Ibarguen, E.et al. 2016. Un modelo multiparche para la transmisión de la malaria. Revista Sigma, 10 (1). Pág. 1-16 http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulosXII/1.pdf

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen X N° 1 (2016), páginas 1–16

Un modelo multiparche para la transmisión de la malaria

Eduardo Ibarguen-Mondragon[1]
Johana Patricia Romero Leiton [2]
Jessica Marcela Montoya[3]
Sandra Patricia Hidalgo Bonilla[4]

Abstract.
In this paper is formulated and analyzed a multipatch model for malaria epidemiology considering vertical transmission and percapita growth of susceptible individuals. The results suggest a very different dynamic to the classical models which has forward or backward bifurcations.

Keywords. Research in Mathematics, Biomathematics, GIBIMMA.

Resumen.
En este trabajo se formula y analiza un modelo multiparche para epidemiología de la malaria que considera transmisión vertical y crecimiento percápita de los individuos susceptibles. Los resultados sugieren uns dinamica muy diferente a los modelos clásicos los cuales presentan bifurcaciones hacia adelante o hacia atrás.

Palabras Clave. Investigación en matemáticas, biomatemáticas, GIBIMMA

1. Introducción

El primer modelo matemático para la transmisión de la malaria fue propuesto por Sir Ronald Ross en 1902 [?], quien fue galardonado con el premio Nobel en medicina por descubrir que esta enfermedad se transmite a través de la picadura de la hembra del mosquito Anopheles. Con su modelo Ross mostró a sus colegas que para erradicar la malaria no es necesario eliminar a la población de mosquitos, sino que es suficiente mantener su nivel poblacional por debajo de un umbral. En 1927, Kermack y McKendrick [?] formulan un modelo de ecuaciones integrodiferenciales con retardo que modela el flujo de individuos susceptibles,

[1]Corresponding author: Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño, C. U. Torobajo, Clle 18 - Cra 50, PBX 27311449, Pasto, Colombia.e-mail: edbargun@udenar.edu.co.
[2] U. de Antioquia, Instituto de Matemáticas, Medellín, Colombia.
[3] Universidad del Quíndio, Dpto. de Matemáticas, Armenia, Colombia.
[4]Yachay Tech, School of Chemestry, Yachay City of Knowledge 1000119-Urcuqui, Ecuador.

infectados y recuperados en un proceso epidémico. Usando una versión simplificada de este modelo obtienen el llamado *Teorema del Umbral*, piedra angular de la Epidemiología Matemática. Este resultado establece condiciones sobre las tasas de infección y recuperación, así como el número inicial de susceptibles para que la introducción de un individuo infeccioso en una comunidad de lugar a un brote epidémico. En 1957, MacDonald [?] modificó el modelo de Kermack y McKendrick a un modelo de dos dimensiones con una variable para representar la población de humanos y otra para representar los mosquitos. Una importante extensión de este modelo fue propuesta por Dietz, Molineaux y Thomas (1990) [?], quienes agregaron la inclusión de la inmunidad. Ngwa y Shu (2000) [?], propusieron un modelo en ecuaciones diferenciales ordinarias en el cual incluyeron cuatro diferentes estados para los humanos (susceptible-expuesto-infectado- recuperado) y tres diferentes estados para los mosquitos (susceptible-expuesto-infectado), donde estos estados interactúan a tasas diferentes. El modelo de Ngwa y Shu fue después estudiado y mejorado por Chitnis (2005, 2006, 2008) [?, ?, ?]. Otro aspecto determinante en la dinámica de la trnsmisión de la malaria es la movilidad de la población. En este sentido, existen modelos con fragmentación espacial del ambiente [?, ?], modelos en los cuales se supone que los humanos infectados poseen una movilidad inferior que los humanos susceptibles [?], y también modelos para la distribución espacial de la malaria [?]. Modelos multiparche construidos para estudiar la propagación espacial de las enfermedades infecciosas cuando hay viaje de poblaciones de una región a otra [?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?, ?]. Por lo general, todos estos modelos presentan una dinamica similar en la cual se presentan bifurcaciones hacia adelante o bifircaciones hacia atrás. En ambos casos siempre existe un equilirio libre de infección en el cual coexisten humanos infectados con mosquitos infectados, y dependiendo de ciertas condiciones definidas a través del número reproductivo básico de la infección pueden aparecer uno o dos equilibrios endémicos en los cuales coexisten todas las poblaciones. En este trabajo nosotros exploramos una modificación del modelo multiparche formulado en [?] en la cual se cambia la hipótesis de crecimiento de la población de humanos suceptibles y se contempla la transmisión vertical de la infección.
Aunque las nuevas hipótesis son muy coherentes y tratan de modelar posibles dinámicas que se presentan en municipios como San Andres de Tumaco Nariño (Colombia), los resultados del modelo son totalmente diferentes a los ya conocidos en toros modelos. Por tal razón solo presentaremos el analisis de existencia de las soluciones y la inestabilidad del equilibrio trivial nulo que en este caso no siempre existe y cuando existe es inestable.

2. Formulación del modelo

Para un solo parche, el modelo para la población humana es de tipo SEIR (Susceptible-Expuesto (infectados pero no infecciosos)-Infectado-Recuperado) y SI (Susceptible-infectado) para la población de mosquitos. S_i^h, E_i^h, I_i^h y R_i^h denotan, respectivamente, el número de humanos susceptibles, expuestos, infectados y recuperados en el parche i en el tiempo t. La población total de humanos N_i^h en el parche i en el tiempo t es $N_i^h = S_i^h + E_i^h + I_i^h + R_i^h$. Similarmente, $N_i^v = S_i^v + I_i^v$ representa la población total de mosquitos en el parche i en el tiempo t. En el modelo se considera transmisión de la infección por contacto entre humanos y vectores, así como también transmisión vertical (de madre infectada a hijo), además la tasa de mortalidad natural de humanos es denotada como μ_i^h y de mosquitos como μ_i^v. Definimos la fuerza de la infección para los humanos como

$$\lambda_i^H = \frac{\lambda_i^{hv} \epsilon_i \phi_i I_i^v}{N_i^h}, \tag{2.1}$$

donde λ_i^{hv} representa la probabilidad de infección de un humano por picadura de un mosquito infectado, ϵ_i representa la tasa de picadura percápita de mosquitos y ϕ_i representa la tasa de contacto entre humanos y mosquitos en el parche i; análogamente se define la fuerza de la infección en mosquitos como

$$\lambda_i^V = \frac{\lambda_i^{vh}\epsilon_i\phi_i I_i^h}{N_i^v} \tag{2.2}$$

donde λ_{vh} representa la probabilidad de infección del mosquito por contacto con humanos infectados.

Las hipótesis adicionales del modelo SEIR son especificadas a continuación: la población de humanos susceptibles nace a una tasa percápita $\gamma_i^h S_i^h$, se ve disminuida por mortalidad natural representada mediante el término $\mu_i^h S_i^h$ y por infección debida al contacto con los mosquitos mediante el término $\lambda_i^H S_i^h$. La tasa de progresión de humanos expuestos a infectados es representada mediante el parámetro ε_i^h, el cual representa el periodo de encubación de la enfermedad. La población de humanos infectados se ve aumentada por nacimiento de humanos infectados representada mediante el término $\nu_i^h I_i^h$, donde ν_i^h representa la tasa de nacimiento de individuos infectados debido a la transmisión madre infectada-hijo en los humanos (transmisión vertical), se ve disminuida por muerte debido a la infección representada por el término α_i^h y por muerte natural dada por el termino μ_i^h. La tasa de recuperación espontánea es representada por el término δ_i^h, mientras que la cantidad de humanos recuperados de la infección que pasan a ser susceptibles nuevamente es representada mediante el término $\omega_i R_H$.

Finalmente, $\varphi_{ji}^L \geq 0$, $L = S, E, I, R$, representa la tasa de migración del parche j al parche i de humanos susceptibles, expuestos, infectados y recuperados, respectivamente y $\varphi_{ij}^L \geq 0$, $L = S, E, I, R$, representa la tasa de migración desde el parche i al parche j.

Para e modelo SI se tienen las siguientes hipótesis: La población de mosquitos susceptibles se ve aumentada por nacimiento dada por el término $\gamma_i^v S_i^v$, se ve disminuida por infección debido al contacto con humanos infectados mediante el término $\lambda_i^V S_i^v$, por muerte debido al uso de aerosoles mediante el término $k_i u_i S_i^v$, donde u_i es el control constante por el uso de aerosoles, $u_i \in [0,1]$ y por muerte natural mediante el término $\mu_i^v S_i^v$.

Con las anteriores consideraciones se formula el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned}
\frac{dS_i^h}{dt} &= \gamma_i^h S_i^h + \omega_i^h R_i^h - (\lambda_i^H + \mu_i^h) S_i^h + \varphi_{ji}^S S_j^h - \varphi_{ij}^S S_i^h \\
\frac{dE_i^h}{dt} &= \lambda_i^H S_i^h - (\varepsilon_i^h + \mu_i^h) E_i^h + \varphi_{ji}^E E_j^h - \varphi_{1j}^E E_i^h \\
\frac{dI_i^h}{dt} &= \varepsilon_i^h E_i^h + \nu_i^h I_i^h - (\alpha_i^h + \mu_i^h + \delta_i^h) I_i^h + \varphi_{ji}^I I_j^h - \varphi_{ij}^I I_i^h \\
\frac{dR_i^h}{dt} &= \delta_i^h I_i^h - (\omega_i^h + \mu_i^h) R_i^h + \varphi_{ji}^R R_j^h - \varphi_{ij}^R R_i^h \\
\frac{dS_i^v}{dt} &= \gamma_i^v S_i^v - (\lambda_i^V + \mu_i^v + k_i u_i) S_i^v \\
\frac{dI_i^v}{dt} &= \lambda_i^V S_i^v - (\mu_i^v + k_i u_i) I_i^v, \quad \text{para} \quad i, j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

3. Soluciones de equilibrio

En esta sección presentaremos los resultados de existencia de soluciones de equilibrios en términos de los parámetros

$$
\begin{aligned}
U_1^V &= \frac{\gamma_1^v}{\mu_1^v + k_1 u_1},\ U_2^V = \frac{\gamma_2^v}{\mu_2^v + k_2 u_2},\ U_1^S = \frac{\gamma_1^h}{\mu_1^h + \varphi_{12}^S},\ U_2^S = \frac{\gamma_2^h}{\mu_2^h + \varphi_{21}^S} \\
U_1^I &= \frac{\nu_1^h}{\alpha_1^h + \mu_1^h + \delta_1^h + \varphi_{12}^I},\ U_2^I = \frac{\nu_2^h}{\alpha_2^h + \mu_2^h + \delta_2^h + \varphi_{21}^I},
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

y los parámetros

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \frac{(\varepsilon_1^h + \mu_1^h + \varphi_{12}^E)(\varepsilon_2^h + \mu_2^h + \varphi_{21}^E)}{\varphi_{12}^E \varphi_{21}^E} \\
&= \left(\frac{\varepsilon_1^h + \mu_1^h}{\varphi_{12}^E} + 1\right)\left(\frac{\varepsilon_2^h + \mu_2^h}{\varphi_{21}^E} + 1\right) \\
\Gamma_2 &= \frac{\nu_2^h}{\varphi_{12}^I}\left(\frac{1}{U_2^I} - 1\right)\frac{\nu_1^h}{\varphi_{21}^I}\left(\frac{1}{U_1^I} - 1\right) \\
\Gamma_3 &= \frac{(\omega_1^h + \mu_1^h + \varphi_{12}^R)(\omega_2^h + \mu_2^h + \varphi_{21}^R)}{\varphi_{12}^R \varphi_{21}^R} \\
\Gamma_4 &= \frac{\gamma_2^h}{\varphi_{12}^S}\left(\frac{1}{U_2^S} - 1\right)\frac{\gamma_1^h}{\varphi_{21}^S}\left(\frac{1}{U_1^S} - 1\right).
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Las soluciones de equilibrio están dadas por las soluciones del siguiente sistema algebraico

$$
\begin{aligned}
\gamma_i^h S_i^h + \omega_i^h R_i^h - (\lambda_i^H + \mu_i^h) S_i^h + \varphi_{ji}^S S_j^h - \varphi_{ij}^S S_i^h &= 0 \\
\lambda_i^H S_i^h - (\varepsilon_i^h + \mu_i^h) E_i^h + \varphi_{ji}^E E_j^h - \varphi_{ij}^E E_i^h &= 0 \\
\varepsilon_i^h E_i^h + \nu_i^h I_i^h - (\alpha_i^h + \mu_i^h + \delta_i^h) I_i^h + \varphi_{ji}^I I_j^h - \varphi_{ij}^I I_i^h &= 0 \\
\delta_i^h I_i^h - (\omega_i^h + \mu_i^h) R_i^h + \varphi_{ji}^R R_j^h - \varphi_{ij}^R R_i^h &= 0 \\
\gamma_i^v S_i^v - (\lambda_i^V + \mu_i^v + k_i u_i) S_i^v &= 0 \\
\lambda_i^V S_i^v - (\mu_i^v + k_i u_i) I_i^v &= 0, \quad \text{para} \quad i, j = 1, 2.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

En términos de los parámetros definidos en (**??**) y (**??**) el sistema (**??**) se reescibe como

$$
\begin{aligned}
\gamma_i^h \left(1 - \frac{1}{U_i^S}\right) S_i^h + \omega_i^h R_i^h - \lambda_i^H S_i^h + \varphi_{ji}^S S_j^h &= 0 \\
\lambda_i^H S_i^h - (\varepsilon_i^h + \mu_i^h + \varphi_{ij}^E) E_i^h + \varphi_{ji}^E E_j^h &= 0 \\
\varepsilon_i^h E_i^h + \nu_i^h \left(1 - \frac{1}{U_i^I}\right) I_i^h + \varphi_{ji}^I I_{2j}^h &= 0 \\
\delta_i^h I_i^h - (\omega_i^h + \mu_i^h + \varphi_{ij}^R) R_i^h + \varphi_{ji}^R R_j^h &= 0 \\
\gamma_i^v \left(1 - \frac{1}{U_i^V}\right) S_i^v - \lambda_i^V S_i^v &= 0 \\
\lambda_i^V S_i^v - (\mu_i^v + k_i u_i) I_i^v &= 0, \quad \text{para} \quad i, j = 1, 2.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

A partir de la sexta ecuación de (**??**) se tiene

$$
\begin{aligned}
\left[\gamma_1^v \left(1 - \frac{1}{U_1^v}\right) - \lambda_1^V\right] S_1^v &= 0 \\
\left[\gamma_2^v \left(1 - \frac{1}{U_2^v}\right) - \lambda_2^V\right] S_2^v &= 0,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

donde U_1^V y U_2^V están definidos en (**??**). Observe que el sistema (**??**) presenta las siguientes cuatro opciones para las soluciones:

1. $S_1^v = 0$ y $S_2^v = 0$.
2. $S_1^v = 0$ y $S_2^v \neq 0$.
3. $S_1^v \neq 0$ y $S_2^v = 0$
4. $S_1^v \neq 0$ y $S_2^v \neq 0$

Iniciemos analizando el primer caso.

3.1. Existencia de soluciones de equilibrio cuando $S_1^v = 0$ y $S_2^v = 0$.

En esta subsección se probará la existencia o la posible existencia de un estados estacionario trivial bajo ciertas condiones. En la siguiente proposición se demuestra la existencia del equilibrio trivial *nulo*; es decir, el equilibrio cuyos componentes son cero.

Proposition 3.1. *Si $U_1^S \geq 1$ o $U_2^S \geq 1$, entonces existe el equilibrio trivial P_0 con todos sus componentes cero.*

Demostración. En este caso, a partir de la sexta de (**??**) se verifica que

$$I_1^v = I_2^v = 0. \tag{3.6}$$

Dado que $\lambda_i^H = \dfrac{\lambda_i^{hv}\epsilon_i\phi_i I_i^v}{N_i^h}$, entonces reemplazando (**??**) en la ecuación anterior obtenemos

$$\lambda_1^H = \lambda_2^H = 0. \tag{3.7}$$

Ahora, reemplazando (**??**) en la primera ecuación de (**??**) se obtiene

$$\begin{aligned}
\gamma_1^h \left(1 - \frac{1}{U_1^S}\right) S_1^h + \omega_1^h R_1^h + \varphi_{21}^S S_2^h &= 0 \\
\gamma_2^h \left(1 - \frac{1}{U_2^S}\right) S_2^h + \omega_2^h R_2^h + \varphi_{12}^S S_1^h &= 0,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

donde U_1^S y U_2^S están definidos en (**??**). Dado que $U_1^S \geq 1$ o $U_2^S \geq 1$ entonces de (**??**) se concluye que

$$S_1^h = S_2^h = R_1^h = R_2^h = 0. \tag{3.9}$$

Reemplazando (**??**) en la tercera y cuarta ecuación de (**??**) se verifica que

$$E_1^h = E_2^h = I_1^h = I_2^h = 0, \tag{3.10}$$

lo cual completa la demostración ☑

A partir del resultado anterior se tiene el siguiente corolario

Corolario 3.2. *Si $U_1^S < 1$ o $U_2^S < 1$, entonces existe el equilibrio trivial P_0 con todos sus componentes cero.*

Ahora se analizará la existencia de equilibrios cuando

$$U_1^S < 1 \text{ y } U_2^S < 1. \tag{3.11}$$

En la siguiente proposici'on también se determinan condiciones para existencia de P_0

Proposition 3.3. *Súpongamos que se satisfacen las condiciones* *a)* $U_1^S < 1$ *y* $U_2^S < 1$.

b) $U_1^I \geq 1$ *o* $U_2^I \geq 1$.

Entonces

1. *Si* $\Gamma_4 \neq 1$ *existe el equilibrio trivial* P_0 *con todos sus componentes cero.*
2. *Si* $\Gamma_4 = 1$ *puede existir el equilibrio trivial* P_1 *con todos sus componentes cero a excepción de* S_1^h *y* S_2^h.

Demostración. Reemplazando (**??**) en la segunda ecuación de (**??**) se obtiene

$$\begin{array}{rcl} -(\varepsilon_1^h + \mu_1^h + \varphi_{12}^E)E_1^h + \varphi_{21}^E E_2^h & = & 0 \\ -(\varepsilon_2^h + \mu_2^h + \varphi_{21}^E)E_2^h + \varphi_{12}^E E_1^h & = & 0. \end{array} \tag{3.12}$$

Despejando E_2 de la primera ecuación de (**??**) se tiene

$$E_2 = \left(\frac{\varepsilon_1^h + \mu_1^h + \varphi_{12}^E}{\varphi_{21}^E} \right) E_1^h. \tag{3.13}$$

Reemplazando, (**??**) en la segunda ecuación de(**??**) se obtiene

$$(1 - \Gamma_1)E_1^h = 0, \tag{3.14}$$

donde Γ_1 está definido en (**??**). Dado que $\Gamma_1 > 1$ entonces $E_1^h = 0$ y por tanto de (**??**) se conluye que $E_2^h = 0$. Reemplazando $E_1^h = E_2^h = 0$ en la tercera ecuación de (**??**) se tiene

$$\begin{array}{rcl} \nu_1^h \left(1 - \dfrac{1}{U_1^I}\right) I_1^h + \varphi_{21}^I I_2^h & = & 0 \\ \nu_2^h \left(1 - \dfrac{1}{U_2^I}\right) I_2^h + \varphi_{12}^I I_1^h & = & 0 \end{array} \tag{3.15}$$

donde U_1^I y U_1^I estaán definidos en (**??**). Dado que $U_1^I \geq 1$ o $U_2^I \geq 1$, entonces $I_1^h = I_2^h = 0$. En este caso reemplazando $I_1 = I_2 = 0$ en la cuarta de (**??**) se obtiene

$$\begin{array}{rcl} -(\omega_1^h + \mu_1^h + \varphi_{12}^R)R_1^h + \varphi_{21}^R R_2^h & = & 0 \\ -(\omega_2^h + \mu_2^h + \varphi_{21}^R)R_2^h + \varphi_{12}^R R_1^h & = & 0. \end{array} \tag{3.16}$$

A partir de la primera ecuación de (**??**) se obtiene

$$R_2^h = \frac{\omega_1^h + \mu_1^h + \varphi_{12}^R}{\varphi_{21}^R} R_1^h \tag{3.17}$$

Reemplazando, (**??**) en la segunda ecuación de(**??**) se obtiene

$$(1 - \Gamma_3)R_1^h = 0, \tag{3.18}$$

donde Γ_3 está definida en (**??**). Dado que $\Gamma_3 > 1$, entonces $R_1^h = 0$ y por lo tanto R_2^h definido en (**??**) también es cero. Reemplazando $R_1^h = R_2^h = 0$ en (**??**) obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1^h \left(1 - \dfrac{1}{U_1^S}\right) S_1^h + \varphi_{21}^S S_2^h & = & 0 \\ \gamma_2^h \left(1 - \dfrac{1}{U_2^S}\right) S_2^h + \varphi_{12}^S S_1^h & = & 0, \end{array} \tag{3.19}$$

Dado que $U_1^S < 1$ y $U_2^S < 1$, entonces a partir de la primera ecuación de (**??**) se obtiene

$$S_2^h = \frac{\nu_1^h}{\varphi_{21}^S} \left(\frac{1}{U_1^S} - 1 \right) S_1^h. \tag{3.20}$$

Reemplazando (**??**) en la segunda ecuación de (**??**) se obtiene

$$\varphi_{12}^S \left(1 - \Gamma_4\right) S_1^h = 0, \tag{3.21}$$

donde

$$\Gamma_4 = \frac{\gamma_2^h}{\varphi_{12}^S} \left(\frac{1}{U_2^S} - 1 \right) \frac{\gamma_1^h}{\varphi_{21}^S} \left(\frac{1}{U_1^S} - 1 \right). \tag{3.22}$$

En cosecuencia si $\Gamma_4 \neq 1$, entonces nuevamente se tiene la existencia de P_0. Sin embargo, cuando $\Gamma_4 = 1$ la componente S_1^h puede ser diferente de cero lo cual implicaría la existencia del equilibrio P_1 con sus componentes S_1^h y S_2^h diferentes de cero. ☑

La proposición anterior implica el siguiente corolario

Corolario 3.4. *Cambiando la hipótesis* a) *de la Proposición* **??** *por* $U_1^I < 1$ *o* $U_2^I < 1$ *se obtienen los mismos resultados de la Proposición* **??**.

Comentario 3.5. *Si* $S_1^h \neq 0$ *o* $S_2^h \neq 0$*, entonces en la Proposición* **??** *se garantiza la existencia del equilibrio* P_1.

Las siguientes proposiciones complementan la proposición y el corolario anterior.

Proposition 3.6. *Súpongamos que se satisfacen las condiciones*

a) $U_1^S < 1$ *y* $U_2^S < 1$.

b) $U_1^I < 1$ *y* $U_2^I < 1$.

Entonces

1. *Si* $\Gamma_2 \neq 1$ *y* $\Gamma_4 \neq 1$ *existe el equilibrio trivial* P_0 *con todos sus componentes cero.*
2. *Si* $\Gamma_2 \neq 1$ *y* $\Gamma_4 = 1$ *puede existir el equilibrio trivial* P_1 *con todos sus componentes* S_1^h *y* S_2^h *diferentes de cero.*

Demostración. Ahora cuando, $U_1^I < 1$ y $U_2^I < 1$, entonces a partir de la primera ecuación de (**??**) se obtiene

$$I_2^h = \frac{\nu_1^h}{\varphi_{21}^I} \left(\frac{1}{U_1^I} - 1 \right) I_1^h, \tag{3.23}$$

Reemplazando (**??**) en la segunda ecuación de (**??**) se obtiene

$$\varphi_{12}^I \left(1 - \Gamma_2\right) I_1^h = 0, \tag{3.24}$$

donde Γ_2 está definida en (**??**).Observese que si $\Gamma_2 \neq 1$, entonces $I_1^h = 0$ y por tanto $I_2^h = 0$, y repitiendo el proceso de (**??**-**??**) se puede obtener la existencia de P_0 o P_1. ☑

Comentario 3.7. *Si* $S_1^h \neq 0$ *o* $S_2^h \neq 0$*, entonces en la Proposición* **??** *garantiza la existencia del equilibrio* P_1.

Proposition 3.8. *Supongamos que se satisfacen las condiciones*

a) $U_1^S < 1$ *y* $U_2^S < 1$.

b) $U_1^I < 1$ *y* $U_2^I < 1$.

Entonces, si $\Gamma_2 = 1$ y $\Gamma_4 > 1$ puede existir el equilibrio trivial P_2 con los componentes S_1^h, S_2^h, R_1^h, R_2^h, I_1^h y I_2^h diferentes de cero y la demás todas cero.

Demostración. Cuando $\Gamma_2 = 1$, entonces I_1 puede ser diferente de cero e I_2 queda establecido por (**??**). En este caso, reemplazando en la cuarta ecuación de (**??**) se tiene

$$\begin{aligned} \delta_1^h I_1^h - (\omega_1^h + \mu_1^h + \varphi_{12}^R) R_1^h + \varphi_{21}^R R_2^h &= 0 \\ \delta_2^h \frac{\nu_1^h}{\varphi_{21}^I}\left(\frac{1}{U_1^I} - 1\right) I_1^h - (\omega_2^h + \mu_2^h + \varphi_{21}^R) R_2^h + \varphi_{12}^R R_1^h &= 0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

La solución de (**??**) está dada por

$$\begin{aligned} R_1^h &= \kappa_1 I_1^h \\ R_2^h &= \kappa_2 I_1^h, \end{aligned} \tag{3.26}$$

donde

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\delta_1^h + \varphi_{21}^R \kappa_2}{\omega_1^h + \mu_1^h + \varphi_{12}^R} \\ \kappa_2 &= \frac{\delta_2^h \frac{\nu_1^h}{\varphi_{21}^I}\left(\frac{1}{U_1^I} - 1\right) + \frac{\varphi_{12}^R \delta_1^h}{\omega_1^h + \mu_1^h + \varphi_{12}^R}}{(\omega_1^h + \mu_1^h + \varphi_{12}^R)\left(1 - \frac{1}{\Gamma_3}\right)} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Reemplazando (**??**) en la primera ecuación de (**??**) se tiene

$$\begin{aligned} \omega_1^h \kappa_1 I_1^h + \gamma_1^h\left(1 - \frac{1}{U_1^S}\right) S_1^h + \varphi_{21}^S S_2^h &= 0 \\ \omega_2^h \kappa_2 I_1^h + \gamma_2^h\left(1 - \frac{1}{U_2^S}\right) S_2^h + \varphi_{12}^S S_1^h &= 0, \end{aligned} \tag{3.28}$$

La solución de (**??**) es

$$\begin{aligned} S_1^h &= \kappa_3 I_1^h \\ S_2^h &= \kappa_4 I_1^h, \end{aligned} \tag{3.29}$$

donde

$$\begin{aligned} \kappa_3 &= \frac{\omega_2^h \kappa_2 \varphi_{21}^S + \gamma_2^h \left(\frac{1}{U_2^S} - 1\right) \omega_1^h \kappa_1}{(\Gamma_4 - 1)\varphi_{12}^S \varphi_{21}^S} \\ \kappa_4 &= \frac{\gamma_1^h \left(\frac{1}{U_1^S} - 1\right) \kappa_2 \omega_2^h + \omega_1^h \kappa_1 \varphi_{12}^S}{(\Gamma_4 - 1)\varphi_{21}^S} \end{aligned} \tag{3.30}$$

A partir de (**??**) se estable que $\kappa_3 > 0$ y $\kappa_4 > 0$ si y solo si $\Gamma_4 > 1$. Finalmente, dado que $\lambda_1^H = \lambda_2^H = 0$, entonces siguiendo el mismo procedimiento que al incio de la demostración de la Proposición (**??**) se verifica que $E_1^h = E_2^h = 0$. ☑

Comentario 3.9. *Si $I_1^h \neq 0$ o $I_2^h \neq 0$, entonces en la Proposición **??** garantiza la exustencia del equilibrio P_1.*

3.2. Existencia de soluciones de equilibrio cuando $S_1^v = 0$ y $S_2^v \neq 0$

La siguiente proposición resume los resultados de existencia de esta subsección

Proposition 3.10. *Supongamos que se satisfacen las condiciones*

a) $U_2^v > 1$ *y* $U_1^S < 1$.

b) $U_1^I < 1$ *y* $U_2^I < 1$.

c) $\Gamma_2 > 1$

Entonces

1. *Si* $\Gamma_4 > 1$ *existe el equilibrio trivial* P_3 *con sus componentes diferentes de cero excepto* I_1^v *y* S_1^v.
2. *Si* $\Gamma_4 = 1$ *y* b *definido en (**??**) es negativo, entonces existe el equilibrio trivial* P_3 *con sus componentes diferentes de cero excepto* I_1^v *y* S_1^v.
3. *Si* $\Gamma_4 < 1$*;* a*,* b *y* c *definido en (**??**) satisfacen que* $a > 0$*,* $b < 0$ *y* $b^2 - 4ac > 0$*, entonces existen dos equilibrios* P_3 *y* P_4 *con sus componentes diferentes de cero excepto* I_1^v *y* S_1^v.

Demosración. A partir de la sexta ecuación de (**??**) se verifica que

$$I_1^v = 0. \tag{3.31}$$

Por otro lado, para $i = 2$ se suman las ecuaciones quinta y sexta de (**??**) obteniendo

$$\gamma_2^v S_2^v - (\mu_2^v + k_2 u_2) S_2^v - (\mu_2^v + k_2 u_2) I_2^v = 0,$$

de donde se deduce que

$$I_2^v = (U_2^v - 1) S_2^v.$$

Dado que $S_2^v \neq 0$, entonces a partir de la sexta ecuación de (**??**) se obtiene

$$\gamma_2^v - (\lambda_2^v + \mu_2^v + k_2 u_2) = 0, \tag{3.32}$$

reemplazando (**??**) en (**??**) y despejando I_2^h se obtiene

$$\begin{aligned}
I_2^h &= \frac{\gamma_2^v}{\lambda_2^{vh}\epsilon_2\phi_2}\left(1 - \frac{1}{U_2^v}\right) N_2^v \\
&= \frac{\gamma_2^v}{\lambda_2^{vh}\epsilon_2\phi_2}\left(1 - \frac{1}{U_2^v}\right)(S_2^v + I_2^v) \\
&= \frac{\gamma_2^v}{\lambda_2^{vh}\epsilon_2\phi_2}\left(1 - \frac{1}{U_2^v}\right)(S_2^v + (U_2^v - 1) S_2^v) \\
&= \frac{\gamma_2^v (U_2^v - 1)}{\lambda_2^{vh}\epsilon_2\phi_2} S_2^v
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Ahora reemplazando (**??**) en (**??**) se obtiene que

$$\lambda_1^H = 0. \tag{3.34}$$

Por lo tanto, reemplazando (**??**) en la segunda ecuacion de (**??**) se obtiene

$$-(\varepsilon_1^h + \mu_1^h) E_1^h + \varphi_{21}^E E_2^h - \varphi_{12}^E E_1^h = 0,$$

lo cual implica que

$$E_2^h = \frac{\varepsilon_1^h + \mu_1^h + \varphi_{12}^E}{\varphi_{21}^E} E_1^h. \tag{3.35}$$

Ahora, reemplazando (**??**) en la tercera ecuación de (**??**) se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^h E_1^h + \nu_1^h \left(1 - \frac{1}{U_1^I}\right) I_1^h + \varphi_{21}^I I_2^h &= 0 \\ \varepsilon_2^h \frac{\varepsilon_1^h + \mu_1^h + \varphi_{12}^E}{\varphi_{21}^E} E_1^h + \nu_2^h \left(1 - \frac{1}{U_2^I}\right) I_2^h + \varphi_{12}^I I_1^h &= 0. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Observe que si $U_1^I \geq 1$ o $U_2^I \geq 1$, entonces

$$E_1^h = I_1^h = I_2^h = 0. \tag{3.37}$$

Ahora reemplazando, (**??**) en (**??**) y (**??**) se obtiene que $I_2^h = S_2^v = 0$ lo cual es una contradicción por lo tanto $U_1^I < 1$ y $U_2^I < 1$. La solución de (**??**) está dada por

$$\begin{aligned} I_1^h &= \kappa_5 E_1^h \\ I_2^h &= \kappa_6 E_1^h, \end{aligned} \tag{3.38}$$

donde

$$\begin{aligned} \kappa_5 &= \frac{\varepsilon_2^h \dfrac{\varepsilon_1^h + \mu_1^h + \varphi_{12}^E}{\varphi_{21}^E} + \nu_2^h \left(\dfrac{1}{U_2^I} - 1\right) \dfrac{\varepsilon_1^h}{\varphi_{21}^I}}{(\Gamma_2 - 1)\varphi_{12}^I} \\ \kappa_6 &= \frac{\nu_1^h \left(\dfrac{1}{U_1^I} - 1\right) \dfrac{\varepsilon_1^h + \mu_1^h + \varphi_{12}^E}{\varphi_{21}^E} + \varepsilon_1^h \varphi_{12}^I}{(\Gamma_2 - 1)\varphi_{12}^I \varphi_{21}^I}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Dado que $U_1^I < 1$, $U_2^I < 1$ y $\Gamma_2 > 1$, entonces $\kappa_5 > 0$ y $\kappa_6 > 0$. Ahora, reemplazando (**??**) en la cuarta ecuación de (**??**) se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \delta_1^h \kappa_5 E_1^h - (\omega_1^h + \mu_1^h + \varphi_{12}^R) R_1^h + \varphi_{21}^R R_2^h &= 0 \\ \delta_2^h \kappa_6 E_1^h - (\omega_2^h + \mu_2^h + \varphi_{21}^R) R_2^h + \varphi_{12}^R R_1^h &= 0. \end{aligned} \tag{3.40}$$

La solución de (**??**) está dada por

$$\begin{aligned} R_1^h &= \kappa_7 E_1^h \\ R_2^h &= \kappa_8 E_1^h, \end{aligned} \tag{3.41}$$

donde

$$\begin{aligned} \kappa_7 &= \frac{(\omega_2^h + \mu_2^h + \varphi_{21}^R) \dfrac{\kappa_5}{\varphi_{21}^R} \delta_1^h + \kappa_6 \delta_2^h}{(\Gamma_3 - 1)\varphi_{12}^R} \\ \kappa_8 &= \frac{(\omega_1^h + \mu_1^h + \varphi_{12}^R)\kappa_6 \delta_2^h + \kappa_5 \varphi_{12}^R \delta_1^h}{(\Gamma_3 - 1)\varphi_{12}^R \varphi_{21}^R}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Dado que $\Gamma_3 > 1$, entonces $\kappa_7 > 0$ y $\kappa_8 > 0$. Reemplazando (**??**) y (**??**) en la primera ecuación de (**??**) obtiene

$$\begin{aligned} \gamma_1^h \left(1 - \frac{1}{U_1^S}\right) S_1^h + \omega_1^h \kappa_7 E_1^h + \varphi_{21}^S S_2^h &= 0 \\ \left[\gamma_2^h \left(1 - \frac{1}{U_2^S}\right) S_2^h + \omega_2^h \kappa_8 E_1^h + \varphi_{12}^S S_1^h\right] N_2^h - \lambda_2^{hv} \epsilon_2 \phi_2 I_2^v S_2^h &= 0. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Ahora, despejando S_1^h de la primera ecuación de (**??**) se obtiene

$$S_1^h = \frac{\omega_1^h \kappa_7 E_1^h + \varphi_{21}^S S_2^h}{\gamma_1^h \left(1/U_1^S - 1\right)}. \tag{3.44}$$

Reemplazando (**??**) en la segunda ecuación de (**??**) y simplificando se obtiene

$$\left\{(1-\Gamma_4)\varphi_{12}^S\varphi_{21}^S S_2^h + \left[\gamma_1^h\left(\frac{1}{U_1^S}-1\right)\omega_2^h\kappa_8 + \omega_1^h\kappa_7\varphi_{12}^S\right]E_1^h\right\}N_2^h - \lambda_2^{hv}\epsilon_2\phi_2 I_2^v S_2^h = 0 \tag{3.45}$$

Dado que E_2^h, R_2^h y I_2^h dependen linealmente de E_1^h y $N_2^h = S_2^h + E_2^h + R_2^h + I_2^h$, entonces N_2^h se puede reescribir como

$$N_2^h = S_2^h + \alpha E_1^h, \tag{3.46}$$

donde α es una constante positiva. Reemplazando (**??**) y

$$I_2^v = \frac{\lambda_2^{vh}\epsilon_2\phi_2}{\gamma_2^h}E_1^h \tag{3.47}$$

en (**??**) se obtiene la siguiente ecuación cuadrática

$$a\left(S_2^h\right)^2 + bE_1^h S_2^h + c\left(E_1^h\right)^2 = 0, \tag{3.48}$$

donde

$$\begin{aligned}
a &= (1-\Gamma_4)\varphi_{12}^S\varphi_{21}^S \\
b &= \alpha(1-\Gamma_4)\varphi_{12}^S\varphi_{21}^S + \gamma_1^h\left(\frac{1}{U_1^S}-1\right)\omega_2^h\kappa_8 + \omega_1^h\kappa_7\varphi_{12}^S - \frac{\lambda_2^{hv}\lambda_2^{vh}(\epsilon_2\phi_2)^2}{\gamma_2^h} \\
c &= \alpha\left[\gamma_1^h\left(\frac{1}{U_1^S}-1\right)\omega_2^h\kappa_8 + \omega_1^h\kappa_7\varphi_{12}^S\right],
\end{aligned} \tag{3.49}$$

A partir del analisis de la solución de la ecuación (**??**) se completa la demostración. ☑

Siguiendo un porcedimiento similar se obtienen resultados de existencia similares para las soluciones de equilibrio cuando $S_1^v \neq 0$ y $S_2^v = 0$.

3.3. Existencia de soluciones de equilibrio cuando $S_1^v \neq 0$ y $S_2^v \neq 0$

La siguiente proposición resume los resultados de existencia de esta subsección.

Proposition 3.11. *Si se satisfacen las siguientes condiciones*

1. $U_1^V > 1$ *y* $U_2^V > 1$
2. $U_1^I < 1$ *y* $U_2^I < 1$
3. $\Gamma_2 > 1$, $\Gamma_3 > 1$ *y* $\Gamma_4 > 1$.

Entonces, entonces exiiste una única solución de equilibrio endémica P_4 *con todos sus componentes diferentes de cero.*

Demostración. Dado que $S_1^v \neq 0$ y $S_2^v \neq 0$, entonces a partir de la quinta ecuación de (**??**) se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
\gamma_1^v - (\lambda_1^V + \mu_1^v + k_1u_1) &= 0 \\
\gamma_2^v - (\lambda_2^V + \mu_2^v + k_2u_2) &= 0,
\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda_1^V &= \gamma_1^v\left(1-\frac{1}{U_1^V}\right) \\ \lambda_2^V &= \gamma_2^v\left(1-\frac{1}{U_2^V}\right). \end{aligned} \tag{3.50}$$

Reemplazando, (??) y (??) en (??) se obtiene

$$\begin{aligned} I_1^h &= \frac{\gamma_1^v}{\lambda_1^{vh}\epsilon_1\phi_1}\left(1-\frac{1}{U_1^V}\right)N_1^v \\ I_2^h &= \frac{\gamma_2^v}{\lambda_2^{vh}\epsilon_2\phi_2}\left(1-\frac{1}{U_2^V}\right)N_2^v. \end{aligned} \tag{3.51}$$

De manera similar, Reemplazando, (??) y (??) en sexta ecuación de(??) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1^{vh}\epsilon_1\phi_1 I_1^h}{N_1^v}S_1^v-(\mu_1^v+k_1u_1)I_1^v &= 0 \\ \frac{\lambda_2^{vh}\epsilon_2\phi_2 I_2^h}{N_2^v}S_2^v-(\mu_2^v+k_2u_2)I_2^v &= 0. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Ahora, reemplazando (??) en (??) se obtiene

$$\begin{aligned} S_1^v &= \left(\frac{1}{U_1^V-1}\right)I_1^v \\ S_2^v &= \left(\frac{1}{U_2^V-1}\right)I_2^v. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Dado que $N_i^v=S_i^v+I_i^v$, entonces reemplazando (??) en (??) se obtiene

$$\begin{aligned} I_1^h &= \frac{\gamma_1^v}{\lambda_1^{vh}\epsilon_1\phi_1}I_1^v \\ I_2^h &= \frac{\gamma_2^v}{\lambda_2^{vh}\epsilon_2\phi_2}I_2^v. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Reemplazando (??) en la cuarta ecuación de (??) se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \frac{\delta_1^h\gamma_1^v}{\lambda_1^{vh}\epsilon_1\phi_1}I_1^v-(\omega_1^h+\mu_1^h+\varphi_{12}^R)R_1^h+\varphi_{21}^R R_2^h &= 0 \\ \frac{\delta_2^h\gamma_2^v}{\lambda_2^{vh}\epsilon_2\phi_2}I_2^v-(\omega_2^h+\mu_2^h+\varphi_{21}^R)R_2^h+\varphi_{12}^R R_1^h &= 0 \end{aligned} \tag{3.55}$$

La solución del sistema (??) está dada por

$$\begin{aligned} R_1^h &= \frac{\dfrac{\omega_2^h+\mu_2^h+\varphi_{21}^R}{\varphi_{21}^R}\dfrac{\delta_1^h\gamma_1^v}{\lambda_1^{vh}\epsilon_1\phi_1}I_1^v+\dfrac{\delta_2^h\gamma_2^v}{\lambda_2^{vh}\epsilon_2\phi_2}I_2^v}{(\Gamma_3-1)\varphi_{12}^R} \\ R_2^h &= \frac{\varphi_{12}^R\dfrac{\delta_1^h\gamma_1^v}{\lambda_1^{vh}\epsilon_1\phi_1}I_1^v+(\omega_1^h+\mu_1^h+\varphi_{12}^R)\dfrac{\delta_2^h\gamma_2^v}{\lambda_2^{vh}\epsilon_2\phi_2}I_2^v}{(\Gamma_3-1)\varphi_{12}^R\varphi_{21}^R} \end{aligned} \tag{3.56}$$

Ahora, el sistema formado por la tercera ecuación se puede reescriboir como

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1^h E_1^h + \nu_1^h \left(1 - \frac{1}{U_1^I}\right) I_1^h + \varphi_{21}^I I_2^h &= 0 \\
\varepsilon_2^h E_2^h + \nu_2^h \left(1 - \frac{1}{U_2^I}\right) I_2^h + \varphi_{12}^I I_1^h &= 0
\end{aligned}
$$

La solución de (**??**) es

$$
\begin{aligned}
I_1^h &= \frac{\dfrac{\nu_2^h}{\varphi_{21}^I}\left(\dfrac{1}{U_2^I} - 1\right)\varepsilon_1^h E_1^h + \varepsilon_2^h E_2^h}{(\Gamma_2 - 1)\varphi_{12}^I} \\
I_2^h &= \frac{\varphi_{12}^I \varepsilon_1^h E_1^h + \nu_1^h \left(\dfrac{1}{U_1^I} - 1\right)\varepsilon_2^h E_2^h}{(\Gamma_2 - 1)\varphi_{12}^I \varphi_{21}^I}
\end{aligned} \tag{3.57}
$$

reemplazando (**??**) en (**??**) obtenemos el siguiente sistema

$$
\begin{aligned}
\frac{\nu_2^h}{\varphi_{21}^I}\left(\frac{1}{U_2^I} - 1\right)\varepsilon_1^h E_1^h + \varepsilon_2^h E_2^h &= \frac{(\Gamma_2 - 1)\varphi_{12}^I \gamma_1^v}{\lambda_1^{vh}\epsilon_1 \phi_1} I_1^v \\
\varphi_{12}^I \varepsilon_1^h E_1^h + \nu_1^h \left(\frac{1}{U_1^I} - 1\right)\varepsilon_2^h E_2^h &= \frac{(\Gamma_2 - 1)\varphi_{12}^I \varphi_{21}^I \gamma_2^v}{\lambda_2^{vh}\epsilon_2 \phi_2} I_2^v
\end{aligned} \tag{3.58}
$$

La solución de (**??**) es

$$
\begin{aligned}
E_1^h &= \frac{1}{\varepsilon_1^h}\left[\nu_1^h \left(\frac{1}{U_1^I} - 1\right)\frac{\gamma_1^v}{\lambda_1^{vh}\epsilon_1\phi_1} I_1^v - \frac{\varphi_{21}^I \gamma_2^v}{\lambda_2^{vh}\epsilon_2\phi_2} I_2^v\right] \\
E_2^h &= \frac{1}{\varepsilon_2^h}\left[\nu_2^h \left(\frac{1}{U_2^I} - 1\right)\frac{\gamma_2^v}{\lambda_2^{vh}\epsilon_2\phi_2} I_2^v - \frac{\gamma_1^v}{\lambda_1^{vh}\epsilon_1\phi_1} I_1^v\right]
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

Ahora, sumando la primera con la segunda ecuación de (**??**) se obtiene

$$
\begin{aligned}
\gamma_1^h \left(1 - \frac{1}{U_1^S}\right) S_1^h + \omega_1^h R_1^h + \varphi_{21}^S S_2^h - (\varepsilon_1^h + \mu_1^h + \varphi_{12}^E) E_1^h + \varphi_{21}^E E_2^h &= 0 \\
\gamma_2^h \left(1 - \frac{1}{U_2^S}\right) S_2^h + \omega_2^h R_2^h + \varphi_{12}^S S_1^h - (\varepsilon_2^h + \mu_2^h + \varphi_{21}^E) E_2^h + \varphi_{12}^E E_1^h &= 0
\end{aligned} \tag{3.60}
$$

Reemplazando (**??**) y (**??**) en (**??**) se obtiene el siguiente sistema

$$
\begin{aligned}
\gamma_1^h \left(1 - \frac{1}{U_1^S}\right) S_1^h + \varphi_{21}^S S_2^h + c I_1^v + d I_2^v &= 0 \\
\gamma_2^h \left(1 - \frac{1}{U_2^S}\right) S_2^h + \varphi_{12}^S S_1^h + f I_1^v + g I_2^v &= 0,
\end{aligned} \tag{3.61}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{1}{(\Gamma_3-1)\varphi_{12}^R}\frac{\omega_2^h+\mu_2^h+\varphi_{21}^R}{\varphi_{21}^R}\frac{\delta_1^h\gamma_1^v}{\lambda_1^{vh}\epsilon_1\phi_1} \\
&\quad -\frac{\gamma_1^v}{\lambda_1^{vh}\epsilon_1\phi_1}\left[\frac{\varepsilon_1^h+\mu_1^h+\varphi_{12}^E}{\varepsilon_1^h}\nu_1^h\left(\frac{1}{U_1^I}-1\right)+\frac{\varphi_{21}^E}{\varepsilon_2^h}\right] \\
d &= \frac{\gamma_2^v}{\lambda_2^{vh}\epsilon_2\phi_2}\left[\frac{\delta_2^h}{(\Gamma_3-1)\varphi_{12}^R}+\frac{\varepsilon_1^h+\mu_1^h+\varphi_{12}^E}{\varepsilon_1^h}\varphi_{21}^I+\frac{\varphi_{21}^E}{\varepsilon_2^h}\nu_2^h\left(\frac{1}{U_2^I}-1\right)\right] \\
f &= \frac{\gamma_1^v}{\lambda_1^{vh}\epsilon_1\phi_1}\left[\frac{\omega_2^h\delta_1^h}{(\Gamma_3-1)\varphi_{12}^R}+\frac{\varepsilon_1^h+\mu_1^h+\varphi_{12}^E}{\varepsilon_1^h}+\nu_1^h\left(\frac{1}{U_1^I}-1\right)\frac{\varphi_{21}^E}{\varepsilon_2^h}\right] \\
g &= \frac{1}{(\Gamma_3-1)\varphi_{12}^R}\frac{\omega_2^h(\omega_1^h+\mu_1^h+\varphi_{12}^R)}{\varphi_{21}^R}\frac{\delta_2^h\gamma_2^v}{\lambda_2^{vh}\epsilon_2\phi_2} \\
&\quad -\frac{\gamma_2^v}{\lambda_2^{vh}\epsilon_2\phi_2}\left[\frac{\varepsilon_2^h+\mu_2^h+\varphi_{21}^E}{\varepsilon_2^h}\nu_2^h\left(\frac{1}{U_2^I}-1\right)+\frac{\varphi_{12}^E\varphi_{21}^E}{\varepsilon_1^h}\right]
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

La solución de (**??**) es

$$
\begin{aligned}
S_1^h &= \frac{\left[f+\frac{\gamma_2^h}{\varphi_{21}^S}\left(\frac{1}{U_2^S}-1\right)c\right]I_1^v+\left[g+\frac{\gamma_2^h}{\varphi_{21}^S}\left(\frac{1}{U_2^S}-1\right)d\right]I_2^v}{(\Gamma_4-1)\varphi_{12}^S} \\
S_2^h &= \frac{\left[\frac{\gamma_1^h}{\varphi_{12}^S}\left(\frac{1}{U_1^S}-1\right)f+c\right]I_1^v+\left[\frac{\gamma_1^h}{\varphi_{12}^S}\left(\frac{1}{U_1^S}-1\right)g+d\right]I_2^v}{(\Gamma_4-1)\varphi_{12}^S\varphi_{21}^S}
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

☑

3.4. Inestabilidad del equilibrio libre de infección

Uno de los valores propios de la matriz jacobiana J de (**??**) evaluado en el equilibrio trivial E_0 está dado por

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(E_0) &= \frac{1}{2}\left[\gamma_1^h\left(1-\frac{1}{U_1^S}\right)+\gamma_2^h\left(1-\frac{1}{U_2^S}\right)\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\sqrt{\left[\gamma_1^h\left(1-\frac{1}{U_1^S}\right)-\gamma_2^h\left(1-\frac{1}{U_2^S}\right)\right]^2+4\varphi_{12}^S\varphi_{21}^S},
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

dado que $U_1^S > 1$ o $U_2^S > 1$, entonces $\lambda_1 > 0$ lo cual implica la inestabilidad de E_0.

4. Conclusiones

En este trabajo se formula y analiza un modelo multiparche que considera la transmisón vertical y crecimiento percápita de la población de individuos susceptibles (humanos y mosquitos). En los modelos clásicos por lo general no consideran la transmisión vertical y el crecimiento de los individuos es establecido constante o densodependiente. Bajo dichas condiciones el análisis de los modelos siempre arroja una dinámica similar que varia entre bifurcaciones hacia ad elante o bifurcaciones hacia atrás en la cuales siempre existe un equilibrio trivial donde coexisten las poblaciones de humanos y mosquitos suceptibles. Debido a que estamos intentado formular un modelo que describa lo mas aproximado posible la epidemiologia de la malaria en Tumaco decidimos modificar la hipótesis del crecimiento de individuos e incluir la infección congénita; aspectos que son muy relevantes en la epidemiología de específica de Tumaco. Para nuestro asombro, cambios que no parecian tan relevantes el los modelos clásicos revelan resultados de existencia y estabilidad de soluciones de equilibrio bastante diferentes a los ya conocidos. Hecho que nos motiva a seguir considerando otras opciones en el modelado matemático. Sin embargo, pensamos que este modelo no refleja algunos rasgos identificados en el fenomeno epidemiologico que presenta Tumaco, por tal razón estamos considerando otras formas de modelas algunos aspectos.

Agradecimientos

E. Ibarguen agradece el apoyo recibido del proyecto No 082-16/08/2013 (VIPRI-UDENAR).

Referencias

[1] Basañez M.G. y Rodriguez D.J., Dinámica de transmisión y modelos matemáticos en enfermedades transmitidas por vectores. Entonomia, Vol. 19, No. 3, Diciembre, 2004, pp. 113-134. 2

[2] R. Ross, The prevention of malaria, John Murray, London, 1911 1

[3] Sobrebón, J; Cocho, G; Aldama, A; Falconi, M; Esteva, L y Lara, M. Clásicos de la Biología Matemática. Siglo XXI editores, s.a de c.v. Cerro del agua 248. Delegación Coyoacán, 04310, México D.F. Primera edición (2002) 1

[4] Macdonald G, The epidemiology and control of malaria, Oxford University. Press, London, 1957. 2

[5] Dietz K, Molineaux L, Thomas A. A malaria model tested in the African savannah. Bull World Health Organ. 50(3-4):347-357 (1974) 2

[6] Ngwa, G and Shu, W. A Mathematical Model for Endemic Malaria with Variable Human and Mosquito Populations. Msthematical and Computer Modeling 32 (2000) 747-763 2

[7] Chitnis, N. Using mathematical models in controlling the spread of malaria. In Partial Fulfillment of the Requirements For the Degree of Doctor OF Philosophy In the Graduate College . University of Arizona (2005). 2

[8] Chitnis, N; Cushing, M and Hyman, J. Bifurcation analysis of a mathematical model for malaria transmission. Society for Industrial and Applied Mathematics. Vol. 67, No. 1, pp. 24-45 (2006) 2

[9] Chitnis, N; Hyman, J and Cushing, M. Determining Important Parameters in the Spread of Malaria Through the Sensitivity Analysis of a Mathematical Model. Bulletin of Mathematical Biology (2008) 2

[10] L. Torres-Sorando and D. J. Rodriguez. Models of spatio-temporal dynamics in malaria. Ecol. Model., 104:231-240, 1997. 2

[11] D. J. Rodriguez and L. Torres-Sorando, Models of infectious diseases in spatially heterogeneous environments, Bull. Math. Biol., 63 (2001), pp. 547-571. 2

[12] Rainey , J et.al. Spatial distribution of Burkitt's lymphoma in Kenya and association with malaria risk. Tropical Medicine and International Health. volume 12 no 8 pp 936-943 (2007) 2

[13] C. Dye and G. Hasibeder, Population dynamics of mosquito-borne disease: effects of flies which bite some people more frequently than others, Trans. R. Soc. Trop. Med. Hyg., 80 (1986), pp. 69-77. 2

[14] G. Hasibeder and C. Dye, Population dynamics of mosquito-borne disease: persistence in a completely heterogeneous environments, Theoret. Population Biol., 33 (1988), pp. 31-53. 2

[15] D. L. Smith, J. Dushoff, and F. E. McKenzie, The risk of a mosquito-borne infection in a heterogeneous environment, PLoS Biol., 2 (2004), pp. 1957-1964. 2

[16] P. Auger, E. Kouokam, G. Sallet, M. Tchuente, and B. Tsanou, The Ross-Macdonald model in a patchy environment, Math. Biosci., 216 (2008), pp. 123-131. 2

[17] C. Cosner, J. C. Beier, R. S. Cantrell, D. Impoinvil, L. Kapitanski, M. D. Potts, A. Troyo, and S. Ruan, The effects of human movement on the persistence of vector-borne diseases, J. Theoret. Biol., 258 (2009), pp. 550-560. 2

[18] J. Arino, A. Ducrot, and P. Zongo, A metapopulation model for malaria with transmission-blocking partial immunity in hosts, J. Math. Biol., 64 (2012), pp. 423-448. 2

[19] Gao, D y Ruan, S. A multipatch malaria model with logistic growth populations. SIAM J. APPL. MATH. c-2012. Vol. 72, No. 3, pp. 819-841 (2012). 2

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño

e-mail: `edbargun@gmail.com`
e-mail: `jpatirom3@gmail.com`
e-mail: `jessicamarcela2501@gmail.com`
e-mail: `sanpahi1@gmail.com`