

# *Ignorancia ideológica del constructivismo*

EMILIO GARBAYO

E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos.  
Barcelona

## 1. *Introducción*

El constructivismo es una propuesta de fundamentación de las matemáticas, así como una manera y estilo de desarrollarlas; fue creado por L. E. J. Brouwer y contó con precursores de la talla de L. Kronecker y H. Poincaré. Su punto crucial estriba en como concibe la existencia matemática de cualquier objeto, para la cual éste debe ser «construido en un número finito de pasos a partir de los enteros naturales».

Constructivismo y formalismo son, hablando muy a grandes rasgos, las dos únicas fundamentaciones que, de hecho, se han dado históricamente (si entendemos que el logicismo de Frege y Russell está mucho más cerca del formalismo, a pesar de ciertas diferencias filosóficas, pero menos en cuanto a métodos y técnicas). Desde un punto de vista teórico habría cabida, en principio, para otras fundamentaciones, pero éstas nunca han salido a escena.

Para un constructivista el afirmar que existe un objeto matemático, por ejemplo un número real, significa que construido (o supuesto construido) cualquier natural  $n$ , la  $n$ -sima cifra del número real se puede obtener en un número finito de pasos. Para un formalista significa, en esencia, que la frase «existe el número tal y cual» puede producirse a partir de unas frases admitidas inicialmente (los axiomas), mediante ciertos mecanismos lingüísticos admitidos correctos (las llamadas reglas de deducción). Tan estricta concepción de la existencia situó a los constructivistas frente a una tarea formidable que los fundadores, a principios de siglo, no pudieron superar en buena parte. En aquellos días los más usualmente, llamados intuicionistas (por su postura de admitir la intuición de los enteros naturales como primaria y no analizable) ya comprobaron que los teoremas más clásicos del cálculo y análisis matemático no resultaban válidos constructivamente. Sólo muy recientemente, Erret

Bishop en su libro «Foundations of constructivite analysis» (Mc Graw Hill, 1968) ha podido recrear constructivamente un cuerpo matemático suficiente para todas las aplicaciones técnicas o de otra índole, abriendo así nuevas perspectivas.

## 2. *Dificultades de consolidación del constructivismo*

El constructivismo o intuicionismo encontró, desde sus orígenes, un firme rechazo del público matemático en general, rechazo que vino variando desde una oposición total hasta un paternalismo benevolente. Muy pocos matemáticos han sido, incluso en formas no estrictas, partidarios del constructivismo, si bien entre las excepciones se cuentan varios de primera fila.

El rechazo del constructivismo es un hecho que, en contraste con su cierta realidad, apenas si ha emergido a la conciencia de los matemáticos (no son pocos aquellos que lo ignoran en sus rasgos esenciales). No es así de extraño que, mucho menos, se hayan ocupado de dilucidar las causas de tal rechazo. En primera y superficial ojeada, se aparecen como un conglomerado, difícil de desmadejar, de razones subjetivas: el gran prestigio de Hilbert (creador del formalismo), la mezcla con tesis filósóficas oscurantistas por parte de Brouwer y sus primeros discípulos, etcétera; y también razones objetivas: el menor esfuerzo de los métodos formalistas para producir sus resultados, la enorme inercia histórica de la tradición lógica que culmina en la lógica formal, etc.

En este medio adverso, el constructivismo ha debido luchar dura y agriamente para mantener su identidad. Al leer a sus más fieles autores se tiene la impresión de estar ante inflexibles defensores de una idea un tanto mesiánica, en un estilo incisivo más adecuado, al menos en apariencia, a un debate político que a una serena discusión con colegas de la profesión matemática.

## 3. *Dificultades de identidad del constructivismo*

Bastantes matemáticos no constructivistas se han arrogado la tarea de explicarnos, a los que en secundarias filas necesitamos de enseñanza, lo que el intuicionismo es. No resulta claro, por otra parte, que pidan a sus colegas oponentes, constructivistas, por colaborar en servicio tan señalado a la difusión de su semidesconocida doctrina. Para ilustrar tan desinteresado servicio, valga como muestra, que no podrá evitar el ser sesgada cuando se está provocando un debate casi sin abrir, la siguiente lista:

- El grupo Bourbaki, en las dos páginas escasas que su libro de historia (recopilación de notas) dedica al intuicionismo, nos expone lo que de circunstancial, secundario o filosóficamente irrelevante se puede encontrar en un pensamiento en sus orígenes: «No vamos a intentar resumir una doctrina tan *compleja* como el intuicionismo, teoría que participa en tanta medida de la psicología como de las matemáticas... por ejemplo, no puede decirse en matemática intuicionista que una relación de la forma « $R$  o (no  $R$ )» sea verdadera (principio del tercio excluso)... la inducción transfinita y sus aplicaciones... son condenadas sin apelación...» (1).
- Stephen C. Kleene, lógico de primera categoría mundial, nos dice: «En el entretanto, surgió en los años treinta una manifestación diferente de la tendencia constructiva, en la forma de una teoría general de los procesos constructivos... A esta teoría se la llamó comúnmente la 'Teoría de las funciones (generales) recursivas'... Pero, aunque el intuicionismo contribuyó al clima... en el que surgieron las funciones recursivas, esta última teoría se desarrolló en sus detalles bastante independiente de las matemáticas intuicionistas... el intuicionismo... continuó sin prestar atención explícita a la teoría de funciones recursivas. Sin embargo, es natural buscar conexiones entre el intuicionismo y la teoría de las funciones (generales) recursivas... se ha sugerido que el uso de las funciones recursivas podría hacer más accesible el análisis de Brouwer... Comenzaremos construyendo un sistema formal en el que... las actuales matemáticas intuicionistas de las especies de orden superior... (pueden desarrollarse)...» (2).
- Todo lo anterior no puede por menos de suscitar extrañeza en quien lee a Erret Bishop: «los lógicos tienen la culpa de que muchos matemáticos que creen que conocen algo de los presupuestos constructivistas, lo que tienen en mente es un sistema formal es-trambótico o, tan malo como eso, confunden el constructivismo con la teoría de funciones recursivas» (3). Sin embargo, un matemático del prestigio de Kleene no puede ignorar del todo los términos reales del credo intuicionista, ya que continúa: «La formalización puede parecer, en principio, no apropiada. Pues uno de los credos brouwerianos es que las matemáticas deben consistir en construcciones intuitivas y en razonamientos intuitivos basados en

---

(1) N. BOURBAKI, «Elementos de historia de las matemáticas», págs. 69-71. Alianza Universidad 2ª edición, Madrid, 1976.

(2) Traducido de S. C. KLEENE, «The foundations of intuitionistic mathematics». North Holland Publ. Co., págs. 3-4.

(3) Traducido de E. BISHOP, «Foundation of constructive analysis», Mc Graw Hill Co. 1968, pág. 6.

el significado de proposiciones sobre tales construcciones, en lugar de deducciones formales a partir de axiomas enunciados formalmente» (4).

Uno de los hechos curiosos que se ofrecería al sociólogo atento sería la copiosa cantidad de páginas que los matemáticos no intuicionistas han dedicado a la llamada lógica del constructivismo, cuando sus propios partidarios mantienen que tal disciplina la consideran al margen de las matemáticas. Desde luego los constructivistas no consideran válida a priori, por ejemplo, la ley del tercero excluido, pero ello es una consecuencia relativamente secundaria (e innecesaria) de su tesis fundamental sobre la existencia matemática. Sin embargo, Kolmogorov, Lorenzen, Kleene..., han escrito abundantes páginas sobre lógica intuicionista.

#### 4. *Algunas hipótesis y perspectivas*

Resulta difícil al autor de este artículo no ver, en las citas anteriores, la lucha del constructivismo por su propia supervivencia, cuando ni siquiera su naturaleza parece conocerse (o acordarse) de modo aceptablemente unánime. Tan escasa transparencia, en la ciencia tenida por objetiva sobre las demás, nos lleva a la hipótesis de que la confrontación examinada apunta a que hay factores en juego, aparte de los puramente científicos; factores que cabría etiquetar como ideológicos. No nos señalan lo contrario, desde luego, las consideraciones valorativas o de utilidad que se encuentran en casi todos los autores, incluidos los de más prestigio. Así leemos:

«...Resultados muy diferentes de los teoremas clásicos. Una parte de estos últimos desaparece... La escuela intuicionista, cuyo recuerdo subsistirá únicamente a título de curiosidad histórica...» (5), o bien «Si la matemática clásica pudiera ser reconstruida ateniéndose a las restricciones intuicionistas, sin un excesivo incremento en la labor requerida y sin sacrificios demasiado grandes...» (6). No estaría de más recordar que destacados filósofos de la ciencia (Bachelard es quizá su prototipo) ha tiempo que advierten sobre los obstáculos que una visión pragmática puede oponer al desarrollo científico.

Consideraciones a veces rayanas en el sectarismo o la adoración mágica, se dan entre los más decididamente formalistas, valga de nuevo el ejemplo del grupo Bourbaki: «...creemos que la matemática está desti-

(4) Traducido de S. C. KLEENE, *op. cit.*, pág. 5.

(5) N. BOURBAKI, *op. cit.*, págs. 61-62.

(6) S. C. KLEENE, «Introducción a la matemática», Editorial Tecnos. Madrid, 1974 página 57.

nada a sobrevivir, y que nunca veremos las partes esenciales de este edificio derrumbarse por una contradicción súbita... no pretendemos que esta opinión se base sobre nada más que la experiencia...» (7), comentario del que ha dicho muy acertadamente A. Dou que «se hace difícil conceder que no haya más fundamento que el de la experiencia, y en particular queda sin explicar el hecho extraordinario de la permanencia invariable durante veinticinco siglos de las verdades matemáticas» (8). Bourbaki llega, en lo que parece una ofuscación propia de una disputa de café, a negar a Poincaré una mínima perspicacia que, de sobra, podemos atribuir a nuestros alumnos aventajados de facultad: «Enemigo por principio de los lenguajes formalizados, cuya utilidad negaba, confunde constantemente la noción de entero en las matemáticas formalizadas y el empleo de enteros en la teoría de la demostración» (9).

De emprenderse la investigación histórica y sociológica sobre el constructivismo que este artículo tiene la pretensión de motivar, no habría que ignorar las formas más antiguas de esa dualidad razonar-calcular, tan vieja al menos como la matemática griega, con su geometría o arte de razonar (para espíritus selectos) y su aritmética o arte de calcular (para mercaderes fenicios, pero no para griegos cultos).

Que Platón estaba ya al cabo de este problema, del que no son conscientes una buena parte de los matemáticos contemporáneos, lo demuestra el admirable párrafo de un diálogo, 'La República':

«Sócrates: El lenguaje de que se valen es muy ridículo, aunque no pueden dejar de usarlo. No hablan sino de cuadrar, prolongar, añadir y así por este orden, como si hiciesen algo y todas sus operaciones se dirigiesen a la práctica, siendo así que en la realidad esta ciencia termina en la especulación.

Glaucón: Tienes razón en todo.

Sócrates: ¿Conviene aún en otra cosa?

Glaucón: ¿En cuál?

Sócrates: En que termina en la especulación lo que es siempre, y no lo que nace y perece con el tiempo.

Glaucón: No tengo dificultad en concederlo; por que la geometría tiene por objeto el conocimiento de lo que siempre es» (10).

Las consideraciones anteriores nos llevan, por la vía del ejemplo, a otra mucho más amplia aunque de interés primordial, a saber: si la

(7) Traducido de N. BOURBAKI, «Theorie des ensembles». Herman, París, 1970, página E-I, 13.

(8) A. DOU, «Fundamentos de la matemática». Editorial Labor. Barcelona, 1970. página 134.

(9) N. BOURBAKI, «Elementos de historia...», pág. 58.

(10) Tomando de A. DOU, *op. cit.*, pág. 18.

historia de las ciencias reconocida y claramente objetivas (como las matemáticas en nuestro caso) puede mostrar en el seno de las mismas orientaciones 'ideológicas', incluso en épocas de completa veteranía y consolidación de tales ciencias. Cuestión que también conlleva el investigar hasta que límite pueden, o no, coexistir y evolucionar compatiblemente, en el interior de las ciencias más consolidadas, concepciones científicas con otras ideológicas.