Espitia, C. 2013. Sistemas iterados de funciones vs sistemas dinámicos discretos. Revista Sigma, 11 (1). Pág. 51-58 http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulos/articulosX/2.pdf

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen XI N° 1 (2013), páginas 51–58

Sistemas Iterados de Funciones Vs Sistemas Dinámicos Discretos

Cristian Camilo Espitia Morillo[1]

Abstract. This work is about Discreet Dynamical Systems and Fractal Geometry, each one of these areas is quite spacious with a formal study development and relatively recent. Iterated Functions Systems and Discreet Dynamical Systems are two methods " dual" to build Fractals: firstly fractal as attractor from a Iterated Function System and other fractal as Julia set associated with a Discreet Dynamical System. This article shows how to build an Iterated Function System from a Discreet Dynamical System and vice versa.

Keywords. Iteration Functions Systems, Discreet Dynamical Systems, Julia Sets, Iteration Functions Systems Atractor's.

Resumen. Este trabajo se enmarca en las áreas de Sistemas Dinámicos Discretos y Geometría Fractal, cada una de estas dos áreas es bastante amplia con un desarrollo y estudio formal relativamente reciente. Los Sistemas Iterados de Funciones y los Sistemas Dinámicos Discretos, constituyen dos métodos en cierta forma "duales" para construir Fractales: por una parte fractal como Atractor de un Sistema Iterado de Funciones y por otra fractal como Conjunto de Julia asociado a un Sistema Dinámico Discreto. En el presente artículo se muestra como construir un Sistema Iterado de Funciones a partir de un Sistema Dinámico Discreto y viceversa.

Palabras Clave. Sistemas Iterados de Funciones, Sistemas Dinámicos Discretos, Conjunto de Julia, Atractor de un Sistema Iterado de Funciones.

INTRODUCCIÓN

Existe una gran variedad de ejemplos clásicos, de obtención de fractales por medio de uno de estos dos métodos, algunas veces usando sólo uno de ellos y otras usando los dos y haciendo notar, aunque no muy enfáticamente, esa especie de dualidad mencionada anteriormente. Al respecto pueden revisarse el trabajo de Adame [1] o las excelentes obras de Barnsley [2], Falconer [10] y Peitgen [15]. Particularmente, Barnsley es quien más aborda este tema, en el capítulo 7 de su libro, se dedica a mostrar como construir un Sistema Iterado de Funciones a partir de un Sistema Dinámico Discreto específico. Falconer generaliza esta idea mostrando que es también posible hacer una construcción similar a partir de Sistemas Dinámicos

[1]Licenciado en Matemáticas, Universidad de Nariño y estudiante de Maestría en Matemáticas Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga Colombia.

Discretos un poco más generales. Peitgen, en algunos capítulos, aunque no construye Sistemas Iterados de Funciones a partir de Sistemas Dinámicos Discretos muestra como obtener Fractales a partir de los dos métodos. Debe mencionarse que este trabajo surge a partir del trabajo de tesis en Maestría en Matemáticas titulado "Relaciones entre Sistemas Iterados de Funciones y Sistemas Dinámicos Discretos" que el autor adelanta en la Universidad Industrial de Santander, referencia citada en [9], la cual puede ser consultada para un tratamiento más amplio y formal de este tema.

En efecto las referencias bibliográficas que abordan esta dualidad son escasas en la literatura científica, en la bibliografía de este trabajo pueden encontrarse algunas referencias adicionales que pueden aportar principalmente fundamentos para introducirnos en esta temática. El presente trabajo pretende ser una referencia fundamentalmente enfocada en la dualidad "Sistemas Iterados de Funciones–Sistemas Dinámicos Discretos", para aquellos que quieran adentrarse en este maravilloso mundo de la geometría fractal, en particular lo relacionado a estos dos métodos de construcción fractal.
El objetivo del presente artículo se centra en las respuestas a estas dos preguntas:

1. ¿Dado un Sistema Dinámico Discreto con conjunto de Julia, bajo qué condiciones existe un Sistema Iterado de Funciones cuyo Atractor sea el conjunto de Julia, mencionado anteriormente?

2. ¿Dado un Sistema Iterado de Funciones con Atractor A, bajo qué condiciones existe un Sistema Dinámico Discreto cuyo conjunto de Julia sea el Atractor A, mencionado anteriormente?

1. PRELIMINARES

A continuación se presentan conceptos y resultados básicos tanto de la teoría de los Sistemas Iterados de Funciones, como de la teoría de los Sistemas Dinámicos Discretos.

Definición 1.1. *Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una función. Diremos que f es una **contracción** si existe $r \in \mathbb{R}, 0 \leq r < 1$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que $d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y)$, en tal caso la constante r se llama **factor de contracción** de f.*

Definición 1.2. *Sea (X, d) un espacio métrico y $\mathbb{H}(X)$ la familia de subconjuntos compactos no vacíos de X, la función $h : \mathbb{H}(X) \times \mathbb{H}(X) \to [0, \infty]$ definida por:*

$$h(A, B) := \max\{d(A, B), d(B, A)\}$$

*donde $d(A, B) = \max_{b \in B} \min_{a \in A} d(a, b)$ es una métrica conocida como la **métrica de Hausdorff***

2. SISTEMAS ITERADOS DE FUNCIONES Y SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

Definición 2.1. *Un **Sistema Iterado de Funciones** (denotado SIF) consta de un espacio métrico completo (X, d) y un conjunto finito de contracciones $\{w_n, n = 1, \ldots, N\}$ $w_n : X \to X$, se denota como $\{X; w_n, n = 1, \ldots, N\}$.*

El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad de lo que llamaremos el atractor de un SIF.

Teorema 2.2. *(Sabogal, [16], teorema 4.1.2)*
Sea $\{X; w_n, n = 1, \dots, N\}$ un SIF y $\mathbb{H}(X)$ la familia de subconjuntos compactos no vacíos de X con la métrica de Hausdorff generada por la métrica de X. La función

$$\begin{aligned} W : \mathbb{H}(X) &\to \mathbb{H}(X) \\ K &\mapsto \bigcup_{n=1}^{N} w_n(K) \end{aligned}$$

es una contracción sobre $(\mathbb{H}(X), h)$, su único punto fijo $A \in \mathbb{H}(X)$ satisface

$$A = W(A) = \cup_{n=1}^{N} w_n(A),$$

es llamado el ***atractor*** *del SIF y además para cualquier $K \in \mathbb{H}(X)$ se tiene*

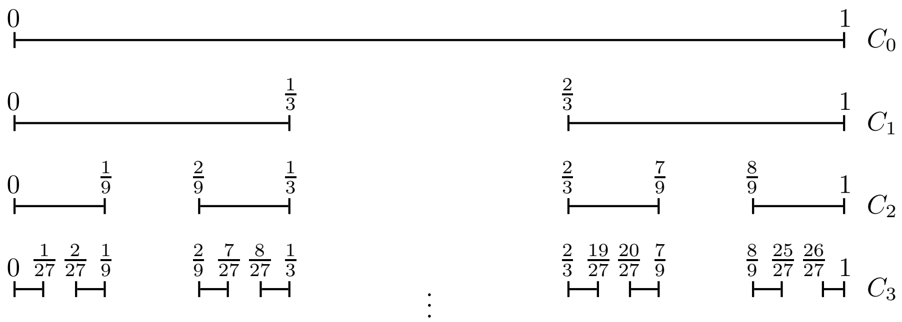
$$\lim_{n\to\infty} W^{\circ n}(K) = A.$$

En este trabajo se entenderá por **fractal** al atractor de un SIF, obsérvese que un conjunto, obtenido como el atractor de un SIF es *autosemejante* (o autosimilar), pues se obtiene como unión de un conjunto finito de copias reducidas de si mismo (Sabogal [16], pág. 101).

Ejemplo 2.1. *Considere el SIF $\{\mathbb{R}; w_1, w_2\}$ donde*

$$w_1(x) = \frac{1}{3}x, \qquad w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

En este caso $W : \mathbb{H}(\mathbb{R}) \to \mathbb{H}(\mathbb{R})$ se define como $W(K) = w_1(K) \cup w_2(K), \quad \forall K \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$.
El atractor de este SIF es el conjunto de Cantor, el cual en adelante se denotará $\mathcal{C}$, pues si $C_0 = [0, 1]$ se tiene:



$$C_1 = W(C_0) = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1]$$

$$C_2 = W(C_1) = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1]$$

$$\vdots$$

Figura 1.

Aplicando el teorema 2.2, se tiene que:

$$\text{Atractor del } SIF \ = \lim_{n\to\infty} C_n \ = \cap_{n=0}^{\infty} C_n \ = \mathcal{C}$$

Definición 2.3. *Un* ***Sistema Dinámico Discreto*** *(denotado SD) es una función $f : X \to X$ donde X es un conjunto no vacio, se denota $\{X, f\}$. La* ***órbita*** *de un punto $x \in X$ es la sucesión $\{f^{\circ n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$.*

La expresión $f^{\circ n}$ representa la composición de f consigo misma n veces, es decir f^0 es la función identidad, $f^{\circ 1} = f$, $f^{\circ 2} = f \circ f$, $f^{\circ 3} = f \circ f \circ f$ y así sucesivamente.[2]

Ejemplo 2.2. *Considere el sistema dinámico $\{\mathbb{R}, P\}$ donde P se define como:*

$$P(x) = \begin{cases} 3x & si\ x \leq \frac{1}{2} \\ 3x - 2 & si\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

es un sistema dinámico cuyo conjunto de puntos atrapados es el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$.

Si graficamos el "conjunto de puntos atrapados", esto es el conjunto de puntos con órbita acotada bajo la función P, se obtiene el conjunto de Cantor C, una representación gráfica de la función P se muestra en la Figura 2.

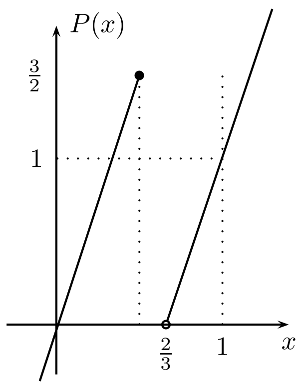


Figura 2.

Los ejemplos 2.2 y 2.1 revelan una interesante relación entre $SIF's$ y $SD's$; el conjunto C, atractor del SIF $\{\mathbb{R}; w_1, w_2\}$ dado en el ejemplo 2.1, coincide con el conjunto de puntos atrapados del sistema dinámico $\{\mathbb{R}, P\}$ dado en el ejemplo 2.2. Este hecho se justifica en la definición 2.5.

Definición 2.4. *Un SIF $\{X; w_1, \ldots, w_N\}$ con atractor A se llama* ***totalmente disconexo*** *si cada punto de su atractor posee una única dirección[3].*

Un SIF totalmente disconexo implica que las contracciones sean inyectivas y que el atractor del SIF, como espacio topológico, sea totalmente disconexo. Sin embargo un atractor totalmente disconexo no implica que el SIF sea totalmente disconexo, para un tratamiento más formal al respecto, véase [9].

Definición 2.5. *Sea $\{X; w_n, n = 1, ..., N\}$ un SIF totalmente disconexo con atractor A.* ***La transformación Shift*** *asociada a A es la función $S : A \to A$ definida por*

$$S(a) = w_n^{-1}(a) \qquad \forall a \in w_n(A)$$

El sistema dinámico $\{A, S\}$ es llamado el ***Sistema Dinámico Shift*** *asociado al SIF.*

Ejemplo 2.3. *Como se mostró en el ejemplo 2.1, el SIF que genera el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ es $\{\mathbb{R}; w_1(x) = \frac{1}{3}x, w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\}$, el atractor de este SIF, como se sabe es, totalmente*

[2] En adelante $f^n(x) = f^{\circ n}(x)$ denotará la órbita de x bajo f, es decir la sucesión $\{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$.
[3] Es decir, un único código.

disconexo luego según la definición 2.5, la estructura $\{\mathcal{C}; S\}$ *donde*

$$S(x) = \begin{cases} w_1^{-1} = 3x & si\ x \in w_1(\mathcal{C}) \\ w_2^{-1} = 3x - 2 & si\ x \in w_2(\mathcal{C}) \end{cases}$$

es un sistema dinámico cuyo conjunto de puntos atrapados es el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$*. Obsérvese que esta es la misma función* P *del ejemplo 2.2.*

Ejemplo 2.4. *Un* SIF *cuyo atractor es el triángulo de Sierpinski* $\mathcal{S}$ *con vértices en* $(0,0)$, $(0,1)$ *y* $(1,0)$ *es* $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3\}$ *donde*

$$w_1(x,y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2})$$
$$w_2(x,y) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y)$$
$$w_3(x,y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$$

El atractor de este SIF *se muestra en la figura 3.*

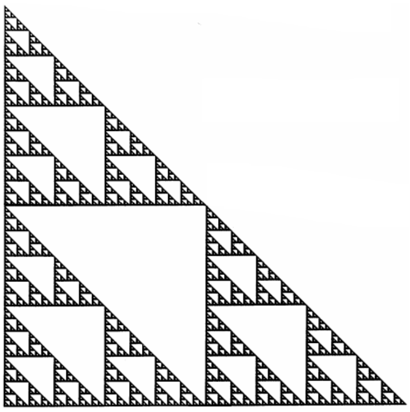


Figura 3.

Según la definición 2.5, un Sistema Dinámico correspondiente al SIF, es $\{\mathcal{S}, S\}$ donde

$$S(x,y) = \begin{cases} (2x, 2y-1) & \text{si } (x,y) \in w_1(\mathcal{S}) \backslash \{(0,\frac{1}{2})(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\} \\ (2x-1, 2y) & \text{si } (x,y) \in w_2(\mathcal{S}) \backslash \{(\frac{1}{2},0)\} \\ (2x, 2y) & \text{si } (x,y) \in w_3(\mathcal{S}) \end{cases}$$

3. DINÁMICAS EN EL PLANO COMPLEJO Y EN LA ESFERA DE RIEMANN

Definición 3.1. *Si* z *es un punto fijo de* $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ *en* $\mathbb{C}$ *y la derivada* $f'(z)$ *esta definida, se tiene que:*

(a) z *es un punto fijo* ***atractivo*** *si* $|f'(z)| < 1$

(b) z *es un punto fijo* ***repelente*** *si* $|f'(z)| > 1$, *y*

(c) z *es un punto fijo* ***indiferente*** *si* $|f'(z)| = 1$.

Definición 3.2. *Sea $\{X, f\}$ un sistema dinámico, un* ***punto periódico de f*** *es un punto x tal que $f^{\circ n}(x) = x$ para algún n, el menor entero n para el cual se cumple esta igualdad, se llama el* ***periodo*** *de x, la órbita de un punto periódico de f es llamada un* ***ciclo****. Un ciclo de periodo n es un* ***ciclo atractivo de*** *f si el ciclo contiene un punto periódico atractivo (como se definió en 3.1 (a)) de f de periodo n.*

Definición 3.3. *Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ un polinomio de grado mayor que 1. F_f denota el conjunto de puntos en $\mathbb{C}$ cuyas órbitas no convergen al infinito. Esto es*

$$F_f = \{z \in \mathbb{C} : \{|f^{\circ n}(z)|\}_{n=0}^{\infty} \text{ es acotada}\}$$

Este conjunto es llamado el ***Conjunto de Julia Lleno*** *asociado con el polinomio f. La frontera de F_f es llamada el* ***Conjunto de Julia*** *del polinomio f y se denota como J_f.*

Ejemplo 3.1. *El ejemplo más simple que ilustra estas definiciones, se tiene al considerar $f(z) = z^2$. Si $|z| < 1$, como $f^k(z) = z^{2^k}$ se sigue que $f^k(z) \to 0$ cuando $k \to \infty$, si $|z| > 1$ se tiene que $f^k(z) \to \infty$ cuando $k \to \infty$, además si $|z| = 1$ se tiene que $f^k(z)$ se ubica en la circunferencia $|z| = 1$ $\forall k$. De esta manera el conjunto de Julia lleno K_f es el disco unitario $|z| \le 1$ y el conjunto de Julia J_f es su frontera, es decir $|z| = 1$. Generalmente los conjuntos de Julia asociados a polinomios son fractales, en este caso especial J_f no es un fractal.*

El siguiente resultado muestra como construir un SIF a partir de un SD de la forma $\{\mathbb{C}, f_c(z) = z^2 + c\}$ cuando f_c no tiene un ciclo atractivo o cuando el conjunto de Julia de f_c es totalmente disconexo.

Teorema 3.4. *(Falconer [6], teorema 14.15)*
Suponga que $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6}) \approx 2{,}475\ldots$, entonces $J(f_c)$ es totalmente disconexo y es el atractor (en el sentido del teorema 2.2) de las contracciones dadas por las ramas de $f_c^{-1}(z) = \pm\sqrt{z - c}$.

La forma de construir un SIF a partir de un Sistema Dinámico de la forma $\{\hat{\mathbb{C}}, f_c(z) = z^2 + c\}$, independientemente de si f_c tiene o no ciclo atractivo, se muestra en el siguiente resultado. Obsérvese que este es un caso más general, pues el espacio es $\hat{\mathbb{C}}$ (la esfera de Riemann) donde ∞ es un punto fijo atractivo.

Teorema 3.5. *(Barnsley [1], teorema 2.1 pág. 268)*
Sea $c \in \mathbb{C}$. Suponga que el Sistema Dinámico $\{\hat{\mathbb{C}}; f(z) = z^2 + c\}$ posee un ciclo atractivo $\{z_1, z_2, \cdots, z_p\} \subset \mathbb{C}$, dado $\varepsilon > 0$, sea X la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ con $(p+1)$ bolas de radio ε removidas, centradas en cada punto del ciclo y en el infinito. La estructura

$$\{X; w_1(z) = \sqrt{z - c}, w_2(z) = -\sqrt{z - c}\}$$

es un SIF, donde la función $W : \mathbb{H}(X) \to \mathbb{H}(X)$, definida por

$$W(K) := w_1(K) \cup w_2(K)$$

es continua con respecto a la métrica de Hausdorff sobre $\mathbb{H}(X)$. Además W posee un único punto fijo J_f, y se tiene

$$\lim_{n\to\infty} W^{\circ n}(K) = J_f \qquad \forall K \in \mathbb{H}(X)$$

El resultado también se cumple si la órbita del origen $\{f^{\circ n}(O)\}_{n=0}^{\infty}$ converge a ∞ (i.e. f_c no tiene ciclo atractivo), en este caso $X = \hat{\mathbb{C}} \backslash B(\infty, \epsilon)$.

Ejemplo 3.2. *La función* $f(z) = z^2 - 1$ *tiene un ciclo atractivo de orden* 2*, este es* $\{0, -1\}$*. El teorema anterior asegura que la estructura* $\{X; \sqrt{z+1}, -\sqrt{z+1}\}$ *donde*

$$X = \hat{\mathbb{C}} \backslash \{B(0; 0{,}0001) \cup B(-1; 0{,}0001) \cup B(\infty; 0{,}0001)\}$$

es un SIF en el sentido del teorema 2.2, cuyo atractor es el conjunto de Julia J_f *que se muestra en la Figura 4.*

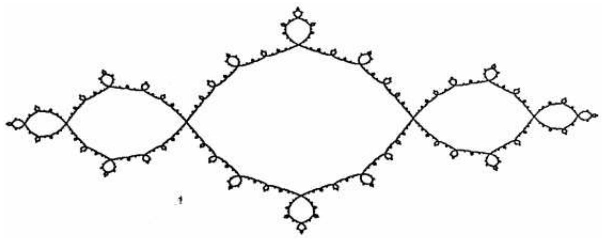


Figura 4.

Referencias

[1] Adame, E. : Sistemas de Funciones Iteradas y los Fractales, Fundación Universitaria Konrad Lorenz, 2005.

[2] Barnsley, M. : Fractals Everywhere (second edition), Academic Press, San Diego, 1993.

[3] Barnsley, M. : Superfractals, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[4] Barnsley, M. and Cain, F : The Escape Time Algorithm, Preprint, School of Mathematics, Georgia Institute of Technology 1988.

[5] Beardon, A. : Iteration of Rational Functions, Springer-Verlag, Cambridge, 1991.

[6] Blanchard, P. : Complex Analitic Dynamics On the Riemann Sphere, Bulletin of the American Mathematical Society, 11(1984), pp. 88-144.

[7] Brolin, H. : Invariant sets under iteration of rational functions, Arkiv for Mathematik, 6(1965), pp. 103-144.

[8] Conway, J. : Functions of one complex variable (second edition), Espringer-Verlag, New York, 1978.

[9] Espitia, C. : Relaciones entre Sistemas Iterados de Funciones y Sistemas Dinámicos Discretos, Tesis de Maestría en Matemáticas (en curso), Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga Colombia, 2012.

[10] Falconer, K. : Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications (second edition), Wiley, Scotland, 2003.

[11] Gamaliel, B. : Dinámica de los polinomios cuadráticos, Revista de Ciencias Básicas UJAT, 4(2005), pp. 3 - 15.

[12] Gamaliel, B. : Dinámica Holomorfa, Emalca 2010, Villahermosa Tabasco, 2010.

[13] Hata, M. : On the estructure of Self-Similar Sets, Journal of Applied Mathematics, 2(1985), pp. 381 - 414.

[14] Katagata, K. : Disconnected Julia sets of quartic polynomials and a new topology of the symbol space, Procedings Japan Academy, 84(2008), pp. 117 - 122.

[15] Peitgen, O. H. : Fractals and Chaos, new frontiers of science, Springer Verlag, New York, 1990.

[16] Sabogal, S. y Arenas, G. : Una introducción a la geometría fractal, Ediciones UIS, Bucaramanga Colombia, 2011.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
e-mail: espitiacristian@gmail.com