MÉTODOS BORROSOS PARA LA DETECCIÓN DE PÉRDIDAS VIRTUALES EN PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN

M.J. Canós Darós, C. Ivorra Castillo, V. Liern Carrión
Universidad de Valencia

RESUMEN

En este trabajo aplicamos técnicas borrosas para incorporar datos externos al problema de la p-mediana. De este modo podemos detectar ciertas soluciones que los algoritmos usuales, tanto deterministas como borrosos, hubieran descartado y que, sin embargo, contrastadas con ayuda de la información externa que poseemos, resultan más ventajosas. Normalmente, esta situación revela la existencia de una patología en el modelo y, en consecuencia, nuestros métodos proporcionan criterios de validación borrosos para cada instancia del problema de la p-mediana.

INTRODUCCIÓN

Los modelos matemáticos ayudan a entender y resolver múltiples problemas de gestión de la empresa. Sin embargo, para que estos modelos funcionen correctamente los datos de los que se nutren deben ser lo más ajustados posibles, lo cual en muchos casos es difícil, si no imposible, y sus resultados deben ser evaluados ex post, hecho que suelen obviar muchos algoritmos. Por ello, un buen modelo debe incorporar la posible incertidumbre de los datos y un análisis de postoptimización que sirva como criterio de validación.

La incertidumbre afecta a un amplio rango de decisiones que gerentes, directivos y otros responsables de una empresa deben tomar. Esta incertidumbre no es una desviación temporal de planes a largo plazo sino una característica estructural básica del entorno económico y tecnológico. Una forma de enfrentarse a un problema incierto es asignar probabilidades subjetivas y, entonces, usar optimización estocástica para resolver el modelo. Sin embargo, algunos acontecimientos futuros son genuinamente desconocidos, incluso en un sentido probabilístico. También es posible convertirlo en un problema cierto, por ejemplo, utilizando los datos esperados más probables y entonces resolverlo mediante optimización determinista. Pero la mejor forma de manejar la incertidumbre es aceptarla, hacer un gran esfuerzo para estructurarla y entenderla y, finalmente, hacerla formar parte del razonamiento de la toma de decisión. Esto es particularmente importante cuando el resultado depende de una decisión simultánea o posterior de un competidor o de acontecimientos externos futuros de clase no repetitiva para los cuales la estimación de probabilidades es un ejercicio dudoso puesto que en la literatura existen amplias evidencias de que cuando los datos del problema son inciertos ni la optimización estocástica ni la optimización determinista representan adecuadamente los objetivos del gestor.

Por otra parte, un modelo matemático es necesariamente una simplificación del problema real en el sentido de que no todos los datos a disposición del decisor se utilizan en aquél. Pero las decisiones que se toman basadas en información incierta son a menudo evaluadas ex post como si los datos reales hubiesen sido conocidos con antelación y todos ellos hubiesen sido utilizados en el modelo. En estas situaciones, un gestor está interesado en la comparación del comportamiento del sistema real debido a la decisión tomada con el sistema óptimo que se hubiese alcanzado si se hubiera dispuesto de información perfecta a priori.

En síntesis, el gestor de organizaciones actuales es, en muchos casos, averso al riesgo, evalúa ex post y muchas de las decisiones con las que se enfrenta tienen una naturaleza única (no repetible). Los problemas de localización, en general, y el de la p-mediana, en particular, del que nos ocuparemos en este trabajo, responden al esquema anterior puesto que:

- Las decisiones de localización de centros de servicio están casi siempre afectadas por la incertidumbre. Por ejemplo, la demanda que los centros de servicio deberán atender en la región considerada suele ser desconocida y es estimada mediante técnicas estadísticas basadas en estudios de mercado; la distancia entre los centros de servicio y los puntos demanda no siempre representa una distancia física sino que, en muchas ocasiones, es el tiempo, cuyo valor debe ser necesariamente aproximado, etc.

- Muchos problemas de localización se modelizan con un único objetivo. Así, en la versión estándar del problema de la p-mediana sólo se consideran los costes de transporte, pero el decisor no sólo dispone normalmente de más información, sino que está interesado por el comportamiento de otras funciones como la función de beneficios.
- Aunque es posible considerar problemas de relocalización, esto es, donde la ubicación de un centro de servicio pueda ser cambiada en un futuro, los altos costes de esta política hace que en la práctica sea, la mayoría de las veces, inaceptable.

En este trabajo veremos como tratar la incertidumbre, incorporando al mismo tiempo información adicional, mediante técnicas borrosas. Mediante la modificación de un algoritmo de enumeración, podremos estudiar violaciones arbitrarias de algunas restricciones deterministas referidas a la demanda, lo que nos proporcionará información útil para realizar un análisis de postoptimalidad en el cual podremos contrastar la evolución de los costes con otros datos como los beneficios. Estas técnicas también nos permitirán encontrar, si las hubiesen, ciertas patologías del modelo y, por tanto, elaborar algunos criterios borrosos de validación para modelos de la p-mediana

EL PROBLEMA DE LA P-MEDIANA

Uno de los primeros problemas de localización que aparecen en la literatura es el problema de la p-mediana. Brevemente, en este problema se trata de localizar p centros de servicio para cubrir unas demandas conocidas de modo que se minimice el coste total de transporte, bajo la hipótesis de que dicho coste es directamente proporcional a las distancias que deben ser recorridas y a la cantidad de producto transportada [Hakimi y Maheshwari (1972), Handler y Mirchandani (1979), Canós, Ivorra y Liern (1998)]. El problema de la p-mediana puede ser modelizado como el siguiente programa binario mixto:

$$\textbf{Min} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} d_{ij}$$

$$\textbf{sujeto a} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = w_j \quad 1 \le j \le n \qquad \textbf{(1)}$$

$$0 \le x_{ij} \le w_j y_i \quad 1 \le i, j \le n \qquad \textbf{(2)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = p \qquad \textbf{(3)}$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad 1 \le i \le n \qquad \textbf{(4)}$$

Las restricciones (1) aseguran que toda la demanda del vértice ***i*** será cubierta, las restricciones (2) garantizan que sólo los vértices con un centro de servicio atenderán la demanda y la restricción (3) establece que deben localizarse ***p*** centros de servicio.

Es fácil demostrar que, en una solución óptima, todos los centros de servicio pueden estar localizados en un vértice de la red y que la demanda de cada vértice será cubierta por su centro de servicio más cercano. [Labbé y otros (1995), Wendell y Hurter (1973)].

Como se observa en las restricciones (1), el problema de la p-mediana determinista exige que toda la demanda sea cubierta. Sin embargo, en Canós, Ivorra, Liern (1999) consideramos una formulación borrosa que combina una minimización estándar de los costes de transporte con una reducción aceptable de la demanda cubierta. El problema de la p-mediana borrosa se puede plantear entonces como

$$\textbf{Encontrar} \left(x_{ij}, y_j\right)$$

$$\textbf{sujeto a} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} d_{ij} \lesssim z^* \qquad \textbf{(5)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le w_j \quad 1 \le j \le n \qquad \textbf{(6)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \gtrsim \sum_{j=1}^{n} w_j \qquad \textbf{(7)}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq w_j y_i \quad 1 \leq i, j \leq n \qquad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = p \qquad (9)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad 1 \leq i \leq n \qquad (10)$$

La restricción (5) indica que el óptimo borroso ha de mejorar en cierto grado al óptimo determinista. Las restricciones (1) quedan relajadas a las restricciones (6) con las que permitimos que una parte de la demanda sea no atendida y la restricción (7) exige que la solución sea parcialmente factible.

Este modelo permite al decisor tener en cuenta soluciones parcialmente factibles, es decir, soluciones que con una pequeña violación de las restricciones deterministas den lugar a costes significativamente más bajos. Según esta filosofía, cualquier algoritmo que trate de resolver la p-mediana borrosa considerará pequeñas modificaciones de la demanda total $w=\sum_j w_j$ y el coste de transporte óptimo z^* asociado. Así es como actúa el algoritmo de enumeración presentado en Canós, Ivorra, Liern (1999). Sin embargo, este mismo algoritmo puede ser modificado para resolver la p-mediana borrosa en un sentido global, es decir, para estudiar el comportamiento del coste óptimo cuando las violaciones de algunas restricciones son arbitrarias.

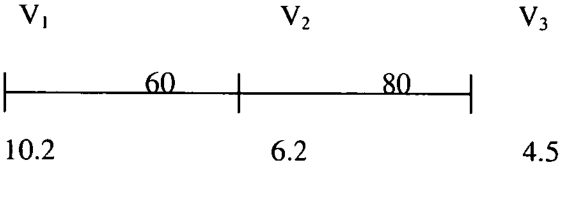
MODIFICACIÓN DEL ALGORITMO

En el algoritmo mencionado, enumeramos todos los cubrimientos $A_1,\ldots,A_k$, es decir, todos los subconjuntos de p elementos del conjunto de vértices $\{v_1,\ldots,v_n\}$ y, para un A_i fijo, definimos la función $R_i(x)$ como la poligonal convexa que representa el mejor coste de transporte que puede obtenerse con la localización A_i al reducir en x unidades la demanda cubierta. A continuación se calcula un grado de satisfacción λ_i para cada R_i y se elige la localización con mayor grado de satisfacción. Este λ_i depende sólo del comportamiento de R_i cerca de x=0. Consideremos ahora la información contenida en todas las funciones R_i completas. Para ello, calculamos la función $R(x)$ definida como el mínimo de todas las R_i para cada punto x. En la práctica, no es necesario construir todas las R_i, sino que es suficiente comparar cada segmento que debe ser añadido con el mínimo parcial de las localizaciones ya estudiadas y almacenar la localización A_i donde se alcanza el mínimo $R(x)$ en el punto x, lo que proporciona un coste computacional sensiblemente inferior.

Al calcular la función $R(x)$ podemos extender nuestro análisis hasta que la demanda que debe ser cubierta se reduzca a cero y, de este modo, obtener información que el decisor puede comparar con elementos externos al problema. Veamos un simple pero ilustrativo ejemplo.

Consideremos la red dada en la figura 1, donde 10.2, 6.2, 4.5 son las demandas y 60, 80 son las distancias, que representan los costes de transporte unitarios medidos, por ejemplo, en euros.

FIGURA 1



Queremos localizar un centro de servicio que atienda la demanda con un coste mínimo, es decir, queremos encontrar una 1-mediana para esta red. Es evidente que la localización óptima determinista es el vértice v_2 con un coste de transporte de 972 euros. Si aplicamos el algoritmo borroso mencionado anteriormente para niveles de tolerancia razonables llegamos a la misma localización.

Investiguemos ahora el efecto de reducir la demanda hasta cero utilizando la función R que es, por definición, el mínimo de las funciones R_i que muestran el coste óptimo para cada localización y están representadas en la figura 2. Consideremos ahora un elemento externo: supongamos que los beneficios brutos por unidad transportada son 100 euros. La distancia entre la función de beneficio bruto y la función R, que aparecen en la figura 3, es el beneficio neto para una reducción de demanda de x unidades.

FIGURA 2

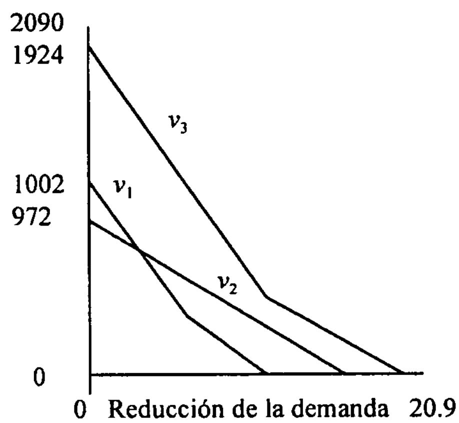
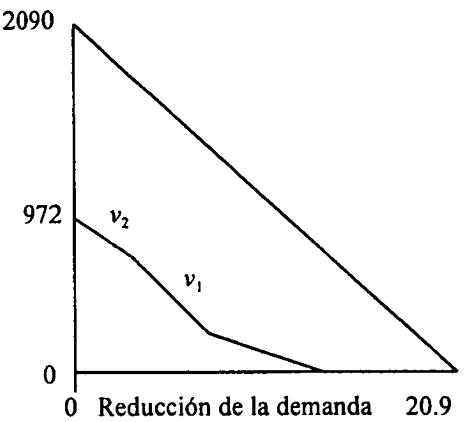


FIGURA 3



Se puede ver fácilmente que el beneficio neto es máximo para x=4.5 que corresponde a dejar de cubrir la demanda del vértice v_3 y el coste mínimo se alcanza para la localización $\underline{v_1}$. Como se puede observar en la tabla 1, donde se comparan la solución determinista y la alcanzada con este análisis, el beneficio neto es 150 euros mayor.

TABLA 1: RESUMEN DE LOS RESULTADOS

DEMANDA	COSTE	BENEFICIO BRUTO	BENEFICIO NETO
DEMANDA TOTALMENTE CUBIERTA	972	2090	1118
V_3 NO CUBIERTO	372	1640	1268
DIFERENCIA	-600	-450	+150

A la vista de estos resultados, es evidente que localizar el centro de servicio en v_1 y no cubrir la demanda de v_3 es mejor que intentar cubrir toda la demanda, pero cualquier algoritmo, determinista o borroso con niveles de tolerancia razonables, descartará esta posibilidad debido al excesivo coste de transporte entre v_1 y v_3. Podemos decir que este camino no es, en ningún caso, rentable y siempre produce una pérdida, incluso en soluciones donde no se materializa. Esto es lo que llamamos una pérdida virtual. Las pérdidas virtuales no son detectadas por los algoritmos al uso e indican la presencia de una patología en el modelo o incluso en el problema mismo. Por ejemplo, en el caso anterior debería considerar si es posible reducir los costes de transporte, incrementar los precios al menos en v_3, localizar dos centros de servicio ... y entonces reformular el problema. Por tanto, el análisis global de la solución nos proporciona un test de validación para el modelo.

ALGUNOS CRITERIOS DE VALIDACIÓN

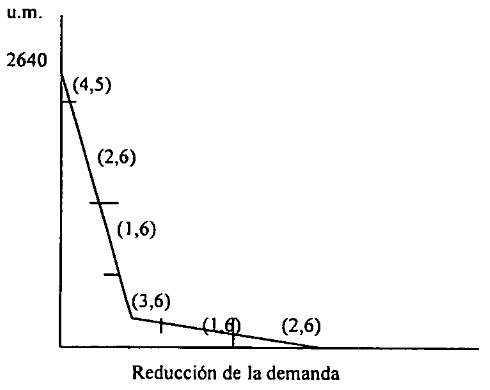
La función valor óptimo R contiene información sobre el problema de localización que, como hemos visto, puede ser usada por el decisor para comprobar el modelo bien examinando simplemente la función, bien comparándola con datos adicionales. Naturalmente, aunque en el ejemplo anterior la hemos comparado con la función de beneficios brutos,. podemos comparar R con cualquier función, no necesariamente lineal. De hecho, podemos compararla con información externa al modelo en forma de datos borrosos. Vamos a ver ahora varias formas de utilizar la función R para probar un modelo.[1]

En algunos casos, la gráfica de R puede mostrar directamente pérdidas virtuales sin necesidad de un mayor análisis. Consideremos, por ejemplo, el problema de 2-mediana sobre la red con seis vértices determinada por la matriz de distancias D y el vector de demandas w.

[1] Todos los cálculos computacionales necesarios para los siguientes ejemplos han sido programados en lenguaje PASCAL.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 403 & 7 & 207 \\ 3 & 0 & 5 & 400 & 8 & 208 \\ 4 & 5 & 0 & 405 & 3 & 203 \\ 403 & 400 & 405 & 0 & 408 & 608 \\ 7 & 8 & 3 & 408 & 0 & 200 \\ 207 & 208 & 203 & 608 & 200 & 0 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 4 \\ 6.5 \\ 9 \\ 12.5 \end{pmatrix}$$

FIGURA 4



La solución determinista óptima es (4,5) mientras que la solución borrosa óptima, para un grado de satisfacción del 72.4%, es (2,6). Observando la función R para este problema, representada en la figura 4, se comprueba fácilmente que las soluciones anteriores, calculadas analíticamente, son correctas puesto que (4,5) es la localización que proporciona el mínimo coste sin reducción de demanda, pero una pequeña reducción nos conduce a la localización (2,6). Esto es consecuencia del rápido decrecimiento de R cerca de x=0 que hace que una pequeña reducción de la demanda cubierta cause una gran reducción de los costes. Sin embargo, la gráfica muestra que este rápido decrecimiento de R continúa hasta x=6.5, en el cual R(6.5)=104, y que corresponde a la localización (3,6). Es fácil ver que esta solución se alcanza cuando no se cubre la demanda del vértice v_4. Con estos datos, y aunque no podremos asegurarlo sin más información, es natural pensar que el modelo contiene una pérdida virtual debida a la gran distancia existente entre el vértice v_4 y los otros vértices. De hecho, ocurre para casi todas las funciones de beneficios razonables y, en particular, siempre que sean lineales.

Del ejemplo anterior, podemos deducir que cuando el descenso de los costes sea muy rápido, el modelo tendrá, casi con seguridad, pérdidas virtuales que indicarán la presencia de una patología. Sin embargo, en la mayoría de los casos este descenso no será tan notable y la existencia de pérdidas virtuales será dudosa. Pero el decisor tiene datos externos que puede considerar como experiencia previa, datos de los competidores, etc a partir de los cuales puede estimar la función de beneficios brutos. Sin embargo, una estimación determinista de estos beneficios potenciales, como la que hemos utilizado en el primer ejemplo para ilustrar el concepto de pérdida virtual, es bastante poco realista debido a la incertidumbre del entorno. Proponemos ahora un método para manejar esta incertidumbre de los datos mediante técnicas borrosas.

Para cada posible reducción x de la demanda representamos el beneficio estimado mediante un intervalo de tolerancia $[a(x),b(x)]$. Podemos suponer que $a(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas de x, de manera que determinan una región del plano que llamaremos banda de beneficio bruto. Definimos

$$P_\lambda(x) = (1-\lambda)a(x) + \lambda b(x),\ \lambda \in [0,1]$$

λ puede interpretarse como el nivel de optimismo sobre los posibles beneficios para cada demanda cubierta.

Definimos ahora ratio medio de decrecimiento del coste como la función

$$S^c(x) = \frac{R(x) - R(0)}{x}, x > 0$$

Análogamente, llamamos ratio medio de decrecimiento de los beneficios para cada nivel λ a la función

$$S_{\lambda}^{p}(x) = \frac{P_{\lambda}(x) - P_{\lambda}(0)}{x}, x > 0$$

Si tuviesemos una estimación determinista de los beneficios brutos, *P(x)*, tendríamos una única función $S^p(x)$. Entonces, la desigualdad $S^p(x) > S^c(x)$ para algún valor de x significaría que la variación del beneficio neto cuando la demanda se redujese x unidades, es decir, $(S^p(x) - S^c(x))x$, sería positiva. Luego nuestro modelo tendría una pérdida virtual. Por el contrario, si $S^p(x) \leq S^c(x)$ para cualquier x, el modelo no tendría pérdidas virtuales. En términos conjuntistas, esta última condición puede escribirse como $S^c(x) \in [S^p(x), +\infty[$ para todo x.

Sin embargo, nosotros consideramos una estimación borrosa de los beneficios, lo cual implica que el intervalo $[S^p(x), +\infty[$ tiene un extremo incierto.

Puesto que $S_{\lambda}^{p}(x) = (1-\lambda)S_0^p(x) + \lambda S_1^p(x)$, tenemos que el extremo $S_{\lambda}^{p}(x)$ puede oscilar entre

$$m(x) = min\{S_0^p(x), S_1^p(x)\} \text{ y } M(x) = Max\{S_0^p(x), S_1^p(x)\}.$$

Luego el conjunto borroso correspondiente al intervalo $[S^p(x), +\infty[$ es el que tiene como función de pertenencia

$$\mu_x(y) = \begin{cases} 1 & si \quad y > M(x) \\ \dfrac{y - m(x)}{M(x) - m(x)} & si \quad m(x) \leq y \leq M(x) \\ 0 & si \quad y < m(x) \end{cases}$$

Razonando como anteriormente, es obvio que si $\mu_x(S^c(x)) = 0$ para algún valor de x, reducir la demanda cubierta en x unidades implica un aumento del beneficio neto y, por tanto, la presencia de una pérdida virtual. Por otra parte, si $\mu_x(S^c(x)) = 1$ para todo x, entonces el beneficio neto siempre decrece cuando se reduce la demanda cubierta y el modelo no puede ser descartado.

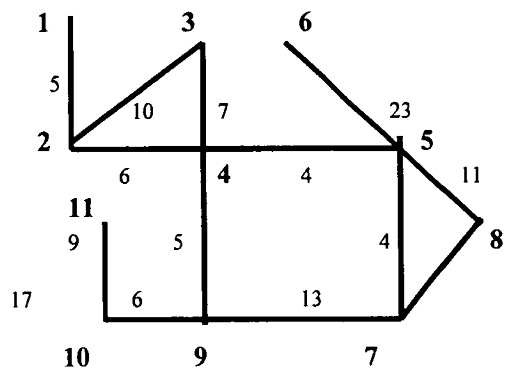
De acuerdo con la notación previa, llamamos grado de validación del modelo borroso de la p-mediana con respecto auna estimación dada de los beneficios al número real

$$\alpha = \min_x \mu_x(S^c(x)) \in [0,1].$$

Podemos considerar α como el valor de verdad de la sentencia "no hay pérdidas virtuales en el modelo". Veamos un ejemplo que ilustra los conceptos explicados anteriormente.

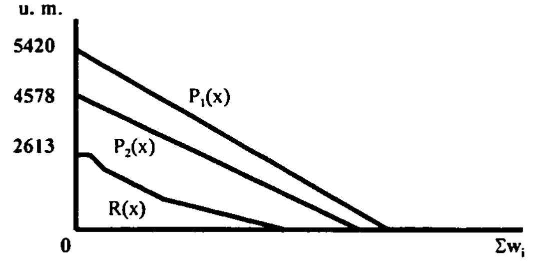
Consideremos un problema de 3-mediana sobre la red representada en la figura 5 y cuyas demandas son $w_1=10$, $w_2=28$, $w_3=49$, $w_4=16$, $w_5=18$, $w_6=40$, $w_7=90$, $w_8=70$, $w_9=10$, $w_{10}=50$, $w_{11}=40$.

FIGURA 5



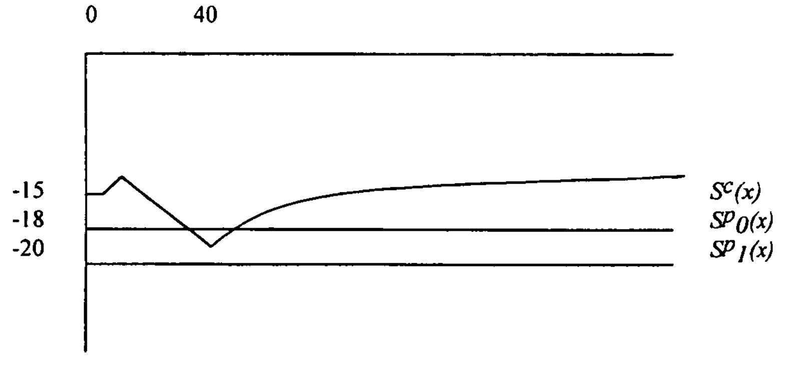
La localización determinista óptima es (v_5, v_6, v_{10}). Supongamos que los beneficios para cada reducción de demanda x oscilan entre $P_0(x) = -18x + 4578$ y $P_1(x) = -20x + 5420$.
La figura 6 muestra la banda de beneficio bruto y la función *R(x)*.

FIGURA 6



En este caso no es evidente si existen o no pérdidas virtuales, pero puede determinarse mirando la figura 7 donde están representadas S^c y S^p. Vemos que la función S^c permanece dentro del intervalo $[S^p,+\infty[$ para todos los valores de x excepto un pequeño intervalo, donde la pertenencia de S^c al intervalo es incierta. En concreto, el mínimo grado de pertenencia se alcanza en x=40, donde α=0.125. Luego el valor de verdad de la existencia de pérdidas virtuales es 87.5%

FIGURA 7



La localización óptima para x=40 es (v_4,v_8,v_{10}) que deja sin cubrir la demanda del vértice v_6. El decisor debería examinar esta opción, porque podría obtener con ella mayores beneficios netos, y determinar la causa de su existencia.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado varias herramientas que el decisor puede usar para probar un modelo de acuerdo con su propio criterio. Con ellas puede incorporar información que el modelo no recoge previamente y calcular valores que le permitirán modificar el modelo, si es necesario, e incluso replantearse el problema real inicial, si lo considera más ventajoso para la empresa.

Estos métodos pueden ser aplicados también cuando los datos son deterministas, aunque creemos que la borrosidad de una estimación es esencial, puesto que la incertidumbre es inherente al entorno económico en el que se plantean la mayoría de los problemas. Una estimàción de un valor futuro, bajo estas condiciones, resultaría, como poco, artificial, además de restringir notablemente la libertad del decisor. En la práctica, parece razonable que el decisor elija un número finito de estimaciones en forma de intervalos de tolerancia, esto es, números borrosos, y construya las funciones P_0 y P_1 por interpolación.

Por último, nos gustaría señalar que las técnicas borrosas no han sido frecuentemente usadas hasta ahora en la validación de modelos y por tanto pensamos que las ideas expuestas en este trabajo pueden ser ampliamente desarrolladas, no sólo para problemas de localización, que nosotros hemos elegido a guisa de ejemplo, sino para cualquier problema de decisión que pueda surgir en el entorno de la empresa.

BIBLIOGRAFÍA

CANÓS, M.J., IVORRA, C. ; LIERN, V. (1998) *LOCALIZACIÓN DE CENTROS DE SERVICIO EN UNA EMPRESA MEDIANTE TÉCNICAS DE GESTIÓN BORROSAS*, ACTAS DEL XIV CONGRESO NACIONAL Y VIII CONGRESO HISPANO-FRANCÉS DE AEDEM (PUBLICADO EN SEPARATA), BENALMÁDENA, MÁLAGA.

CANÓS, M.J., IVORRA, C. ; LIERN, V. (1999) *AN EXACT ALGORITHM FOR THE FUZZY P-MEDIAN PROBLEM*, EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONAL RESEARCH, EN PRENSA.

LAI, Y.J. AND HWANG, C.L.(1992) *FUZZY MATHEMATICAL PROGRAMMING: METHODS AND APPLICATIONS*, SPRINGER-VERLAG, BERLIN.

HAKIMI, S.L. ; MAHESHWARI, S.N. (1972) *OPTIMUM LOCATIONS OF CENTERS IN NETWORKS*, OPERATIONS RESEARCH, 20 967-973.

HANDLER, G.Y. ; MIRCHANDANI, P.B. (1979) *LOCATION ON NETWORKS, THEORY AND APPLICATIONS*, MIT PRESS, CAMBRIDGE.

LABBÉ, M., PEETERS, D; THISSE, J.F. (1995) *HANDBOOKS IN OR & MS*, ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS, AMSTERDAM.

WENDELL, R.E., HURTER, A.P. (1973) *LOCATION THEORY, DOMINANCE AND CONVEXITY*, OPERATIONS RESEARCH, 21, 314-320.

ZIMMERMANN, H.J. (1997) *FUZZY MATHEMATICAL PROGRAMMING*, IN T. GAL, H.J. GREENBERG (EDS.), IN ADVANCES IN SENSITIVITY ANALYSIS AND PARAMETRIC PROGRAMMING, KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, BOSTON.