, virtual knots diagrams, virtual knots, based matrix, nudal codes, combinatorial knots.

* Parcialmente financiado por COLCIENCIAS, proyecto 1118-521-28160.
⋆ Autor para correspondencia: *E-mail*: mmtoro@unal.edu.co.
Recibido: 20 de agosto de 2011, Aceptado: 8 de noviembre de 2011.

1. Introducción

En este artículo queremos estudiar en detalle una relación de equivalencia en el conjunto de las tripletas (E, A, B), donde $E \in \{-1,1\}^n$, $A \in \mathbb{Z}^n$, B es una matriz antisimétrica de orden n con componentes enteras, y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Esta relación de equivalencia se define con base en un conjunto de *movidas*, que semejan la forma como se define la relación de S-equivalencia en el conjunto de matrices de Seifert en teoría clásica de nudos (ver [4]). Definimos el concepto de tripleta irreducible y probamos que toda clase de equivalencia contiene una tripleta irreducible, que es única salvo permutaciones. Este es el resultado central del trabajo.

El estudio de estas tripletas tiene sus raíces en la teoría de nudos virtuales, ya que a cada diagrama de nudo virtual le podemos asignar una tripleta. Esta asignación es de carácter combinatorio, muy simple de calcular y utiliza el concepto de código nudal (ver [10]). Dado que la tripleta depende del diagrama del nudo virtual y de su código nudal, se presenta la necesidad de definir la relación de equivalencia, con el fin de buscar un invariante de nudos virtuales. En este trabajo mostramos los primeros pasos en esa dirección, y en [6] se define un invariante que se deduce de nuestras tripletas. Las tripletas que definimos tienen relación con las "matrices basadas", definidas en [11], pero nuestra definición es diferente, de carácter combinatorio y permite realizar cómputos con mucha simplicidad.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2 damos algunos conceptos básicos de la teoría de nudos virtuales y códigos nudales y mostramos cómo asignarle a cada código nudal una tripleta. Esta sección tiene un carácter motivador.

En la Sección 3 estudiamos las tripletas independientemente del hecho de si provienen o no de códigos nudales. Definimos sobre ellas una relación de equivalencia y estudiamos propiedades importantes de las clases de equivalencia. Los métodos que se emplean son de carácter algebraico y combinatorio y no utilizan técnicas de teoría de nudos. En esta sección se presentan los resultados centrales de nuestro trabajo. En [6] utilizamos los resultados de esta sección para definir un poderoso invariante de nudos virtuales. En la sección 4 volvemos a la teoría de nudos y estudiamos el interrogante *¿Cuándo una tripleta es la tripleta asociada a un código nudal?* Presentamos una caracterización parcial de estas tripletas y dejamos como problema abierto encontrar una clasificación completa.

2. Motivación

Kauffman introdujo los diagramas de nudos virtuales, generalizando el concepto de diagrama de un nudo clásico, al permitir un nuevo tipo de cruce, que denominó cruce virtual y que se decora con un círculo (ver [2] y [3]). En la Figura 1 mostramos un ejemplo de un diagrama de un nudo clásico y uno de un nudo virtual.

Un nudo virtual es una clase de equivalencia de diagramas de nudos virtuales bajo los movimientos extendidos de Reidemeister (ver [2] y [5]). Un problema central, y que ha contribuido para que los nudos virtuales se hayan convertido en un campo fértil para la investigación, es el de encontrar un invariante que sea capaz de determinar cuándo un diagrama de un nudo virtual es equivalente a un diagrama de un nudo clásico. Este problema se conoce en la literatura como *el problema de distinguir nudos virtuales.*

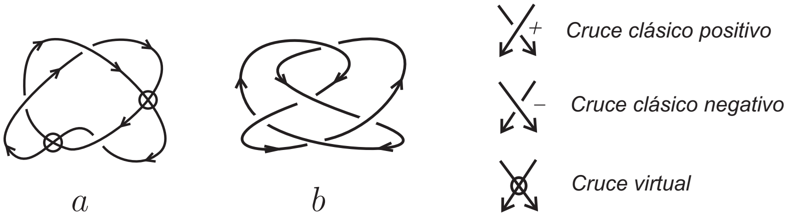

Figura 1. (a) Diagrama de un nudo virtual. (b) Diagrama de un nudo clásico.

El primer autor (ver [8] y [9]), definió los nudos combinatorios como clases de equivalencia de sucesiones de la forma $K = ((i_1, i_2, \cdots, i_{2n}), (e_1, \cdots, e_m))$, donde $\{i_1, \ldots, i_{2n}\}=\{a_1, \ldots, a_n\} \bigcup \{-a_1, \ldots, -a_n\}$, $a_j \in \mathbb{Z}^+$, $e_j \in \{1, -1\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ y $m = \text{máx}\{a_1, \ldots, a_n\}$. A estas sucesiones las llamamos *códigos nudales*, y a los números $a_1, \ldots, a_n$, los *cruces* de K. El código nudal *trivial* es el código vacío $((), ())$. Estos códigos permiten describir un diagrama de un nudo virtual a partir de una enumeración de sus cruces, de tal forma que se obtiene independencia del diagrama.

El proceso de asignación de un código nudal a un diagrama de un nudo virtual lo motivamos mediante un ejemplo. Consideramos el nudo virtual mostrado en la Figura 2, con una enumeración de sus cruces clásicos y un punto x que no está sobre ningún cruce.

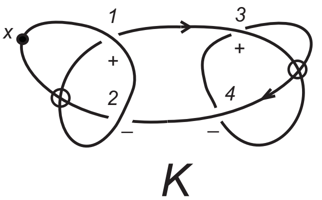

Figura 2. Diagrama de un nudo virtual con cruces clásicos enumerados

Recorremos el diagrama del nudo virtual a partir de x, en el sentido de la orientación, y formamos una lista con los números de los cruces que nos vayamos encontrando en el recorrido, con la convención de que si pasamos por debajo del cruce j, ponemos $-j$, y si pasamos por encima del cruce j, ponemos j. En el recorrido hacemos de cuenta que los cruces virtuales no están realmente allí. Aplicando este proceso al diagrama de la Figura 2 obtenemos la lista $(1, 2, -1, 3, -4, -3, 4, -2)$, que llamamos *lista de cruces*. Consideremos otra lista de la forma (e_1, e_2, e_3, e_4), donde $e_j = 1$ si el cruce j es positivo, $e_j = -1$ si el cruce j es negativo (ver Figura 1). Para nuestro ejemplo, $(e_1, e_2, e_3, e_4) = (1, -1, 1, -1)$, que llamamos *lista de signos*. Al código $((1, 2, -1, 3, -4, -3, 4, -2), (1, -1, 1, -1))$ lo llamamos *código nudal* de K.

Para la enumeración de los cruces en el ejemplo anterior utilizamos los enteros de 1 a 4, donde 4 es el número de cruces clásicos en el diagrama. Podemos escoger cualquier colección de enteros positivos para etiquetar los cruces clásicos del diagrama, y la lista de cruces se genera de manera similar. Sólo hay que tener cuidado al generar la lista de signos (ver [6] y [7]), pues el tamaño de ella será el máximo de los números usados en la enumeración.

Definición 2.1. Un código nudal $((i_1, i_2, \cdots, i_{2n}), (e_1, \cdots, e_m))$ es *geométrico* si es el código de un diagrama de un nudo clásico.

Un problema central de la teoría es encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un código nudal sea geométrico. La siguiente construcción resuelve este problema. El método consiste en asociar una tripleta a cada código nudal y caracterizar las tripletas que corresponden a códigos geométricos.

Sea $K = ((i_1, i_2, \cdots, i_{2n}), (e_1, \cdots, e_m))$ un código nudal. Para $a = a_j$ cruce de K, suponemos que $K = ((-e_a a,\ S_a,\ e_a a,\ \widetilde{S}_a),\ (e_1, \cdots, e_m))$. En otras palabras, S_a es el subconjunto de $\{i_1, i_2, \cdots, i_{2n}\}$ formado por aquellos elementos que ocurren entre $-e_a a$ y $e_a a$ de acuerdo al orden en que aparecen en la sucesión. Definamos los siguientes números:

$$\alpha_a(K) = \sum_{w \in S_a} \varepsilon_w \qquad \text{y} \qquad \beta_{ab}(K) = \sum_{w \in \overline{S}_a \cap S_b^{-1}} \varepsilon_w, \tag{1}$$

donde $\overline{S}_a = S_a \cup \{a, -a\}$, $S_b^{-1} = \{-x : x \in S_b\}$ y $\varepsilon_w = -sig(w) e_{|w|}$.

Los números anteriores son adaptaciones, a los códigos nudales, de los definidos por Cairns y Elton para resolver el problema de la palabra signada de Gauss (para detalles ver [1]).

Sea $K = ((i_1, i_2, \cdots, i_{2n}), (e_1, \cdots, e_m))$ un código nudal no trivial; supongamos que $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}^+$ son los cruces de K y sea $m = \text{máx}\{a_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$. Definimos el vector $\alpha(K) \in \mathbb{Z}^n$ y la matriz $\beta(K) \in \mathbb{Z}_{n \times n}$ como

$$\alpha(K) = \begin{pmatrix} \alpha_1(K) \\ \vdots \\ \alpha_m(K) \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \beta(K) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(K) & \cdots & \beta_{1m}(K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1}(K) & \cdots & \beta_{mm}(K) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

donde, para todo r y t, $1 \leq r \leq n$ y $1 \leq t \leq n$

$$\alpha_r(K) = \begin{cases} \alpha_{a_i}(K), & \text{si } r = a_i \\ 0, & \text{otros casos} \end{cases} \quad \text{y } \beta_{rt}(K) = \begin{cases} \beta_{a_i a_j}(K), & \text{si } r = a_i \text{ y } t = a_j \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}.$$

Ahora bien, si $K = ((), ())$, entonces $\alpha(K) = ()$ y $\beta(K) = ()$.

Definición 2.2. Sea $K = ((i_1, \ldots, i_{2n}), (e_1, \ldots, e_m))$ un código no trivial. Una **tripleta** para K, que denotamos por $\lambda(K)$, es una tripla de la forma $(E(K), \alpha(K), \beta(K))$, donde $E(K) = (e_1, \ldots, e_m)^T$, $\alpha(K)$ y $\beta(K)$ como en (2). Si $K = ((), ())$, definimos $\lambda(K)$ como $((), (), ())$.

La tripleta $\lambda(K)$ contiene información importante sobre el código nudal. En particular, permite caracterizar los códigos nudales geométricos, ya que tenemos el siguiente resultado (para la prueba ver [6]).

Teorema 2.3. *Un código K es geométrico si y sólo si $\lambda(K) = (E(K), (0)_n, (0)_{n \times n})$.*

El teorema anterior constituye una herramienta importante a nivel de códigos nudales y diagramas de nudos virtuales, pero tiene el problema de que depende del diagrama particular y no es un invariante de nudos virtuales. Por ejemplo, los dos diagramas

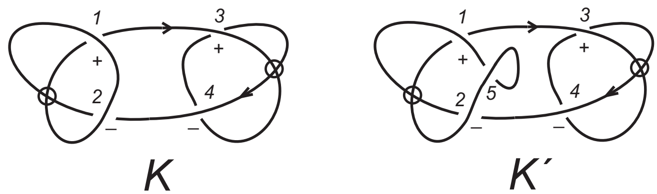

Figura 3. Dos diagramas diferentes del mismo nudo virtual.

virtuales de la Figura 3 representan el mismo nudo virtual; sin embargo, las tripletas asignadas a sus códigos no son iguales.

Un código nudal asociado a K es $((1,\ 2,\ -1,\ 3,\ -4,\ -3,\ 4,\ -2),\ (1,\ -1,\ 1,\ -1))$. Por definición, $S_1 = \{3,-4,-3,4,-2\}$, $S_2 = \{-1,3,\ -4,-3,4\}$, $S_3 = \{4,-2,1,2,-1\}$ y $S_4 = \{-2,1,2,-1,3\}$. Entonces $S_{12} = \{1,3,-4,-3,4\}$, $S_{13} = \{-4,-2,1,-1\}$, $S_{14} = \{-2,1,-1,-3\}$, $S_{23} = \{-4,-2,2,-1\}$, $S_{24} = \{2,-2,-1,-3\}$, $S_{34} = \{-2,1,2,-1,-3\}$. Por tanto tenemos que

$$\lambda(K) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Por un procedimiento similar,

$$\lambda(K') = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Las tripletas anteriores son diferentes. Para resolver este problema se necesita encontrar una clase de equivalencia apropiada en el conjunto de todas las tripletas, que permita hallar un invariante de nudos virtuales asociado a la tripleta $\lambda(K)$. Para ello se requiere estudiar las tripletas, lo que hacemos en la siguiente sección.

3. Tripletas

El Teorema 2.3 motiva el estudio de las tripletas de la forma (E, A, B) desde un punto de vista algebraico, independiente de la teoría de nudos. Dada una matriz B, $B^{(i)}$ y $B_{(j)}$ representan la i-ésima columna y la $j-$ésima fila de B, respectivamente.

Para $n \geq 1$, definimos $T_n = \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}^n \times sk(n, \mathbb{Z})$, donde $\mathbb{Z}_2$ se toma como el grupo multiplicativo $\{1, -1\}$, y $sk(n, \mathbb{Z})$ denota el conjunto de todas las matrices antisimétricas de orden n con componentes enteras, $T_0 = \{((), (), ())\}$ y definimos el conjunto de todas las tripletas como

$$T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} T_n.$$

Definición 3.1. Una **tripleta** (E, A, B) de orden $n \geq 1$ es un elemento del conjunto T_n. La tripleta $((),(),())$ la definimos como la tripleta de orden 0 o la **tripleta vacía**.

Algunas veces las tripletas se escriben en la forma $(E, A, B) = ((e_i), (a_i), (b_{ij}))$.

Definición 3.2 (Δ-movidas básicas)**.** Las **Δ-movidas básicas** son un conjunto formado por los tres tipos de transformaciones dadas a continuación:

Transformaciones tipo Δ_0: son modificaciones de la tripleta de la forma

$$(E, A, B) \to (PE, PA, PBP^T),$$

donde P es una matriz de permutación.

Transformaciones tipo Δ_1: son modificaciones de la tripleta de la forma

$$(E, A, B) \to \left(\begin{pmatrix} E \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & C \\ -C^T & 0 \end{pmatrix} \right),$$

donde $C^T = (0, \ldots, 0)$ o $C = A$ y $e \in \{1, -1\}$.

Transformaciones tipo Δ_2: son modificaciones de la tripleta de la forma

$$(E, A, B) \to \left(\begin{pmatrix} E \\ e \\ -e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A \\ d \\ -d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & C_1 & C_2 \\ -C_1^T & 0 & d \\ -C_2^T & -d & 0 \end{pmatrix} \right),$$

donde $C_1 + C_2 = A$, $e \in \{1, -1\}$ y $d \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

También consideramos las inversas de estas transformaciones.

Dada una permutación τ, a la matriz de permutación asociada la denotamos P_τ. Por comodidad, a la transformación de tipo Δ_0 de la forma $(E, A, B) \to (P_\tau E, P_\tau A, P_\tau B P_\tau^T)$ la llamamos *permutación* τ, o simplemente permutación.

La prueba del siguiente lema es inmediata de la definición de matriz de permutación, por lo cual la omitimos.

Lema 3.3. *Sea $(E, A, B) = ((e_i), (a_i), (b_{ij}))$ una tripleta de orden n, y sea τ una permutación del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$; si $P = P_\tau$, entonces*

$$(PE, PA, PBP^T) = ((e_{\tau(i)}), (a_{\tau(i)}), (b_{\tau(i)\tau(j)})).$$

Definición 3.4. Diremos que dos tripletas (E, A, B) y (E', A', B') son **Δ-equivalentes** si (E, A, B) puede ser transformada en (E', A', B') por medio de un número finito de las Δ-movidas básicas y sus inversos. Usamos la notación $(E, A, B) \asymp (E', A', B')$ para indicar Δ-equivalencia.

La relación $\asymp$ es, en efecto, una relación de equivalencia sobre el conjunto T. A la clase de equivalencia de la tripleta (E, A, B) la denotamos por $[E, A, B]$. Definimos $\mathcal{T} = T/\asymp$ como el conjunto de clases de equivalencias.

Definición 3.5. Sea (E, A, B) una tripleta de orden n. Decimos que (E, A, B) es **trivial** si es Δ-equivalente a $((), (), ())$. Decimos que (E, A, B) es **reducible** si satisface alguna de las siguientes dos condiciones:

(1) Existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a_j = 0$ y $(B^{(j)} = (0)_{n\times 1}$ o $B^{(j)} = A)$.

(2) Existen $r, t \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $e_r = -e_t$, $A_r = -A_t$ y $B^{(r)} + B^{(t)} = A$.

En caso contrario decimos que es **irreducible**.

El siguiente lema es una consecuencia directa del hecho de que toda permutación es un producto de transposiciones; por tal motivo omitimos su prueba.

Lema 3.6. *Sea (E, A, B) una tripleta de orden n y sea $(E', A', B') = (PE, PA, PBP^T)$, donde P es una matriz de permutación. Entonces (E, A, B) es reducible si y sólo si (E', A', B') lo es.*

Consideremos la siguiente generalización de la Definición 3.2.

Definición 3.7. Las **Δ-movidas generalizadas** son un conjunto formado por dos tipos de transformaciones obtenidas al combinar las movidas básicas Δ_1 y Δ_2 con permutaciones, como sigue:

Transformaciones Δ_1^g: son una modificación de la forma $(E, A, B) \to (E', A', B')$, donde (E', A', B') se obtiene al aplicar una transformación Δ_1 básica sobre (E, A, B) seguida de una permutación asociada a $\tau = (j\ n\ n-1\ \cdots\ j+1)$, $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, donde n es el orden de (E, A, B).

Transformaciones Δ_2^g: son una modificación de la forma $(E, A, B) \to (E', A', B')$, donde (E', A', B') se obtiene al aplicar una transformación Δ_2 básica sobre (E, A, B) seguida de una de tipo Δ_0 asociada a una permutación τ, donde τ es la permutación dada por

$$\tau(k) = \begin{cases} k, & \text{si} \quad 1 \le k < i, \\ n-1, & \text{si} \quad k = i, \\ k-1, & \text{si} \quad i+1 < k < j-1, \\ n, & \text{si} \quad k = j, \\ k-2, & \text{si} \quad j+1 < k \le n, \end{cases}$$

tomando $i < j$.

Ahora bien, ¿qué significa la inversa de una Δ^g-movida?

Supongamos que (E, A, B) es reducible; entonces satisface alguna de las dos condiciones de la Definición 3.5.

Si se cumple la condición (1), la simplificación Δ_1^g permite eliminar, de los vectores E y A, e_j y a_j, respectivamente, y eliminar de la matriz B la columna $B^{(j)}$ y la fila $B_{(j)}$.

Si se cumple la condición (2), la simplificación Δ_2^g permite eliminar, de los vectores E y A, las componentes e_r y e_t, a_r y a_t, respectivamente, y eliminar de la matriz B las columnas $B^{(r)}$ y $B^{(t)}$, y las filas $B_{(r)}$ y $B_{(t)}$.

Teorema 3.8. *Dos tripletas son Δ-equivalentes si una de ellas se puede transformar en la otra por medio de un número finito de permutaciones, Δ-movidas generalizadas o de sus respectivas inversas.*

De ahora en adelante trabajamos con permutaciones y las Δ-movidas generalizadas. Por tanto, para que la notación no sea recargada, llamamos a las transformaciones de tipo Δ_1^g y Δ_2^g *transformaciones de ampliación*, y a sus respectivos inversos *transformaciones de simplificación*.

Definición 3.9. Una **sucesión finita de tripletas** es un conjunto de la forma $\{(Y_i, Z_i, W_i)\}_{i=1}^k$, donde (Y_i, Z_i, W_i) es una tripleta de orden $n_i, (Y_i, Z_i, W_i) = ((y_j^i), (z_j^i), (w_{jr}^i))$, $j = 1, 2, \ldots, n_i$.

Sea (E, A, B) una tripleta de orden m, y sea $\{(Y_i, Z_i, W_i)\}_{i=1}^k$ una sucesión de tripletas. Decimos que $\{(Y_i, Z_i, W_i)\}_{i=1}^k$ es una **sucesión válida** de (E, A, B), de longitud k, si

$$(E, A, B) \asymp (Y_1, Z_1, W_1) \asymp \cdots \asymp (Y_k, Z_k, W_k),$$

y donde $(Y_{i+1}, Z_{i+1}, W_{i+1})$ se obtiene al aplicar sobre (Y_i, Z_i, W_i) una única transformación, bien sea de permutación, ampliación o de simplificación, para $i = 0, 1, \ldots, k-1$, donde $(Y_0, Z_0, W_0) = (E, A, B)$.

Con la notación anterior podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.10. *Sea $(E, A, B) = ((e_i), (a_i), (b_{ij}))$ una tripleta irreducible de orden m. Si $\{(Y_i, Z_i, W_i)\}_{i=1}^k$ es una sucesión válida de (E, A, B), donde (Y_i, Z_i, W_i) es de orden n_i, entonces, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$,*

$$n_i \geq m,$$

y existen $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset \{1, 2, \ldots, n_i\}$ tales que, para todo j y r en $\{1, 2, \ldots, m\}$,

$$y_{t_j}^i = e_j, \qquad z_{t_j}^i = a_j \qquad \text{y} \qquad w_{t_j t_r}^i = b_{jr}. \tag{3}$$

Demostración. Sean (E, A, B) una tripleta irreducible de orden m y $\{(Y_i, Z_i, W_i)\}_{i=1}^k$ una sucesión válida de (E, A, B). La prueba la hacemos por inducción sobre la longitud k de la sucesión.

Para $k = 1$. Sea $\{(Y, Z, W)\}$ una sucesión válida de (E, A, B); entonces $(E, A, B) \asymp (Y, Z, W)$. Puesto que (E, A, B) es irreducible, entonces (Y, Z, W) debe ser o una permutación o una ampliación de (E, A, B). Ahora bien, si (Y, Z, W) es una ampliación de (E, A, B), se toma $t_j = j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Por otro lado, si (Y, Z, W) es una permutación, digamos τ, de (E, A, B), se toma $t_j = \tau(j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Por tanto, el teorema se cumple para $k = 1$.

Supongamos que el resultado es cierto para toda sucesión válida de (E, A, B) de longitud k, y sea $\{(Y_i, Z_i, W_i)\}_{i=1}^{k+1}$ una sucesión válida de (E, A, B); entonces debemos probar que $n_{k+1} \geq m$ y que existe $\{\widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_m\} \subset \{1, 2, \ldots, n_{k+1}\}$ que satisface (3). En efecto, $\{(Y_i, Z_i, W_i)\}_{i=1}^k$ es una sucesión válida, de longitud k, de (E, A, B). Así, por hipótesis de inducción, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, $n_i \geq m$ y existen $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset \{1, 2, \ldots, n_i\}$ tales que para todo j y r en $\{1, 2, \ldots, m\}$

$$y_{t_j}^i = e_j, \qquad z_{t_j}^i = a_j \qquad \text{y} \qquad w_{t_j t_r}^i = b_{jr}.$$

Analicemos las posibilidades para $(Y_{k+1}, Z_{k+1}, W_{k+1})$.

Si $n_k = m$, entonces $\{t_1, \ldots, t_m\} = \{1, 2, \ldots, m\}$. Así, por el Lema 3.3, al tomar P_τ, donde $\tau = (1\ t_1)(2\ t_2)\cdots(m\ t_m)$, tenemos que

$$\begin{aligned}(P_\tau Y_k, P_\tau Z_k, P_\tau W P_\tau^T) &= ((y^k_{\tau(j)}), (z^k_{\tau(j)}), (w^k_{\tau(j)\tau(r)})) = ((y^k_{t_j}), (z^k_{t_j}), (w^k_{t_j t_r}))\\ &= ((e_j), (a_j), (b_{jr})) = (E, A, B).\end{aligned}$$

Por tanto (Y_k, Z_k, W_k) es irreducible. Luego $(Y_{k+1}, Z_{k+1}, W_{k+1})$ debe ser o una permutación o una ampliación de (E, A, B). Haciendo un análisis similar al hecho en el primer paso de inducción, se tiene el resultado para $k + 1$.

Supongamos ahora que $n_k > m$. Si $(Y_{k+1}, Z_{k+1}, W_{k+1})$ es una permutación τ de (Y_k, Z_k, W_k), entonces $n_{k+1} = n_k > m$; y si tomamos $\widetilde{t_j} = \tau(t_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, vemos que el teorema se cumple para $k + 1$. Por otro lado, si $(Y_{k+1}, Z_{k+1}, W_{k+1})$ es una ampliación de (Y_k, Z_k, W_k), entonces $n_{k+1} > n_k > m$; y si tomamos $\widetilde{t_j} = t_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, vemos que el resultado es válido para $k + 1$.

Consideremos el caso en el que $(Y_{k+1}, Z_{k+1}, W_{k+1})$ es una simplificación de (Y_k, Z_k, W_k). Para considerar este caso, debemos suponer que $n_k \geq m+1$ o que $n_k \geq m+2$ si tenemos una de tipo Δ_1^g ó Δ_2^g, respectivamente.

Supongamos que tenemos una simplificación asociada a una transformación de tipo Δ_1^g; entonces existe $g \in \{1, 2, \ldots, n_k\}$ tal que

$$z^k_g = 0 \quad \text{y} \quad \left(w^k_{jg} = 0 \text{ o } w^k_{jg} = z^k_j, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n_k\right). \tag{4}$$

Supongamos que existe $r \in \{1, 2, \ldots, m\}$, tal que $g = t_r$; entonces, de (4), para todo j y r en $\{1, 2, \ldots, m\}$,

$$a_r = z^k_{t_r} = z^k_g = 0 \quad \text{y} \quad \left(b_{jr} = w^k_{t_j t_r} = w_{t_j g} = 0 \text{ o } b_{jr} = w^k_{t_j t_r} = w_{t_j g} = z^k_{t_j} = a_j\right),$$

lo que implicaría que (E, A, B) es reducible; por tanto, $g \notin \{t_1, \ldots, t_r\}$. Luego, $n_{k+1} = n_k - 1 \geq m$, y al tomar $\widetilde{t_j} = t_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, el teorema se cumple para $k + 1$.

Supongamos ahora que tenemos una simplificación asociada a una transformación de tipo Δ_2^g; entonces existen g y h en $\{1, 2, \ldots, n_k\}$ tales que

$$y^k_g = -y^k_h, \quad z^k_g = -z^k_h \quad \text{y} \quad w^k_{jg} + w^k_{jh} = z^k_j,\ j = 1, 2, \ldots, n_k.$$

Entonces $\{g, h\} \nsubseteq \{t_1, \ldots, t_m\}$, pues de lo contrario (E, A, B) sería reducible; por tanto el teorema se cumple para $k + 1$ si $\widetilde{t_j} = t_j$, para $j = 1, 2, \ldots, m$. ☑

El siguiente teorema garantiza que toda clase de equivalencia $[E, A, B]$ contiene un único elemento irreducible, salvo permutaciones.

Teorema 3.11. *Sea $[E, A, B] \in \mathcal{T} = T/\asymp$; entonces existe $(E', A', B') \in [E, A, B]$, tal que (E', A', B') es irreducible. Es más, si (E'', A'', B'') es otro elemento irreducible en $[E, A, B]$, entonces existe una matriz P de permutación tal que $(PE', PA', PB'P^T) = (E'', A'', B'')$, y por tanto todos los irreducibles de $[E, A, B]$ tienen el mismo orden.*

Demostración. Sea (E, A, B) una tripleta de orden n y sea G el conjunto formado por todos los $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tales que $T_m \cap [E, A, B] \neq \phi$. Ahora bien, $G \subset \mathbb{N}\cup\{0\}$ y $G \neq \phi$, así, por el principio del buen orden, existe un elemento minimal $m_0 \in G$. Sea $(E', A', B') \in T_{m_0} \cap [E, A, B]$; entonces, por la minimalidad de m_0, (E', A', B') es irreducible.

Sea (E'', A'', B'') otro elemento irreducible en $[E, A, B]$ de orden m; puesto que $m \in G$, se tiene que, $m_0 \leq m$.

Puesto que (E', A', B') y (E'', A'', B'') son elementos de la clase de equivalencia $[E, A, B]$, entonces existe una sucesión finita de tripletas $\{(Y, Z, W)_i\}_{i=1}^{k}$ tales que

$$(E'', A'', B'') \asymp (Y_1, Z_1, W_1) \asymp \cdots \asymp (Y_k, Z_k, W_k) \asymp (E', A', B').$$

Sin perdida de generalidad podemos suponer que la sucesión $\{(Y_i, Z_i, W_i)\}_{i=1}^{k+1}$, donde $(Y_{k+1}, Z_{k+1}, W_{k+1}) = (E', A', B')$, es válida para (E'', A'', B''). Así, por el Teorema 3.10 tenemos que $m_0 \geq m$, de donde $m_0 = m$, y además existe una matriz P de permutación tal que $(PE'', PA'', PB''P^T) = (E', A', B')$. ☑

Por el teorema anterior tiene sentido la siguiente definición.

Definición 3.12. Sea $[S, A, B] \in \mathcal{T}$. Definimos el **orden** de $[S, A, B]$ como el orden de alguno de sus irreducibles.

4. Cuándo una tripleta es la tripleta de un código

Sea (E, A, B) una tripleta de orden $n \geq 1$. En esta sección nos preguntamos acerca de las condiciones que debe satisfacer (E, A, B) para que exista un código K tal que $\lambda(K) = (E, A, B)$. Es posible que tales condiciones no se puedan extender a la clase de equivalencia $[E, A, B]$. Antes de iniciar la búsqueda de tales condiciones consideremos la siguiente definición.

Definición 4.1 (Grafo de entrelazamiento)**.** Sea K un código nudal con cruces $a_1, \ldots, a_n$. Definimos el **grafo de entrelazamiento** de K, denotado por I_K, como la pareja ordenada $(V(I_K), E(I_K))$ consistente de un conjunto $V(I_K) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de vértices y un conjunto $E(I_K)$ de aristas de la forma $a_i a_j$, donde $a_i a_j \in E(I_K)$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes dos condiciones:

$$(a_i \in S_{a_j}(K) \quad \text{y} \quad -a_i \notin S_{a_j}(K)) \quad \text{ó} \quad (-a_i \in S_{a_j}(K) \quad \text{y} \quad a_i \notin S_{a_j}(K)).$$

Sea m un cruce de K; definimos la estrella de m en I_K, denotada por $star(m)$, como el subgrafo de I_K inducido por m y sus vecinos. Por simplicidad, usamos la notación: $V_m = V(star(m))$ y $E_m = E(star(m))$.

Ahora clasificamos los elementos de V_m y E_m, respectivamente, en dos conjuntos como sigue:

$$V_m^+ = \{t \in V_m : m \in S_t(K)\}, \qquad V_m^- = \{t \in V_m : -m \in S_t(K)\},$$
$$E_m^+ = \{mj : -e_j j \in S_m(K)\}, \qquad E_m^- = \{mj : e_j j \in S_m(K)\} = E_m \backslash E_m^+.$$

Lema 4.2. *Sea K un código nudal y sea $a = a_j \in \{a_1, \ldots, a_n\}$. Entonces $\alpha_a(K) = |E_a^+(K)| - |E_a^-(K)|$, donde $|E_a^+(K)|$ y $|E_a^-(K)|$ denotan las cardinalidades de $E_a^+(K)$ y $E_a^-(K)$, respectivamente.*

Demostración. Supongamos que $V_a(K) = \{b_1, \dots, b_r\} \cup \{a\}$; entonces

$$E_a(K) = \{ab_j : j = 1, \dots, r\}.$$

Con esta notación $E_a^+(K) = \{ab_j : -e_{b_j} b_j \in S_a(K)\}$ y $E_a^-(K) = \{ab_j : e_{b_j} b_j \in S_a(K)\}$.

Si $N_a = \{x \in S_a : -x \notin S_a\}$, entonces $\alpha_a(K) = \sum_{w \in N_a} \varepsilon_w$. Ahora bien, sea $w \in N_a$:

Si $e_{|w|} = 1$ y $w > 0$, entonces $aw \in E_a^-(K)$ y $\varepsilon_w = -1$.

Si $e_{|w|} = 1$ y $w < 0$, entonces $a\,|w| \in E_a^+(K)$ y $\varepsilon_w = 1$.

Si $e_{|w|} = -1$ y $w > 0$, entonces $aw \in E_a^+(K)$ y $\varepsilon_w = 1$.

Si $e_{|w|} = -1$ y $w < 0$, entonces $a\,|w| \in E_a^-(K)$ y $\varepsilon_w = -1$.

Sean $A = \{w \in N_a : \varepsilon_{|w|} = 1\}$ y $B = \{w \in N_a : \varepsilon_{|w|} = -1\}$; entonces tenemos que

$$\sum_{w \in A} \varepsilon_w = \left|E_a^+(K)\right| \, y \sum_{w \in B} \varepsilon_w = -\left|E_a^-(K)\right|.$$

Puesto que, $\alpha_a(K) = \sum\limits_{w \in A} \varepsilon_w + \sum\limits_{w \in B} \varepsilon_w$, entonces, $\alpha_a(K) = |E_a^+(K)| - |E_a^-(K)|$. ☑

El siguiente teorema resume las condiciones que debe cumplir una tripleta para ser la tripleta de un código nudal. ¿Serán dichas condiciones suficientes? Esta pregunta es una pregunta abierta en la que estamos trabajando.

Teorema 4.3. *Sea K un código nudal con conjunto de cruces $\{a_1, \dots, a_n\}$. Entonces:*

(1) $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{a_j}(K) = 0$;

(2) $\alpha_{a_i}(K) \in [-(n-1), n-1] = \{-(n-1), -(n-2), \dots, 0, 1, 2, \dots, n-2, n-1\}$, *para todo* $i = 1, 2, \dots, n$;

(3) $\beta_{a_i a_j}(K) \in [-(n-1), n-1] = \{-(n-1), -(n-2), \dots, 0, 1, 2, \dots, n-2, n-1\}$, *para todo* $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Demostración. No perdemos generalidad si suponemos que los cruces de los códigos son $1, 2, \dots, n$. Estos códigos los llamamos estándar.

(1) Por el Lema 4.2 es suficiente probar que $\sum\limits_{j=1}^{n} \left(\left|E_j^+(K)\right| - \left|E_j^-(K)\right|\right) = 0$.

Consideremos la estrella en el vértice a:

Si $V_a(K) = \{a\}$, entonces $E_a^+(K) = E_a^-(K) = \phi$, de donde $|E_a^+(K)| - |E_a^-(K)| = 0$.

Supongamos ahora que $V_a(K) \neq \{a\}$. Por reenumeración, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $at \in E_a^+(K)$, $t = 1, 2, \dots, j$ y $as \in E_a^-(K)$, $s = j+1, \dots, r$. Se cumple que $at \in E_a^+(K)$ si y sólo si $-e_t t \in S_a(K)$ si y sólo si $K = ((C, -e_a a, D, -e_t t, P, e_a a, Q, e_t t), (e_1, \dots, e_n))$ si y sólo si $e_a a \in S_t(K)$ si y sólo si $at \in E_t^-(K)$.

Como at pertenece sólo a dos estrellas, entonces $\sum\limits_{j=1}^{n} \left|E_j^+(K)\right| = \sum\limits_{j=1}^{n} \left|E_j^-(K)\right|$, por tanto se tiene el resultado.

(2) Sea $\mathcal{K}_n$ el conjunto de todos los códigos nudales, en forma estándar, de n cruces. Sea $K \in \mathcal{K}_n$ y sea j un cruce de K. Si $K = ((-e_j j, i_2, \ldots, i_t, e_j j, i_{t+2}, \ldots, i_{2n}), (e_1, \ldots, e_n))$, entonces $S_j(K) = \{i_2, \ldots, i_t\}$. Sean $\{a_1, \ldots, a_p\}, \{b_1, \ldots, b_q\}$ y $\{c_1, \ldots, c_s\}$ subconjuntos disjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\} \backslash \{j\}$ tales que

$$S_j(K) = \{a_1, \ldots, a_p\} \cup \{-b_1, \ldots, -b_q\} \cup \{c_1, -c_1, \ldots, c_s, -c_s\};$$

por tanto,

$$\alpha_j(K) = -e_{a_1} - \ldots - e_{a_p} + e_{b_1} + \ldots + e_{b_q}.$$

Puesto que $a_t \neq b_r$ para todo $t \in \{1, \ldots, p\}$ y $r \in \{1, \ldots, q\}$, entonces $p + q \leq n - 1$, de donde α_j toma su valor máximo cuando $p + q = n - 1$, $e_{a_1} = \ldots = e_{a_p} = -1$ y $e_{b_1} = \ldots = e_{b_q} = 1$, con lo que $\alpha_j(K) \leq n - 1$, para todo $K \in \mathcal{K}_n$. Por otro lado, α_j obtiene su valor mínimo cuando $p+q = n-1$, $e_{a_1} = \ldots = e_{a_p} = 1$ y $e_{b_1} = \ldots = e_{b_q} = -1$, con lo que $\alpha_j(K) \geq -(n-1)$, para todo $K \in \mathcal{K}_n$.

(3) Se hace un argumento similar al hecho en la prueba de (2) y se obtiene (3). ☑

El siguiente ejemplo muestra que las cotas dadas en el teorema anterior se alcanzan.

Ejemplo 4.4. Sea n un entero positivo mayor o igual a 2, y sea $K_n = ((1, 2, \ldots, n, -1, -2, \ldots, -n), (1, 1, \ldots, 1))$. Entonces $S_i(K_n) = \{-(i+1), -(i+2), \ldots, -n, 1, 2, \ldots, i-1\}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, de donde $\alpha_i(t) = n - 2i + 1$. Por otro lado, $\overline{S}_i(K_n) \cap S_j^-(K_n) = \{j+1, \ldots, i\}$, con lo que, $\beta_{ij}(K_n) = j - i$ para $i > j$.

Referencias

[1] Cairns G. and Elton D., "The Planarity Problem for Signed Gauss Words", *J. Knot Theory Ramifications*, 2, No. 4 (1993), 359-367.

[2] Kauffman L.H., "Virtual knot theory", *European J. Combin.* 20 (1999), 663–690.

[3] Kaufman L.H. and Manturov V.O., "Virtual knots and links" (Russian), *Tr. Mat. Inst. Steklova* 252 (2006), 114–133; translation in *Proc. Steklov Inst. Math.* 252 (2006), 104–121.

[4] Kawauchi A., *A survery of knot theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.

[5] Manturov V., *Knot theory*, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2004.

[6] Rodríguez J.G., *Nudos virtuales*, Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Colombia. 2011.

[7] Rodríguez J.G. and Toro M., "Virtual knot groups and combinatorial knots", *Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences* 3, **1** (2009), 297–314.

[8] Toro M., "Nudos combinatorios y mariposas", *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* 28, 106 (2004), 79–86.

[9] Toro M., *Programación en Mathematica con aplicaciones a la Teoría de Nudos.* Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, 2004.

[10] Toro M. y Rodríguez J.G., "Nudos combinatorios: una nueva visión de los nudos virtuales", preprint, 2009.

[11] Turaev V., "Cobordism of knots on surfaces", *Journal of Topology* 1, No. 2 (2008), 285–305.