La cuantificación del azar: una articulación de las definiciones subjetiva, frecuencial y clásica de probabilidad

Sánchez Sánchez, Ernesto y Valdez Monroy, Julio César

CINVESTAV-IPN

Resumen

La tesis que se defiende en este artículo es que para alcanzar un nivel adecuado de comprensión de probabilidad por parte de los estudiantes de bachillerato (15-17 años) es necesario que sean capaces de hacer inferencias que conecten los enfoques subjetivo, clásico y frecuencial. Dentro de las posibles inferencias, las más importantes son las que se refieren al contenido (informal) de la ley de los grandes números. Los argumentos se basan en las observaciones obtenidas mediante sesiones de entrevista realizadas con un estudiante de bachillerato quien antes no había estudiado ningún tema de probabilidad. Se analizan sus respuestas verbales y escritas frente a tareas que incluyen actividades de simulación física y computacional. En dicho análisis se utilizan los niveles de razonamiento definidos por Jones: subjetivo, transicional, cuantitativo informal y numérico. Los resultados muestran las dificultades del estudiante para entender la probabilidad como una medida del azar. En particular, la interacción con el entrevistador y la discusión de los resultados sobre prácticas de simulación física y computacional reveló que un aspecto crucial para la articulación de los enfoques de probabilidad mediante la ley de los grandes números es el razonamiento con números relativos.

Palabras clave: Enfoques de probabilidad, Inferencialismo, Razonamiento probabilístico, Simulación, Cuantificación del azar.

1. Introducción

La tesis que se quiere ilustrar es que el nivel de comprensión del concepto de probabilidad que alcanza un sujeto está asociado con las inferencias significativas y plausibles que es capaz de formular con él, y dentro de éstas, juegan un papel crucial las que se refieren al contenido de la Ley de los Grandes Números (LGN). Es claro que un conocimiento funcional no se restringe a utilizar el enfoque clásico, el enfoque frecuencial o, incluso, un enfoque subjetivo para estimar la probabilidad de un evento si el número obtenido no puede ser utilizado para hacer afirmaciones que extiendan el conocimiento o permitan tomar decisiones o hacer predicciones. Al parecer, para formular tales inferencias, se hace necesario un enfoque holístico que haga intervenir y articule los tres enfoques de probabilidad; en particular, una manera de relacionar el enfoque clásico con el frecuencial es mediante la ley de los grandes números. Conviene mencionar también al enfoque subjetivo, ya que las ideas subjetivas de los estudiantes reflejan su confianza y expectativas acerca de eventos inciertos.

Jones (2005) señala que no hay estudios a nivel secundaria que aborden la conexión entre los enfoque clásico y frecuencial de la probabilidad. Ireland y Watson (2009) en respuesta al señalamiento de Jones, llevaron a cabo un estudio con estudiantes de grado 5-6 (11-12 años) para explorar la comprensión de la probabilidad en el continuo de lo experimental a lo teórico, es decir, su comprensión informal de la ley de los grandes números. Una de sus conclusiones es que el elemento más complicado de comprender es la ley de los grandes números. Konold et al. (2011) analizan las consecuencias de introducir dos nociones de probabilidad: la teórica y la experimental. Exploran el pensamiento de una estudiante de 8º grado (14 años) que ha estudiado probabilidad. Informan que tiene serios obstáculos para vincular su noción de probabilidad teórica con su noción de probabilidad

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 39-46). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

experimental, las cuales sabe calcular sin problemas. Estos estudios indican la dificultad de los estudiantes de edades previas a los 14 años para entender la conexión entre ambos enfoques y, por tanto, de la LGN. Parece razonable estudiar el razonamiento de estudiantes de mayor edad con la idea de revelar el tipo de dificultades que enfrentan para hacer la conexión entre los enfoque de probabilidad. Por ejemplo, Albert (2003) estudia la articulación de los enfoques subjetivo y frecuencial con estudiantes universitarios.

Por otro lado, el marco de Jones *et al*. (1997) propone jerarquías de los conceptos básicos de probabilidad para describir su aprendizaje, partiendo de un nivel subjetivo hasta alcanzar un nivel numérico. Su idea es que el razonamiento probabilístico de los estudiantes sigue un proceso de cuantificación de sus nociones subjetivas de incertidumbre, azar y probabilidad, y puede observarse a través de las soluciones que expresan al resolver problemas. En consecuencia, propone segmentar las soluciones de los alumnos en cuatro niveles, mismos que marcan las características de un progreso cognitivo. Su método da lugar a una jerarquía para cada concepto básico: espacio muestral, definición clásica y aproximación frecuencial, comparación de probabilidades y otros.

En el presente trabajo se sigue la misma idea de Jones *et al*. para construir una jerarquía que ayude a describir el aprendizaje de la probabilidad; no obstante hay dos diferencias fundamentales: 1) Se estudia un solo sujeto y de mayor edad que los examinados por Jones *et al*.; 2) Se estudian varios conceptos básicos de manera conjunta, especialmente el enfoque clásico, el enfoque frecuencial, espacio muestral y comparación de probabilidades. Con base en estas consideraciones formulamos la pregunta: ¿Cuáles son las características de una jerarquía similar a la de Jones *et al*. al observar a un estudiante de bachillerato en su proceso de aprendizaje de la probabilidad mientras resuelve un problema?

2. Marco Conceptual

El marco consta de tres componentes: en la primera, las lecciones del inferencialismo, se presentan unas proposiciones teóricas referentes a la comprensión conceptual; en la segunda componente, se menciona el papel de las dificultades, concepciones erróneas o sesgos que frenan o desvían el entendimiento de la noción de probabilidad; la tercer componente, es una jerarquía de desarrollo del aprendizaje de la probabilidad, adaptada del marco de Jones *et al*. (1997) y enriquecida con observaciones realizadas en la presente investigación.

2.1. Lecciones del inferencialismo

Bakker y Derry (2011) recogen proposiciones teóricas de una teoría semántica llamada inferencialismo (Brandom, 2000) con el propósito de ponerlas al servicio de la reflexión sobre la inferencia estadística informal. Opinan que la teoría puede ayudar a superar tres desafíos que enfrenta la educación estadística: 1) Evitar el conocimiento inerte, que significa reproducir definiciones o fórmulas sin usarlas efectivamente; 2) Evitar un enfoque atomístico, que presenta los conceptos de manera aislada; 3) Encontrar secuencias de enseñanza para permitir al estudiante que se apropie de los conocimientos de manera coherente. Los autores resaltan en su exposición tres proposiciones que consideran las lecciones del inferencialismo para la educación estadística: 1) Los conceptos se entienden, en primer lugar, en términos de su papel en el razonamiento e inferencias realizados dentro de una práctica social de dar y pedir razones, y no sólo en términos representacionales; 2) Para entender el uso de los conceptos se debe privilegiar el holismo sobre el atomismo; es decir, el aprendizaje de un concepto significa el aprendizaje de muchos conceptos interrelacionados; 3) Privilegiar en la educación un enfoque inferencialista por encima de un enfoque representacionalista.

Los autores presentan ejemplos empíricos para ilustrar las lecciones del inferencialismo, teniendo como objetivo la enseñanza de conceptos clave como distribución, centros, variación y muestreo. En el presente estudio se aborda el concepto de probabilidad, cuya enseñanza enfrenta los siguientes aspectos de los desafíos que mencionan Bakker y Derry: 1) Se suele aprender a calcular la probabilidad sin poder hacer ningún tipo de inferencia; 2) La enseñanza de la probabilidad basada sólo en un enfoque (clásico o frecuencial) impide ver la relación fundamental que subyace en la ley de los grandes números; 3) Es necesario encontrar secuencias de enseñanza de la probabilidad que ofrezcan un marco adecuado para el desarrollo de una visión coherente y una operatividad fértil. Las lecciones del inferencialismo, propuestas por Bakker y Derry, orientan el análisis del presente trabajo.

2.2. Dificultades principales en el aprendizaje de la probabilidad

Una de las líneas más desarrolladas de la investigación en la educación matemática ha sido el estudio de errores y dificultades de los estudiantes al enfrentar diferentes conceptos matemáticos. Frecuentemente, los errores sistemáticos y dificultades persistentes no se pueden atribuir a distracciones, a falta de estudio o sólo a la propia complejidad del concepto, sino que responden a concepciones erróneas o teorías personales inconsistentes con el punto de vista normativo.

La construcción del concepto de probabilidad se puede ver como el proceso de cuantificación (o medición) de las nociones subjetivas de azar o incertidumbre: se trata de hacer medibles los acontecimientos que se perciben como impredecibles. Una vez asociada una medida a un evento, se espera que ésta pueda ser utilizada para hacer inferencias. Una de las dificultades para la comprensión de la probabilidad es lo que Konold (1991) llama el *enfoque del resultado aislado*. Este comportamiento puede ser una respuesta a la necesidad de implicar a la probabilidad en una inferencia o afirmación con sentido; bajo esta concepción errónea, los sujetos esperan ver las consecuencias de la probabilidad en un solo ensayo; por ejemplo, unas afirmaciones atribuidas a este enfoque son las siguientes: 75% u 80% de probabilidad de que llueva quiere decir que va a llover; 5% de probabilidad de que no llueva quiere decir que no va a llover.

Otra concepción errónea que tiene un parentesco con la anterior, es la *ley de los pequeños números* (Tversky y Kahneman, 1982). Bajo esta concepción, los sujetos creen que una muestra pequeña es representativa, teniendo una exagerada confianza en que las características de la muestra son una reproducción de las de la población; por ejemplo, se espera que en seis lanzamientos de un dado se presente una vez cada cara, ya que la probabilidad de cualquier cara es 1/6. Esta concepción también responde a la necesidad de implicar a la probabilidad en inferencias cuyas consecuencias sean verificables u observables. Infortunadamente ninguna de las dos concepciones puede satisfacer a la necesidad a la que responden. Por otro lado, en el intento de comprender la relación entre la probabilidad de un evento y la frecuencia con que ocurre el evento en muchas realizaciones del experimento, se presenta la tendencia de los estudiantes a razonar con frecuencias absolutas en lugar de frecuencias relativas. Esto los lleva a percibir como grandes las pequeñas diferencias; esto obstaculiza la comprensión de la LGN.

2.3. Niveles de razonamiento acerca del concepto de probabilidad

En este estudio se propone una jerarquía de razonamiento que es una adaptación del marco sobre la comprensión probabilística propuesto por Jones *et al*. (1997). Se definen, también, cuatro niveles que van de lo subjetivo a lo numérico pero, a diferencia del marco de Jones *et al*., se destacan dos tipos de elementos: a) los enfoques de probabilidad y sus relaciones, y b) el razonamiento con números relativos.

1. En el *nivel subjetivo* no se atribuye significado a la asignación de un número a un evento, significado que reflejaría la propensión de ocurrencia del evento, o se asigna un número de manera subjetiva, con base en la intuición, sin la posibilidad de hacer inferencias.

2. En el *nivel transicional* se asigna un número a un evento de forma subjetiva (reflejando la propensión de ocurrir del evento) con base en el contenido de las urnas o con base en las frecuencias relativas, pero sin relacionarlas adecuadamente.
3. En el *nivel cuantitativo informal* para la asignación de un número se maneja más de un enfoque y se percibe alguna relación entre su valoración subjetiva, el análisis del generador aleatorio (v. gr. Contenido de la urna) y sus frecuencias. De esta manera, se comienzan a formar inferencias; no se razona con números relativos y, por tanto, no se asimila la variabilidad.
4. En el *nivel numérico* para la asignación de un número a un evento se ponen en juego los tres enfoques y se perciben relaciones entre valoración subjetiva, análisis del generador aleatorio y frecuencias relativas. En particular, se razona con números relativos para asimilar adecuadamente la variabilidad y para formar inferencias.

3. Metodología

El presente es un estudio de caso que da seguimiento a la evolución del razonamiento sobre el concepto de probabilidad de un solo estudiante. Éste cursaba su tercer grado de bachillerato (17 años) y tiene buen manejo matemático de aritmética y álgebra, aunque nunca había estudiado tema alguno de probabilidad. El procedimiento para la obtención de datos fue a través de entrevistas en las que el estudiante resolvió varias tareas de probabilidad, una de las cuales consistió en un problema de comparación de probabilidades (Cuadro 1). Con este problema se realizaron dos sesiones de una hora cada una, además de otra en la que el estudiante aprendió elementos básicos del software Fathom y a interpretar resultados de simulaciones con dicho software. Las sesiones fueron filmadas y transcritas antes de ser analizadas.

Cuadro 1. Problema de comparación de probabilidades

En la urna A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la urna B se han metido 6 fichas negras y 2 fichas blancas (Figura 1).

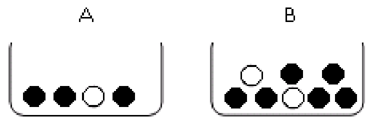

Figura 1

Se gana un premio si se extrae una ficha negra. Juan considera que elegir la urna B es lo más conveniente porque sin importar que son proporcionales hay mayor cantidad de fichas negras.

a) ¿Cuál es tu opinión sobre la explicación de Juan?

b) ¿Cómo medirías la posibilidad de que ocurra el evento “sacar una ficha negra de la urna A”? ¿Qué valor le asignarías?

c) ¿Cómo medirías la posibilidad de que ocurra el evento “sacar una ficha negra de la urna B”? ¿Qué valor le asignarías?

d) ¿De qué forma corroborarías la respuesta dada en a)?

4. Resultados

En lo siguiente se exponen y comentan algunos extractos de las entrevistas llevadas a cabo con el estudiante; se han organizado en cuatro episodios. Tienen un orden secuencial y muestran la evolución del pensamiento del estudiante.

Primer episodio. Miguel cree, erróneamente, que es correcta la afirmación de Juan en el encabezado de la pregunta y responde: “creo que si es mejor [elegir la urna B], por la [mayor] cantidad [de fichas negras respecto a la urna A]”. Su creencia se apoya en la mayor cantidad de bolas negras en términos absolutos, ignorando la proporcionalidad. Hay que hacer notar que el enfoque hacia las bolas de un color no obedece a la falta de habilidad para manejar la proporcionalidad, como se pone de manifiesto más adelante.

La respuesta de Miguel a la pregunta ¿Qué valor le asignarías [al evento “sacar ficha negra”]? pone en duda el significado mismo de la asignación: “¿Cómo un valor?... Es lo que no entiendo, qué valor. Son valores de qué o qué…”. Después de una breve intervención del entrevistador, el alumno muestra que percibe la igualdad de las proporciones de fichas negras: Responde que hay “75% para que salga [ficha] negra [de la urna A]” y “75% [de que salga ficha negra de la urna B]”. A pesar de que aparentemente ha calculado la probabilidad de obtener ficha negra en cada urna y visto que son iguales, mantiene su apreciación subjetiva de la situación: “Creo que tiene razón Juan”.

Miguel no tiene problemas para ver que la proporción de fichas negras en ambas urnas es 75%, pero cree que es más fácil obtener ficha negra ¿Qué hace falta para que el sujeto establezca una conexión entre la proporción de fichas negras y su creencia sobre la urna más favorable al evento? Hace falta que conciba que los eventos aleatorios se puedan medir de manera significativa, es decir, de manera que, a partir de la asignación, se puedan llevar a cabo inferencias cuyas conclusiones sean observables o verificables. La experimentación y la simulación con el objetivo de establecer un conocimiento informal de la ley de los grandes números, puede ser la vía para establecer y observar tales consecuencias.

Segundo episodio. Ahora se le pide a Miguel que extraiga aleatoriamente muestras de tamaño 10, con remplazo, una de la urna A (con una blanca y 3 negras) y otra de la urna B (con 2 blancas y 6 negras), que registre lo que obtiene y responda las preguntas del entrevistador. En el primer par de muestras Miguel obtuvo y escribió lo que se presenta en la Tabla 1.

Tabla 1. Resultados de 10 extracciones hechas de cada urna (B = ficha blanca N = ficha negra).

# de extracciones	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Urna A	N	N	N	N	N	N	B	B	N	N
Urna B	B	N	N	N	B	N	N	N	N	N

Una vez obtenidas las muestras y registrados los resultados, se le preguntó ¿Qué urna elegirías si quieres obtener bola negra? Miguel responde que elegiría la urna A, y explica que: “las primeras extracciones resultaron bolas negras”. Enseguida se le pide que extraiga otras muestras y obtiene muestras en las que predomina ficha negra en la urna A. Se le pide entonces que prediga las frecuencias de bolas blancas y negras en 100 y 1000 posibles experimentos en cada una de las urnas. Sus predicciones (Tablas 2 y 3) muestran su creencia de que hay más posibilidades de obtener bola negra en la Urna A.

Tabla 2. Predicción de la distribución de 100 extracciones

	# de fichas blancas	# de fichas negras
Urna A	25	75
Urna B	35	65
Total	60	140

Tabla 3. Predicción de la distribución de 1000 extracciones

	# de fichas blancas	# de fichas negras
Urna A	250	750
Urna B	380	620
Total	630	1370

En ambas predicciones la cantidad de fichas blancas y negras en la urna A es proporcional al contenido de ésta (1 a 3), mientras que su propuesta acerca de la urna B difiere de la que sería proporcional a su contenido. Su predicción se puede interpretar como el resultado de considerar tanto el contenido de la urna como las observaciones previas en las que la urna A parece más proclive a producir bolas negras que la B. En esta fase de la entrevista, el sujeto ha puesto en juego los elementos necesarios que constituyen el marco básico de la probabilidad: las proporciones de las fichas en las urnas y las frecuencias relativas, pero aún no articula de manera conveniente esos elementos.

En este episodio se refleja la creencia del estudiante acerca de la conexión entre su apreciación subjetiva del comportamiento de los resultados en las muestra pequeñas (10 repeticiones) con el comportamiento de los resultados en muestras más grandes o a largo plazo. La conexión es incorrecta debido a que percibe propiedades espurias basadas en la ley de los pequeños números: predominio de bolas negras en la urna A.

Tercer episodio. Una vez que Miguel había hecho experimentaciones y tratado de anticipar lo que ocurriría en un gran número de repeticiones del experimento, se le pidió que representara la situación en Fathom e hiciera simulaciones computacionales. En la tabla 4 y 5, se muestran los resultados que obtuvo de la simulación de 100 y 1000 extracciones:

Tabla 4. Resultados de la simulación computacional de 100 extracciones

	# de fichas blancas	# de fichas negras
Urna A	23	77
Urna B	29	71
Total	52	148

Tabla 5. Resultados de la simulación computacional de 1000 extracciones

	# de fichas blancas	# de fichas negras
Urna A	248	752
Urna B	246	754
Total	494	1506

Sobre los resultados de la Tabla 4 (100 extracciones) y al preguntarle qué observa, Miguel enfoca su atención en características circunstanciales: "Entre mayor cantidad de fichas negras haya [en las urnas] […] menos [fichas negras] salen [en la simulación]". No le es posible aún establecer las conexiones esperadas, ya que se han presentado dos dificultades: considera el contenido absoluto de las fichas negras en las urnas (no en frecuencias relativas, por ejemplo, en fracciones o porcentajes) y considera significativas a las diferencias de las frecuencias absolutas de las urnas.

Más adelante, como resultado de cuestionamientos del entrevistador, Miguel centra su atención en la relación aproximada de los resultados obtenidos con las proporciones de las fichas en las urnas, sin embargo, sigue considerando significativas las diferencias debido a que las realiza con números absolutos: "Salen con mayor frecuencia bolas negras de la urna A que de la urna B. Aquí [Tabla 5] […] salen dos [fichas] menos, pero aquí [Tabla 4] […] salen seis veces más".

En este episodio se evidencia que se volvió una creencia con relativa fuerza la observación del estudiante de que la urna A produce mayores fichas negras debido a que, en términos absolutos, el acumulado de ambas tablas favorece esta situación.

Cuarto episodio. El entrevistador cuestiona al estudiante buscando que haga comparaciones con números relativos. Se puede observar en el siguiente extracto de la entrevista cómo Miguel acepta despreciar pequeñas diferencias y acepta la relación de las frecuencias con las proporciones de las ficha en la urna:

Entrevistador: [preguntó acerca de la comparación de frecuencias relativas para el caso de 1,000 extracciones]

Alumno: Varía un poco.

Entrevistador: Y ahora ubiquémonos en el otro caso que hicimos acá [representado en el software] que son de 10,000… ¿Qué observas?

Alumno: Que es casi un cuarto de fichas blancas y tres cuartos de fichas negras de 10,000… Son iguales, creo que da igual la urna.

Entrevistador: ¿Y si fueran 100,000?

Alumno: [Inaudible]…

Entrevistador: ¿Entonces crees […] que daría igual cuál urna elegir?

Alumno: Creo que sí. Ya viéndolo bien, creo que si da igual la urna.

Entrevistador: Entonces, ¿qué opinarías respecto a estas dos preguntas [b) y c)]? ¿Qué valor le asignarías a la posibilidad de extraer una […] ficha negra?

Alumno: 75%.

En este episodio se muestra cómo el alumno, integra sus observaciones de las frecuencias relativas con las proporciones de fichas en la urna.

5. Discusión y conclusiones

En el curso de las entrevistas, el razonamiento de Miguel acerca de la probabilidad recorre los niveles que llevan de un nivel subjetivo al cuantitativo informal, preparándolo para el numérico. Al comienzo, en un nivel subjetivo, no comprende el significado de asignar un número a un evento aleatorio, pues no prevé la posibilidad de utilizarlo para hacer inferencias. Con ayuda de la experimentación, sus respuestas se pueden ubicar en el nivel transicional, pues utiliza las frecuencias para valorar las probabilidades de obtener ficha negra, sin embargo, sus respuestas están desviadas de las normativas por una concepción errónea: la ley de los pequeños números, en la que cree que pequeñas diferencias son significativas. En este nivel, la asignación de una probabilidad comienza a formar parte de inferencias, a saber, afirmaciones sobre lo que ocurrirá en una siguiente experimentación; esto permite que dicha asignación vaya cobrando significado o, en otras palabras, que vaya formando el concepto. El paso a la simulación de muchos experimentos permite al estudiante buscar la conexión entre la proporción de las fichas en las urnas y las frecuencias de bolas de un color. Dicha conexión no la logra establecer con facilidad debido a que observa los resultados de la simulación en términos de números absolutos, por lo que persiste la presencia de la ley de los pequeños números en su razonamiento. No es sino cuando considera las frecuencias relativas (en forma de porcentajes) que puede ver la tendencia decreciente de las diferencias y prever la convergencia. Es entonces que asigna la probabilidad a un evento con base en las proporciones de fichas en la urna, pero en conexión con la tendencia de las frecuencias relativas; consideramos que en este punto, su razonamiento se puede ubicar en cuantitativo informal. Para llegar al numérico haría falta ver el despliegue de su razonamiento en tareas más complejas.

Con relación a la primera lección del inferencialismo de Backer y Derry se puede decir que un aspecto importante en la evolución del razonamiento de Miguel ha sido la búsqueda de claves para elaborar inferencias, que en este caso se organizan alrededor de afirmaciones relacionadas con las proporciones de fichas de color en las urnas y las frecuencias de fichas de color en las muestras obtenidas, tanto de los experimentos físicos como de las simulaciones con el software. Con relación a la segunda lección, se ha visto que lo que permite hacer conexiones es considerar conjuntamente a los tres enfoques de probabilidad, el contenido de las urnas (que prefigura el concepto de espacio muestral), y el manejo de números relativos. La tarea no se redujo a una pregunta para aplicar una definición de probabilidad, ni a un procedimiento aislado alguno, sino a un problema complejo que permitió establecer diferentes conexiones, en particular, se manifiesta la importancia del razonamiento con números relativos para prever la relación de convergencia de la ley de los grandes números. Con relación a la tercera lección del inferencialismo, consideramos que las secuencias de enseñanza deben estar basadas en actividades que requieran y pongan en juego varios de los conceptos asociados a la probabilidad (espacio muestral, eventos, frecuencias, etc.) y que ofrezcan la posibilidad de integrar los diferentes enfoques de probabilidad.

Referencias

Albert, J.H. (2003). College students' conceptions of probability. *The American Statistician*, 57(1), 37–45.

Bakker, A. y Derry, J. (2011). Lessons from inferentialism for statistics education. *Mathematical thinking and learning*, 13(1-2), 15-26.

Brandom, R.B. (2000). *Articulating reasons: An introduction to inferentialism*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Ireland, S. y Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 339–370.

Jones, G., Langrall, C., Thornton, C. y Mogill, T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 101–125.

Jones, G. (2005). Reflections. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 367–372). New York: Springer.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (139-156). Netherlands: Kluwer.

Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., Finzer, W., Horton, N. J. y Kazak, S. (2011). Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability. *Mathematical Thinking and Learning*, 13, 68–86.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Belief in the law of small numbers. En D. Kahneman, P. Slovic, A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (24-31). New York: Cambridge University Press.