Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 3(1): 45–60 (1996)

PRODUCTOS DE KRONECKER

Jorge Poltronieri Vargas[1]

Resumen

En el estudio de las formas cuadráticas hemos obtenido fórmulas para el cálculo de covarianzas. En este trabajo realizamos un estudio sistemático de los productos que llamamos de Kronecker y que serán de gran ayuda para estos cálculos. Se introducen el producto de Kronecker asimétrico y antisimétrico.

Abstract

We obtain the formulae of covariances between random, introducting the Kronecker's products: asymmetrical and antisymmetrical.

1. Estudio de los productos de Kronecker

Nuestro interés es el de definir diferentes productos de Kronecker, que serán de gran utilidad para el cálculo de covarianzas.

Definición 1 *Sean $A_{n\times m}$ y $B_{p\times q}$ matrices, se define por el producto simétrico de Kronecker la matriz denotada $A\otimes B$ de tamaño $np\times mq$ tal que la entrada $ijkl$ (entrada kl del bloque ij) es $(A\otimes B)_{ijkl}=a_{ij}b_{kl}$, donde $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq m$, $1\leq k\leq p$, $1\leq l\leq q$.*

En general se puede definir $A\otimes B$ de otra manera, $(A_{n\times m}\otimes B_{p\times q})_{\alpha,\beta=p(i-1)+k,q(j-1)+l}$, donde

$$\underset{np\times mq}{(A_{n\times m}\otimes B_{p\times q})}_{\substack{\alpha,\beta=p(i-1)+k,\ q(j-1)+l\\ 1\leq i\leq n \quad 1\leq j\leq m\\ 1\leq k\leq p \quad 1\leq l\leq q}}=(A\otimes B)_{ijkl}=a_{ij}b_{kl}.$$

Definición 2 *Sean $A_{n\times m}$ y $B_{p\times q}$ matrices, se define por el producto asimétrico de Kronecker la matriz denotada $A\dot{\otimes} B$ de tamaño $np\times mq$ tal que la entrada $ijkl$ (entrada kl del bloque ij) es $(A\dot{\otimes} B)_{ijkl}=a_{il}b_{kj}=(A\otimes B)_{ilkj}$, es decir que en la entrada $ijkl$ de $A\dot{\otimes} B$ se encuentra la entrada $ilkj$ de $A\otimes B$, donde $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq q$, $1\leq k\leq p$, $1\leq l\leq m$.*

[1]Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica

Similarmente se puede definir

$$\underset{np\times mq}{(A_{n\times m}\dot{\otimes} B_{p\times q})}_{\substack{\alpha,\beta=p(i-1)+k,\\ 1\le i\le n\\ 1\le k\le p}\;\substack{m(j-1)+l\\ 1\le j\le q\\ 1\le l\le m}} = (A\otimes B)_{ilkj} = a_{il}b_{kj} = (A\otimes B)_{\substack{p(i-1)+k,\\ 1\le i\le n\\ 1\le k\le p}\;\substack{q(l-1)+j\\ 1\le l\le m\\ 1\le j\le q}}$$

Definición 3 *Sean $A_{n\times m}$ y $B_{p\times q}$ matrices, se define por el producto anti–simétrico de Kronecker la matriz denotada $A\ddot{\otimes} B$ de tamaño $nm\times pq$ tal que la entrada $ijkl$ (entrada kl del bloque ij) es $(A\ddot{\otimes} B)_{ijkl} = a_{ik}b_{jl} = (A\otimes B)_{ikjl}$, es decir que en la entrada $ijkl$ de $A\ddot{\otimes} B$ se encuentra la entrada $ikjl$ de $A\otimes B$, donde $1\le i\le n$, $1\le j\le p$, $1\le k\le m$, $1\le l\le q$.*

$$\underset{nm\times pq}{(A_{n\times m}\ddot{\otimes} B_{p\times q})}_{\substack{\alpha,\beta=m(i-1)+k,\\ 1\le i\le n\\ 1\le k\le m}\;\substack{q(j-1)+l\\ 1\le j\le p\\ 1\le l\le q}} = (A\otimes B)_{ikjl} = a_{ik}b_{jl} = (A\otimes B)_{\substack{p(i-1)+j,\\ 1\le i\le n\\ 1\le j\le p}\;\substack{q(k-1)+l\\ 1\le k\le m\\ 1\le l\le q}}$$

Algunas propiedades de estas matrices son

- $(A\otimes B)' = A'\otimes B'$
- $(A\dot{\otimes} B)' = B'\dot{\otimes} A'$
- $(A\ddot{\otimes} B)' = B\ddot{\otimes} A.$

Sabemos que $X = (X_1,\ldots,X_p)$, entonces se define $[X] = \begin{bmatrix} X_1\\ \vdots\\ X_p\end{bmatrix}_{np\times 1}$ o sea que la matriz X se transforma en un vector colocando todos los vectores X_i en columna. Así tenemos

- $[BXC] = C'\otimes B[X].$
- $[A][B]' = A'\ddot{\otimes} B'.$
- $\mathrm{tr}(BX'CXD) = [X']'\,B'D'\otimes C\,[X] = [X']'\,DB\otimes C'\,[X]$
- $[BC] = I\otimes B\,[C] = C'\otimes I\,[B] = C'\otimes B\,[I]$
- $[B']'(I\otimes C)[D] = 1\ddot{\otimes} B\,I\otimes C\,D\ddot{\otimes} 1 = 1\ddot{\otimes} B\,D'C'\ddot{\otimes} 1 = \mathrm{tr}(BCD)\ddot{\otimes} 1 = \mathrm{tr}(BCD)$
- $[xy'] = y\otimes x,\quad zy' = y'\otimes z = z\otimes y'$
- $xy' = x\otimes y' = x\ddot{\otimes} y' = y'\otimes x = x'\ddot{\otimes} y$
- $yq'\otimes xz' = yx'\ddot{\otimes} qz' = yz'\dot{\otimes} xq'$
- $xy'\ddot{\otimes} zq' = xz'\otimes yq' = [yx'][qz']'.$
- $x\otimes yz' = x1'\otimes yz' = xy'\ddot{\otimes} 1z' = xy'\ddot{\otimes} z'$

Otras propiedades interesantes son las siguientes.

- Si A es $m \times m$ con valores propios $\{a_1, \ldots, a_m\}$ y vectores propios $\{u_1, \ldots, u_m\}$ y B es $n \times n$ con valores propios $\{b_1, \ldots, b_n\}$ y vectores propios $\{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces $u_i \otimes v_j$ es un vector propio de $A \otimes B$ de valor propio $a_i b_j$.

- Sean $\{u_i/i = 1, \ldots, n\}$, $\{v_i/i = 1, \ldots, m\}$, $\{f_i/i = 1, \ldots, p\}$, $\{s_i/i = 1, \ldots, q\}$ bases canónicas de los espacios $I\!R^n$, $I\!R^m$, $I\!R^p$, $I\!R^q$ respectivamente. Sea $H_{ij} = u_i t'_j = u_i \otimes t'_j$ (respectivamente $J_{kl} = v_k s'_l$, $R_{kj} = v_k t'_j$, $L_{il} = u_i s'_l$), la matriz $n \times p$ es tal que la entrada ij vale 1 y las demás 0, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p$. El conjunto $\{H_{ij}/i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, p\}$ es la base canónica de $L(I\!R^n, I\!R^p)$.

Sea $K = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p H_{ij} \otimes H'_{ij}$, matriz $np \times np$ que denotamos K_{np}. La matriz K' aunque tiene la misma dimensión que K, es preferible denotarla K'_{pn} para tener mayor claridad en las aplicaciones.

Observación Podemos definir a partir de la matriz $M_{np\times mq}$, las matrices $\dot{M}_{np\times mq}$ y $\ddot{M}_{nm\times pq}$ de la siguiente manera

$$\dot{M}_{ijkl} = M_{ilkj}, \qquad \ddot{M}_{ijkl} = M_{ikjl}.$$

Se puede probar que si $M = A \otimes B$, entonces $\dot{M} = A \dot{\otimes} B$ y $\ddot{M} = A \ddot{\otimes} B$.

Observemos que si $M = \begin{pmatrix} M^{11} & \cdots & M^{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M^{n1} & \cdots & M^{nm} \end{pmatrix}$, $M_{ijkl} = M^{ij}_{kl}$ y además $MK = M \sum_{st} J^{st} \otimes J^{st\prime}$, i.e.

$$\begin{aligned}
(MK)_{\alpha\beta} &= \sum_{\gamma st} M_{\alpha\gamma} \left(J^{st} \otimes J^{ts}\right)_{\gamma\beta} \\
&= \sum_{jlst} M^{ij}_{kl} (J^{st})_{ju} (J^{ts})_{lv} \\
&= \sum_{jlst} M^{ij}_{kl} \delta_{sj} \delta_{tu} \delta_{tl} \delta_{sv} \\
&= \sum_{lst} M^{is}_{kl} \delta_{tu} \delta_{tl} \delta_{sv} \\
&= \sum_{st} M^{is}_{kt} \delta_{tu} \delta_{sv} = M^{iv}_{ku} = M_{ivku} \\
&= \dot{M}_{iukv} = \dot{M}_{\alpha\beta},
\end{aligned}$$

o sea $M\,K = \dot{M}$.

$$K_{np} = K'_{pn} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} H_{ij} \otimes H'_{ij} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} H'_{ij} \otimes H_{ij}$$

$$K = K' = K^{-1}$$

$$K_{mq}K'_{qm} = I_{mq} = I_m \otimes I_q = I_q \otimes I_m$$

$$K_{nq} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{q} L_{st} \otimes L'_{st}$$

$$K_{np}(A \otimes B) = B \dot{\otimes} A = (B \otimes A)K_{mq}$$

$$A \otimes B \; I_n \dot{\otimes} I_p = A \dot{\otimes} B$$

$$A \dot{\otimes} B \; C \dot{\otimes} D = AD \otimes BC$$

$$A \dot{\otimes} B \, K_{mq} = A \otimes B$$

$$I_m \dot{\otimes} I_q = K_{mq}$$

$$I_n \ddot{\otimes} I_p = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} H_{ij} \otimes H_{ij}$$

$$A \ddot{\otimes} B = I \otimes A'(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q} L_{ij} \otimes L_{ij})B' \otimes I$$

$$A \ddot{\otimes} B = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{p} AR_{kl} \otimes R_{kl}B$$

$$= \sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{q} L_{uv}B' \otimes A'L_{uv}$$

$$K_{nq} \, A \ddot{\otimes} B = A' \ddot{\otimes} B$$

$$E \otimes F \; A \ddot{\otimes} B = EAF' \ddot{\otimes} B$$

$$E \dot{\otimes} F \; A \ddot{\otimes} B = FA'E' \ddot{\otimes} B$$

$$A^{-1} \otimes B^{-1} \; A \dot{\otimes} B = I_n \dot{\otimes} I_p = A \dot{\otimes} B \; B^{-1} \otimes A^{-1}$$

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

$\mathrm{tr}(A \dot{\otimes} B) = \mathrm{tr}(AB)$, si $n = p = m = q$

$\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$, si $n = m$, $p = q$

Si A y B son ortogonales, $A \otimes B$ es ortogonal

$$K_{mq} = K'_{qm} = \textstyle\sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{m} J_{kl} \otimes J'_{kl}$$

$$K_{np}K'_{pn} = I_{np} = I_n \otimes I_p = I_p \otimes I_n$$

$$K_{mn} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n} R_{st} \otimes R'_{st}$$

$$A \dot{\otimes} B = K_{np}(B \otimes A) = (A \otimes B)K_{mq}$$

$$C \otimes D \; A \dot{\otimes} B = CA \dot{\otimes} DB$$

$$A \dot{\otimes} B \; E \otimes F = AF \dot{\otimes} BE$$

$$K_{np} \, A \dot{\otimes} B = B \otimes A$$

$$I_n \dot{\otimes} I_p = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} H_{ij} \otimes H'_{ij} = K_{np}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} H_{ij} \ddot{\otimes} H'_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} H_{ij} \otimes H'_{ij}$$

$$I_n \otimes I_p = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} H_{ij} \ddot{\otimes} H_{ij}$$

$$A \ddot{\otimes} B = A \otimes I(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} R_{ij} \otimes R_{ij})I \otimes B$$

$$A \ddot{\otimes} B \, K'_{mn} = A \ddot{\otimes} B'$$

$$A \ddot{\otimes} B \; C \otimes D = A \ddot{\otimes} C'BD$$

$$A \ddot{\otimes} B \; C \dot{\otimes} D = A \ddot{\otimes} D'B'C$$

$$A \ddot{\otimes} B \; C \ddot{\otimes} D = \mathrm{tr}(BC')A \ddot{\otimes} D$$

$$(A \dot{\otimes} B)^{-1} = B^{-1} \dot{\otimes} A^{-1}$$

$$\det(A \dot{\otimes} B) = \det(A \otimes B)$$

$$= (\det A)^p (\det B)^n$$

$\mathrm{tr}(A \ddot{\otimes} B) = \mathrm{tr}(AB')$, si $n = p$

$A \ddot{\otimes} B$ es singular y $\mathrm{rang}(A \ddot{\otimes} B) = 1$

Si $A > 0$ y $B > 0$, entonces $A \otimes B > 0$

1.1. Propiedades

Usando esta nomenclatura podemos determinar algunas propiedades concernientes a estos productos de Kronecker.

1. $(\underset{n\times m}{A}\,\dot\otimes\underset{pr\times qs}{(\underset{p\times q}{B}\otimes\underset{r\times s}{C})})_{\alpha\beta} = (A\dot\otimes(B\otimes C))_{\substack{pr(i-1)+k',\, m(j'-1)+l \\ 1\le i\le n \quad 1\le l\le m \\ 1\le k'\le pr \quad 1\le j'\le qs}} = a_{il}(B\otimes C)_{\substack{r(k-1)+x,\, s(j-1)+y \\ 1\le k\le p \quad 1\le j\le q \\ 1\le x\le r \quad 1\le y\le s}} =$ $a_{il}b_{kj}c_{xy}$ de lo que deducimos $(A\dot\otimes(B\otimes C))_{ijkyxl} = a_{il}b_{kj}c_{xy}$, o sea $(A\dot\otimes(B\otimes C))_{ijklxy} = a_{iy}b_{kj}c_{xl}$. La matriz es de tamaño $npr\times mqs$, $\alpha = pr(i-1)+r(k-1)+x$, $\beta = ms(j-1)+m(y-1)+l$.

2. $((A\dot\otimes B)\otimes C)_{\alpha\beta} = ((A\dot\otimes B)\otimes C)_{\substack{r(a-1)+x,\, s(b-1)+y \\ 1\le a\le np \quad 1\le b\le mq \\ 1\le x\le r \quad 1\le y\le s}} = (A\dot\otimes B)_{\substack{p(i-1)+k,\, m(j-1)+l \\ 1\le i\le n \quad 1\le j\le q \\ 1\le k\le p \quad 1\le l\le n}} c_{xy} =$
   $a_{il}b_{kj}c_{xy}$
   o sea $((A\dot\otimes B)\otimes C))_{ijklxy} = a_{il}b_{kj}c_{xy}$ y deducimos $(A\dot\otimes B)\otimes C \neq A\dot\otimes(B\otimes C)$. La matriz es de tamaño $npr\times mqs$, $\alpha = pr(i-1)+r(k-1)+x$, $\beta = ms(j-1)+s(l-1)+y$.

3. $((A\otimes B)\dot\otimes C)_{ijklxy} = a_{il}b_{ky}c_{xj}$, $npr\times mqs$, $\alpha = rp(i-1)+r(k-1)+x$; $\beta = mq(j-1)+q(l-1)+y$

4. $(A\otimes(B\dot\otimes C))_{ijklxy} = a_{ij}b_{ky}c_{xl}$, $npr\times mqs$, $\alpha = rp(i-1)+r(k-1)+x$; $\beta = mq(j-1)+q(l-1)+y$

5. $(A\dot\otimes(B\dot\otimes C))_{ijklxy} = a_{iy}b_{kl}c_{xj}$, $npr\times mqs$, $\alpha = rp(i-1)+r(k-1)+x$; $\beta = mq(j-1)+q(l-1)+y$

6. $(A\otimes(B\ddot\otimes C))_{ijklxy} = a_{ij}b_{kx}c_{ly}$, $npq\times mrs$, $\alpha = pq(i-1)+q(k-1)+l$; $\beta = rs(j-1)+s(x-1)+y$

7. $((A\ddot\otimes B)\otimes C)_{ijklxy} = a_{ik}b_{jl}c_{xy}$, $nmr\times pqs$, $\alpha = rm(i-1)+r(k-1)+x$; $\beta = sq(j-1)+s(l-1)+y$

8. $((A\ddot\otimes B)\dot\otimes C)_{ijklxy} = a_{ik}b_{ly}c_{xj}$, $nrm\times spq$, $\alpha = rm(i-1)+r(k-1)+x$; $\beta = pq(j-1)+q(l-1)+y$

9. $(A\dot\otimes(B\ddot\otimes C))_{ijklxy} = a_{iy}b_{kx}c_{jl}$, $npq\times rms$, $\alpha = pq(i-1)+q(k-1)+x$; $\beta = ms(j-1)+m(l-1)+y$

10. $A\dot\otimes(B\dot\otimes C) = (A\dot\otimes B)\dot\otimes C$.

11. $A\ddot\otimes(B\ddot\otimes C) = (A\ddot\otimes B)\ddot\otimes C$.

12. $(A\ddot\otimes B)\dot\otimes C) \neq A\ddot\otimes(B\dot\otimes C)$.

Observación Recordemos que $(A\otimes B)\ddot\otimes C = [A'\otimes B'][C']'$ matriz $npmq\times rs$ y

$$((A\otimes B)\ddot\otimes C)_{mq(i'-1)+k',s(x-1)+y} = (A\otimes B)_{p(i-1)+k,q(j-1)+l}c_{xy} = a_{ij}b_{kl}c_{xy},$$

donde $1\le i'\le np$, $1\le k'\le mq$, $1\le x\le r$, $1\le y\le s$, $1\le i\le n$, $1\le k\le p$, $1\le j\le m$, $1\le q\le l$, i.e.

$$((A\otimes B)\ddot\otimes C)_{mqp(i-1)+mq(k-1)+q(j-1)+l,s(x-1)+y} = a_{ij}b_{kl}c_{xy}.$$

De igual manera

$$(A \ddot{\otimes}(B \otimes C))_{m(i-1)+k,qrs(j-1)+qs(x-1)+s(l-1)+y} = a_{ik}b_{jl}c_{xy}$$
$$(A \ddot{\otimes}(B \dot{\otimes} C))_{m(i-1)+k,qrs(j-1)+qs(x-1)+q(y-1)+l} = a_{ik}b_{jl}c_{xy}.$$

Observemos que no podemos escribir los productos $A \ddot{\otimes}(B \otimes C)$ y $(A \otimes B) \ddot{\otimes} C$ como el producto de tres matrices no triviales (vectores o constantes) $A^* \otimes B^* \otimes C^*$.

1.2. Algunos resultados importantes

Consideremos una matriz $A_{n\times m}$ y $\mu_{p\times 1}$, $\rho_{q\times 1}$ vectores, entonces

- $(A \dot{\otimes} \mu) \otimes \rho = A \otimes \mu\rho'$
- $(\mu' \dot{\otimes} A) \otimes \rho = A \otimes \rho\mu'$
- $(\mu \otimes A) \otimes \rho' = \mu\rho' \dot{\otimes} A$
- $\mu' \otimes (A \ddot{\otimes} \rho) = A \ddot{\otimes} \mu\rho'$
- $\mu' \otimes (A \otimes \rho) = A \dot{\otimes} \mu\rho'$
- $(\mu' \ddot{\otimes} A) \otimes \rho = \mu\rho' \ddot{\otimes} A.$

2. Matrices de Kronecker

La manera de multipicar matrices usando productos de Kronecker, nos sugiere la idea de una clase particular de matrices que llamaremos matrices de Kronecker.

Definición 4 *Una matriz C es una matriz de Kronecker si existen matrices A y B no triviales tales que $C = A \otimes B$ o $C = A \dot{\otimes} B$ o $C = A \ddot{\otimes} B$.*

Vamos estudiar aquí algunos casos particularmente interesantes. Sea $M = (M^1, \ldots, M^t)$ una matriz $p \times tq$ com $M^i_{p\times q}$, $i = 1, \ldots, t$. Sea $A_{n\times m}$ una matriz, entonces $A \otimes M = (a_{ij}M)$ es una matriz $np \times mtq$.

2.1. Estudio del caso $\otimes$

1. La entrada $(A \otimes M)_{ijk\rho} = a_{ij}m_{k\rho}$, donde la entada $k\rho$ de M se identifica por $m_{k\rho} = m^s_{kl}$, con $\rho = (s-1)q + l$, $1 \leq s \leq t$, $1 \leq l \leq q$, o sea la entrada $k\rho$ de M se identifica con la entrada kl de bloque s de M, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq p$, $1 \leq \rho \leq tq$.

   Así $(A \otimes M)_{\alpha;\beta=p(i-1)+k;tq(j-1)+\rho=p(i-1)+k;tq(j-1)+q(s-1)+l}$.

   Se puede estar tentado a considerar $(A \otimes M)_{ijks1l}$ para identificar la representación anterior de $A \otimes M$, pero no debemos olvidar que $A \otimes M$ no es un producto de tres matrices.

Si $A = a$ es $n \times 1$, $(a \otimes M)_{i1k\rho} = a_i m^s_{kl}$, $np \times tq$. Sin embargo, sin ser $a \otimes M$ un producto $A^* \otimes M^*$, $np \times tq$ se puede identificar la entrada $iskl$ de $a \otimes M$ de la siguiente manera $(a \otimes M)_{p(i-1)+k;q(s-1)+l} = (a \otimes M)_{i1k\rho} = a_i m^s_{kl}$. No es correcto escribir $(a \otimes M)_{iskl} = a_i m^s_{kl}$ ya que $a \otimes M$ no es de la forma $A^* \otimes M^*$ para $A^*_{n\times m}$, $M^*_{p\times q}$. Sin embargo se puede determinar la entrada $iskl$ de $a \otimes M$, la cual es $a_i m^s_{kl}$, pues

$$a \otimes M = \begin{pmatrix} a_1 M^1 & \cdots & a_1 M^t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n M^1 & \cdots & a_n M^t \end{pmatrix}$$

que es $np \times tq$, con $1 \le i \le n$, $1 \le s \le t$, $1 \le k \le p$, $1 \le l \le q$, por lo que $(a \otimes M)_{iskl} = a_i m^s_{kl}$. Sabemos que la notación $(a \otimes M)_{iskl}$ no es correcta pero en algunas ocasiones es muy útil. Lo correcto es $(a \otimes M)_{i1k\rho}$, donde $\rho = (s-1)q + l$.

Si $t = 1$, $\rho = l$, i.e. $(A \otimes M)_{ijkl} = a_{ij} m^1_{kl}$, $np \times mq$ y además $(a \otimes M)_{i1kl} = a_i m_{kl}$, $np \times q$.

2. La matriz $M \otimes A$ es $np \times mtq$ por lo que $(M \otimes A)_{i\rho kl} = m_{i\rho} a_{kl} = m^s_{ij} a_{kl}$, con $\rho = (s-1)q + j$, $1 \le s \le t$, $1 \le i \le p$, $1 \le \rho \le qt$, $1 \le j \le q$, $1 \le k \le n$, $1 \le l \le m$.

   Si $t = 1$, $\rho = j$, $(M \otimes A)_{ijkl} = m^1_{ij} a_{kl}$, $np \times mq$.

   Si $A = a_{n\times 1}$, $l = 1$, $(M \otimes a)_{i\rho k1} = a_k m_{i\rho} = a_k m^s_{ij} = (M \otimes a)_{iskj}$.

   Si $t = 1$, $(M \otimes a)_{ijk1} = m_{ij} a_k$ lo que indica el peligro de esta notación pues se está tentado a escribir que si $t = 1$, $(M \otimes a)_{ijk1} = (M \otimes a)_{i1kj}$ que no tiene sentido.

3. La matriz $(A' \otimes M')$ es $tmq \times np$, i.e. $(A' \otimes M')_{ij\rho l} = m'_{\rho l} a'_{ij} = m^s_{lk} a_{ji}$, con $\rho = (s-1)q + k$, $1 \le s \le t$, $1 \le k \le q$, $1 \le j \le n$, $1 \le i \le m$.

   Si $t = 1$, $\rho = k$, $(A' \otimes M')_{ijkl} = m^1_{lk} a_{ji}$, $mq \times np$.

   $(a' \otimes M')_{1j\rho l} = a_j m^s_{lk} = (a' \otimes M')_{sjkl}$ y si $t = 1$, $(a' \otimes M')_{1jk1} = m_{lk} a_j$.

4. La matriz $(M' \otimes A')$ es $mtq \times np$ i.e. $(M' \otimes A')_{\rho jkl} = m_{j\rho} a_{lk} = m^s_{ji} a_{lk}$, con $\rho = (s-1)q + i$, $1 \le s \le t$, $1 \le i \le q$, $1 \le j \le p$, $1 \le l \le n$, $1 \le k \le m$.

   Si $t = 1$, $\rho = i$, $(M' \otimes A')_{ijkl} = m^1_{ij} a_{lk}$, $mq \times np$.

   $(M' \otimes a')_{\rho j1l} = a_l m^s_{ji} = (M' \otimes a')_{sjil}$ y si $t = 1$, $(M' \otimes a')_{ij1l} = m_{ij} a_l$.

   Observamos que la notación $(M' \otimes a')_{sjil}$ se presta a confusión pues en el caso $t = 1$, se tiene $s = 1$ i.e. se está tentado a escribir $(M' \otimes a')_{1jil} = (M' \otimes a')_{ij1l}$, lo que no tiene sentido.

2.2. Estudio del caso $\dot{\otimes}$

1. La entrada $(A\dot{\otimes}M)_{i\rho kl}=a_{il}m_{k\rho}=a_{il}m^s_{kj}$, donde $\rho=(s-1)q+j$, $1\le s\le t$, $1\le j\le q$, $1\le i\le n$, $1\le l\le m$, $1\le k\le p$.
   Así $(A\dot{\otimes}M)_{p(i-1)+k;m(\rho-1)+l=p(i-1)+k;mq(s-1)+m(j-1)+l}$, $np\times mtq$.

   Si $t=1$, $\rho=j$, i.e. $(A\dot{\otimes}M)_{ijkl}=a_{il}m^1_{kj}$, $np\times mq$.

   $(a\dot{\otimes}M)_{i\rho k1}=a_im^s_{kj}$, y si $t=1$, $(a\dot{\otimes}M)_{ijk1}=a_im_{kj}$ $np\times q$.

   Observemos que $(a\dot{\otimes}M)$ es de tamaño $np\times tq$ y se podría buscar la entrada $iskj$ por $(a\dot{\otimes}M)_{iskj}=a_im^s_{kj}$ y si $t=1$ se escribe $(a\dot{\otimes}M)_{i1kj}=(a\dot{\otimes}M)_{ijk1}$ que no tiene sentido.

2. $(M\dot{\otimes}A)_{ijk\rho}=m_{i\rho}a_{kj}=m^s_{il}a_{kj}$, con $\rho=(s-1)q+j$, $1\le s\le t$, $1\le l\le q$, $1\le i\le p$, $1\le k\le n$, $1\le j\le m$, $np\times mtq$.
   Así $(M\dot{\otimes}A)_{n(i-1)+k;tq(j-1)+\rho=n(i-1)+k;tq(j-1)+q(s-1)+l}$.

   Si $t=1$, $\rho=l$, $(M\dot{\otimes}A)_{ijkl}=m^1_{il}a_{kj}$, $np\times mq$.

   $(M\dot{\otimes}a)_{i1k\rho}=a_km_{i\rho}=a_km^s_{il}$. Si $t=1$, $(M\dot{\otimes}a)_{i1kl}=a_km_{il}$.

   La entrada $iskl$ de la matriz $(M\dot{\otimes}a)$ $np\times tq$ es $(M\dot{\otimes}a)_{iskl}=a_km^s_{il}=(M\dot{\otimes}a)_{i1k\rho}$ y si $t=1$ las notaciones coinciden.

3. La matriz $(A'\dot{\otimes}M')$ es $mtq\times np$ por lo que $(A'\dot{\otimes}M')_{ij\rho l}=m_{j\rho}a_{li}=m^s_{jk}a_{li}$, con $\rho=(s-1)q+k$, $1\le k\le q$, $1\le l\le n$, $1\le i\le m$, $1\le j\le p$.
   Así $(A'\dot{\otimes}M')_{tq(i-1)+\rho;n(j-1)+l=tq(i-1)+q(s-1)+k;n(j-1)+l}$.

   Si $t=1$, $\rho=k$, $(A'\dot{\otimes}M')_{ijkl}=m_{jk}a_{li}$, $mq\times np$.

   $(a'\dot{\otimes}M')_{1j\rho l}=a_lm^s_{jk}$ y si $t=1$, $(a'\dot{\otimes}M')_{1jkl}=a_lm_{jk}$.

   La entrada $sjkl$ de la matriz $(a'\dot{\otimes}M')$ $tq\times np$ es $(a'\dot{\otimes}M')_{sjkl}=a_lm^s_{jk}$ y escribimos $(a'\dot{\otimes}M')_{1j\rho l}=(a'\dot{\otimes}M')_{sjkl}$ y si $t=1$ las notaciones coinciden.

4. La matriz $(M'\dot{\otimes}A')$ es $mtq\times np$ por lo que $(M'\dot{\otimes}A')_{\rho jkl}=m^s_{li}a_{jk}$, con $\rho=(s-1)q+i$, $1\le i\le q$, $1\le j\le n$, $1\le k\le m$, $1\le l\le p$.
   Así $(A'\dot{\otimes}M')_{\rho jkl=mq(s-1)+m(i-1)+k;p(j-1)+l}$.

   Si $t=1$, $\rho=i$, $(M'\dot{\otimes}A')_{ijkl}=m_{li}a_{jk}$, $mq\times np$.

   $(M'\dot{\otimes}a')_{\rho j1l}=a_jm^s_{li}=(M'\dot{\otimes}a')_{sjil}$ y si $t=1$, $(M'\dot{\otimes}a')_{ij1l}=(M'\dot{\otimes}a')_{1jil}$ y las notaciones coinciden.

2.3. Estudio del caso $\ddot{\otimes}$

1. La entrada $(A \ddot{\otimes} M)_{ijk\rho} = a_{ik} m_{jl}^{s}$, donde $\rho = (s-1)q + l$, $1 \leq l \leq q$, $1 \leq j \leq p$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq s \leq t$. Así $(A \ddot{\otimes} M)_{m(i-1)+k;tq(j-1)+q(s-1)+l}$, $nm \times tpq$.

   Si $t = 1$, $\rho = l$, i.e. $(A \ddot{\otimes} M)_{ijkl} = a_{ik} m_{jl}^{1}$, $nm \times pq$.

   $(a \ddot{\otimes} M)_{ij1\rho} = a_i m_{jl}^{s}$, y si $t = 1$, $(a \ddot{\otimes} M)_{ij1l} = a_i m_{jl}$ $n \times pq$.

2. $(M \ddot{\otimes} A)_{ij\rho l} = m_{i\rho} a_{jl} = m_{ik}^{s} a_{jl}$, con $\rho = (s-1)q + k$, $1 \leq s \leq t$, $1 \leq k \leq q$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq l \leq m$, $tpq \times nm$.

   Si $t = 1$, $\rho = k$, $(M \ddot{\otimes} A)_{ijkl} = m_{ik}^{1} a_{jl}$, $pq \times nm$.

   $(M \ddot{\otimes} a)_{ij\rho 1} = a_j m_{ik}^{s}$. Si $t = 1$, $(M \ddot{\otimes} a)_{ijk1} = a_j m_{ik}$.

   $(M \ddot{\otimes} a)_{ij\rho 1} = a_j m_{ik}^{s}$ y si $t = 1$, $(M \ddot{\otimes} a)_{ijk1} = a_j m_{ik}$.

3. La matriz $(A' \ddot{\otimes} M')$ es $nm \times tpq$ por lo que $(A' \ddot{\otimes} M')_{i\rho kl} = m_{l\rho} a_{ki} = m_{lj}^{s} a_{ki}$, con $\rho = (s-1)q + j$, $1 \leq s \leq t$, $1 \leq j \leq q$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq l \leq p$.

   Si $t = 1$, $\rho = j$, $(A' \ddot{\otimes} M')_{ijkl} = m_{lj} a_{ki}$, $nm \times pq$.

   $(a' \ddot{\otimes} M')_{1\rho kl} = a_k m_{lj}^{s}$ y si $t = 1$, $(a' \ddot{\otimes} M')_{1jkl} = a_k m_{lj}$.

4. La matriz $(M' \dot{\otimes} A')$ es $tpq \times nm$ por lo que $(M' \dot{\otimes} A')_{\rho jkl} = m_{ki}^{s} a_{lj}$, con $\rho = (s-1)q + i$, $1 \leq i \leq q$, $1 \leq s \leq t$, $1 \leq k \leq p$, $1 \leq l \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

   Si $t = 1$, $\rho = i$, $(M' \ddot{\otimes} A')_{ijkl} = m_{ki} a_{lj}$, $pq \times nm$.

   $(M' \ddot{\otimes} a')_{\rho 1kl} = a_l m_{ki}^{s} = (M' \ddot{\otimes} a')_{sjil}$ y si $t = 1$ $(M' \ddot{\otimes} a')_{i1kl} = a_l m_{ki}$.

3. Cálculo de momentos de orden 3

Consideremos $x_{n\times 1}$, $y_{m\times 1}$, $z_{p\times 1}$, $u_{q\times 1}$ vectores aleatorios y consideremos $E(y' \otimes z \otimes u') = E(y' \otimes zu') = E(y_1 zu', \ldots, y_m zu') = (M^1, \ldots, M^m) = M_{yu}^{\cdot z}$, con $M^i = E(y_i zu')_{p\times q}$, de dimensión $p \times mq$. Recordemos que $(M_{yu}^{\cdot z})_{1jkl} = m_{kl}^{j} = E(y_j (zu')_{kl})$. $E(y \otimes z' \otimes u) = E(yz' \otimes u) = \begin{pmatrix} yz'u_1 \\ \vdots \\ yz'u_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N^1 \\ \vdots \\ N^q \end{pmatrix} = M_{yu}^{\cdot z}$, con $N^i = E(u_i yz')_{m\times p}$ de dimensión $mq \times p$. Ahora

$$\left.\begin{aligned} E((y \otimes z' \otimes u)') &= M_{yu}^{\cdot z} \\ E(y \otimes z' \otimes u) &= M_{\cdot z}^{yu} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (M_{yu}^{\cdot z})' = M_{\cdot z}^{yu}$$

$$E(x' \otimes z \otimes u) = E(z \otimes x' \otimes u) = (M_{\cdot x}^{xu})'$$

$$E(x \otimes z \otimes u') = E(x \otimes zu') = E \begin{pmatrix} x_1 zu' \\ \vdots \\ x_n zu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^1 \\ \vdots \\ M^n \end{pmatrix} = (M_{\cdot u}^{xz})'.$$

En resumen

1. $E(x' \otimes z \otimes u') = M^{\cdot z}_{xu}, \;\; p \times nq$
2. $E(x \otimes z' \otimes u) = M^{xu}_{\cdot z}, \;\; nq \times p$
3. $E(x \otimes z \otimes u') = E(x \otimes u' \otimes z) = M^{xz}_{\cdot u}, \;\; np \times q$
4. $E(x' \otimes z' \otimes u) = E(x' \otimes u \otimes z') = M^{\cdot u}_{xz}, \;\; q \times np$
5. $E(x \otimes z' \otimes u') = E(z' \otimes x \otimes u') = M^{\cdot x}_{zu}, \;\; n \times pq$
6. $E(x' \otimes z \otimes u) = E(z \otimes x' \otimes u) = M^{zu}_{\cdot x}, \;\; pq \times n.$

Observemos que si $x = z = u$, $E(x \otimes x' \otimes x) = M^{x\cdot}_{xx} = M_3'$, $n^2 \times n$ y $E(x' \otimes x \otimes x) = M^{\cdot x}_{xx} = M_3$, $n \times n^2$.

a) Consideremos la expresión siguiente

$$\begin{aligned}
&(x-\mu) \otimes (y-\nu)(z-\rho)' = (x-\mu) \otimes (yz' - \nu z' - y\rho' + \nu\rho') = \\
&x \otimes yz' - x \otimes \nu z' - x \otimes y\rho' + x \otimes \nu\rho' - \mu \otimes yz' + \mu \otimes \nu z' + \mu \otimes y\rho' - \mu \otimes \nu\rho' = \\
&x \otimes y \otimes z' - xz' \,\dot{\otimes}\, \nu - xy' \,\ddot{\otimes}\, \rho' + x \otimes \nu\rho' - \mu \otimes yz' + \mu \otimes \nu z' + \mu \otimes y\rho' - \mu \otimes \nu\rho'.
\end{aligned}$$

$$E((x-\mu) \otimes (y-\nu)(z-\rho)') = M^{\cdot z}_{xy} - M_{xz} \,\dot{\otimes}\, \nu - M'_{yx} \,\ddot{\otimes}\, \rho' - \mu \otimes M_{yz} + 2\mu \otimes \nu\rho'.$$

Si $x = y = z$, $E((x-\mu)\otimes(x-\mu)(x-\mu)') = M_3 - M_2 \,\dot{\otimes}\, \mu - M_2 \,\ddot{\otimes}\, \mu' - \mu \otimes M_2 + 2\mu \otimes \mu\mu'$, donde $M_2 = M_{xx} = \Sigma + \mu\mu'$ i.e. $E((x-\mu)\otimes(x-\mu)(x-\mu)') = M_3 - \Sigma \,\dot{\otimes}\, \mu - \Sigma \,\ddot{\otimes}\, \mu' - \mu \otimes \Sigma - \mu \otimes \mu\mu'$.

b) Consideremos la expresión siguiente

$$\begin{aligned}
&(x-\mu) \,\ddot{\otimes} (y-\nu)(z-\rho)' = (x-\mu)1' \,\ddot{\otimes} (y-\nu)(z-\rho)' = (x-\mu)(y-\nu)' \otimes 1(z-\rho)' = \\
&x \,\ddot{\otimes}\, yz' - x \,\ddot{\otimes}\, \nu z' - x \,\ddot{\otimes}\, y\rho' + x \,\ddot{\otimes}\, \nu\rho' - \mu \,\ddot{\otimes}\, yz' + \mu \,\ddot{\otimes}\, \nu z' + \mu \,\ddot{\otimes}\, y\rho' - \mu \,\ddot{\otimes}\, \nu\rho'.
\end{aligned}$$

$$E((x-\mu) \,\ddot{\otimes} (y-\nu)(z-\rho)') = M^{\cdot x}_{yz} - M'_{zx} \,\dot{\otimes}\, \nu' - M'_{yx} \otimes \rho' - \mu \,\ddot{\otimes}\, M_{xz} + 2\mu \,\ddot{\otimes}\, \nu\rho'.$$

4. Momentos de orden 4

Consideremos $x_{n\times 1}$, $y_{m\times 1}$, $z_{p\times 1}$, $u_{q\times 1}$ vectores aleatorios. La esperanza matemática $E(xy' \otimes zu')_{ijkl} = E(x_i y_j z_k u_l) = M_{ijkl} = (M^{xz}_{yu})_{ijkl}$, donde M^{xz}_{yu} es la matriz $np \times mq$ de momentos de orden 4, de las variables x, y, z, u.

La expresión $E((x-\mu)(y-\nu)' \otimes (z-\xi)(u-\theta)') = \bar{M}^{xz}_{yu}$ matriz de momentos centrados de orden 4, de las variables x, y, z, u. Así

$$\begin{aligned}
&E(xy' \otimes zu' - xy' \otimes z\theta' - xy' \otimes \xi u' + xy' \otimes \xi\theta' - \mu y' \otimes zu' + \mu y' \otimes z\theta' + \mu y' \otimes \xi u' - xy' \otimes \xi\theta' \\
&-x\nu' \otimes zu' + x\nu' \otimes z\theta' + x\nu \otimes zu' - x\nu' \otimes \xi\theta' + \mu\nu' \otimes zu' - \mu\nu' \otimes z\theta' - \mu\nu' \otimes \xi u' + \mu\nu' \otimes \xi\theta') \\
&= M^{xz}_{yu} - (M^{\cdot y}_{xz})' \otimes \theta' - M^{\cdot x}_{yu} \otimes \xi - \mu \otimes M^{\cdot z}_{yu} - \nu' \otimes (M^{\cdot u}_{xz})' + M_{xy} \otimes \xi\theta' + \mu\theta' \,\dot{\otimes}\, M_{zy} \\
&+M_{xu} \,\dot{\otimes}\, \xi\nu' + \mu\nu' \otimes M_{zu} + \mu\xi' \,\ddot{\otimes}\, M_{yu} + M_{xz} \,\ddot{\otimes}\, \nu\theta' - 3\mu\nu' \otimes \xi\theta'.
\end{aligned}$$

Observemos que:

1. $E(\mu y' \otimes zu') = \mu \otimes E(y' \otimes z \otimes u') = \mu \otimes M_{yu}^{\cdot z}$
2. $E(xy' \otimes \xi u') = E(x \otimes y' \otimes u' \otimes \xi) = M_{yu}^{\cdot x} \otimes \xi$
3. $E(x\nu' \otimes zu') = E(\nu' \otimes x \otimes z \otimes u') = \nu' \otimes M_{\cdot u}^{xz} = \nu' \otimes (M_{xz}^{\cdot u})'$
4. $E(xy' \otimes z\theta') = E(x \otimes y' \otimes z) \otimes \theta' = M_{\cdot y}^{xz} \otimes \theta' = (M_{xz}^{\cdot y})' \otimes \theta'$
5. $E(x\nu' \otimes z\theta') = E(xz' \ddot{\otimes} \nu\theta') = M_{xz} \ddot{\otimes} \nu\theta'$
6. $E(x\nu' \otimes \xi u') = E(x \otimes \nu' \otimes \xi \otimes u') = E(\nu' \otimes x \otimes u' \otimes \xi) = \nu' \otimes M_{xu} \otimes \xi = M_{xu} \dot{\otimes} \xi\nu'$
7. $E(xy' \otimes \xi\theta') = M_{xy} \otimes \xi\theta'$
8. $E(\mu y' \otimes \xi u') = E(\mu\xi' \ddot{\otimes} yu') = \mu\xi' \ddot{\otimes} M_{yu}$
9. $E(\mu\nu' \otimes zu') = \mu\nu' \otimes M_{zu}$.

Si $x = y = z = u$,

$$E((x-\mu)(x-\mu)' \otimes (x-\mu)(x-\mu)') = \bar{M}_4 = M_4 - M_3' \otimes \mu' - M_3 \otimes \mu - \mu \otimes M_3 - \mu' \otimes M_3' + \Sigma \otimes \mu\mu' + \mu\mu' \otimes \Sigma + \Sigma \dot{\otimes} \mu\mu' + \mu\mu' \dot{\otimes} \Sigma + \Sigma \ddot{\otimes} \mu\mu' + \mu\mu' \ddot{\otimes} \Sigma + 3\mu\mu' \otimes \mu\mu'$$

donde $\bar{M}_4 = \bar{M}_{xx}^{xx}$ y $M_4 = M_{xx}^{xx}$.

5. Cálculo de covarianzas

Sea $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ vectores aleatorios con momentos de orden 4 tales que $E(Y_\alpha) = \mu_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n$, $E(Y) = (\mu_1, \ldots, \mu_n) = \Gamma$, $\operatorname{cov}(Y_\alpha, Y_\beta) = \delta_{\alpha\beta}\Sigma$ y $\bar{M}_3$, $\bar{M}_4$ matrices de momentos centrados de orden 3 y 4 respectivamente que no dependen de α y sean $A_{n\times n}$ matriz simétrica, $B_{n\times p}$.

a) Consideremos la forma cuadrática

$$E((Y-\Gamma)A(Y-\Gamma)') = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} E((Y_\alpha - \mu_\alpha)(Y_\beta - \mu_\beta)') = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha\alpha}\Sigma = \operatorname{tr}(A)\Sigma$$

por lo que $E(YAY') = \Gamma A \Gamma' + \operatorname{tr}(A)\Sigma$. Sea $YB = (Y_1, \ldots, Y_n) \begin{pmatrix} b_1' \\ \vdots \\ b_n' \end{pmatrix} = \sum_{\alpha=1}^{n} Y_\alpha b_\alpha'$, $E(YB) = \Gamma B$. Definimos $X = Y - \Gamma$, $\Gamma A = \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, entonces $YAY' -$

$\Gamma A\Gamma' - \mathrm{tr}(A)\Sigma = XAX' + \Gamma AX' + XA\Gamma' - \Sigma\mathrm{tr}(A)$ y $YB - \Gamma B = XB$. Así

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(YAY', YB) &= E((\textstyle\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}X_\alpha X'_\beta + \sum_{\alpha=1}^{n}\nu_\alpha X'_\alpha \\
&\quad + \textstyle\sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha \nu'_\alpha - \Sigma\mathrm{tr}(A))' \,\ddot{\otimes}\, (\sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha b'_\alpha)') \\
&= E(\textstyle\sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta}X_\alpha X'_\beta \,\ddot{\otimes}\, b_\gamma X'_\gamma + \sum_{\alpha\beta}\nu_\alpha X'_\alpha \,\ddot{\otimes}\, b_\beta X'_\beta \\
&\quad + \textstyle\sum_{\alpha\beta} X_\alpha\nu'_\alpha \,\ddot{\otimes}\, b_\beta X'_\beta + \mathrm{tr}(A)\Sigma \,\ddot{\otimes}\, B'X') \\
&= \textstyle\sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta}E(X_\alpha X'_\gamma \otimes X'_\beta) \otimes b_\gamma + \sum_\alpha \nu_\alpha b'_\alpha \otimes \Sigma \\
&\quad + \Sigma \,\dot{\otimes} \textstyle\sum_\alpha \nu_\alpha b'_\alpha \\
&= \bar{M}'_3 \otimes a'B + \Gamma AB \otimes \Sigma + \Sigma \,\dot{\otimes}\, \Gamma AB,
\end{aligned}
$$

donde $a' = (a_{11}, \ldots, a_{nn})$ es el vector de tamaño $n \times 1$ con los elementos de la diagonal de A.

b) Sean $A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$ matrices simétricas, entonces

$$
\begin{aligned}
YAY' - \Gamma A\Gamma' - \mathrm{tr}(A)\Sigma &= XAX' + \Gamma AX' + XA\Gamma' - \mathrm{tr}(A)\Sigma, \qquad \Gamma A = \nu \\
YBY' - \Gamma B\Gamma' - \mathrm{tr}(B)\Sigma &= XBX' + \Gamma BX' + XB\Gamma' - \mathrm{tr}(B)\Sigma, \qquad \Gamma B = \rho
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(YAY', YBY') = E(&\textstyle\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta}X_\alpha X'_\beta \,\ddot{\otimes}\, X_\gamma X'_\delta + \sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta}X_\alpha X'_\beta \,\ddot{\otimes}\, \rho_\gamma X'_\gamma \\
&+ \textstyle\sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta}X_\alpha X'_\beta \,\ddot{\otimes}\, X_\gamma \rho'_\gamma - \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}X_\alpha X'_\beta \,\ddot{\otimes}\, \Sigma\mathrm{tr}(B) \\
&+ \textstyle\sum_{\alpha\beta\gamma} \nu_\alpha X'_\alpha \,\ddot{\otimes}\, b_{\gamma\delta}X_\gamma X'_\delta + \sum_{\alpha\beta}\nu_\alpha X'_\alpha \,\ddot{\otimes}\, \rho_\beta X'_\beta \\
&+ \textstyle\sum_{\alpha\beta}\nu_\alpha X'_\alpha \,\ddot{\otimes}\, X_\beta\rho'_\beta + \sum_{\alpha\gamma\delta} X_\alpha\nu'_\alpha \,\ddot{\otimes}\, b_{\gamma\delta}X_\gamma X'_\delta \\
&+ \textstyle\sum_{\alpha\beta} X_\alpha\nu'_\alpha \,\ddot{\otimes}\, \rho_\beta X'_\beta + \sum_{\alpha\beta} X_\alpha\nu'_\alpha \,\ddot{\otimes}\, X_\beta\rho'_\beta \\
&- \Sigma\mathrm{tr}(A) \,\ddot{\otimes} \textstyle\sum_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}X_\alpha X'_\beta + \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)\Sigma \,\ddot{\otimes}\, \Sigma).
\end{aligned}
$$

- $\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta}E(X_\alpha X'_\gamma \otimes X_\beta X'_\delta) = \sum_{\substack{\alpha\neq\beta \\ \alpha=\gamma,\beta=\delta}} a_{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}E(X_\alpha X'_\alpha \otimes X_\beta X'_\beta)$
$+ \sum_{\substack{\alpha\neq\gamma \\ \alpha=\beta,\gamma=\delta}} a_{\alpha\alpha}b_{\gamma\gamma}E(X_\alpha X'_\gamma \otimes X_\alpha X'_\gamma) +$
$\sum_{\substack{\alpha\neq\delta \\ \alpha=\beta,\delta=\gamma}} a_{\alpha\delta}b_{\delta\alpha}E(X_\alpha X'_\delta \otimes X_\delta X'_\alpha) + \sum_\alpha a_{\alpha\alpha}b_{\alpha\alpha}E(X_\alpha X'_\alpha \otimes X_\alpha X'_\alpha) =$
$[\mathrm{tr}(AB)\Sigma \otimes \Sigma - a'b\Sigma \otimes \Sigma] + [\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)\Sigma \,\ddot{\otimes}\, \Sigma - a'b\Sigma \,\ddot{\otimes}\, \Sigma] + [\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)\Sigma \,\dot{\otimes}\, \Sigma - a'b\Sigma \,\dot{\otimes}\, \Sigma] + a'b\bar{M}_4 =$
$a'b[\bar{M}_4 - \Sigma \otimes \Sigma - \Sigma \,\dot{\otimes}\, \Sigma - \Sigma \,\ddot{\otimes}\, \Sigma] + \mathrm{tr}(AB)[\Sigma \otimes \Sigma + \Sigma \,\dot{\otimes}\, \Sigma] + \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)\Sigma \,\ddot{\otimes}\, \Sigma$
donde $a = (a_{11}, \ldots, a_{nn})$, $b = (b_{11}, \ldots, b_{nn})$, es decir los elementos diagonales de A y B respectivamente.

- $\sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta} E(X_\alpha X'_\beta \ddot{\otimes} \rho_\gamma X'_\gamma) = \sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta} E(X_\alpha \rho'_\gamma \otimes X_\beta X'_\gamma) = \sum_\alpha a_{\alpha\alpha} \rho'_\alpha \otimes \bar{M}'_3 = a' B \Gamma' \otimes \bar{M}'_3$
- $\sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta} E(X_\alpha X'_\gamma \otimes X_\beta) \otimes \rho'_\gamma = \bar{M}'_3 \otimes a' B \Gamma'$
- $\sum_{\alpha\gamma\delta} b_{\gamma\delta} E(\nu_\alpha X'_\gamma \otimes X_\alpha X'_\delta) = \sum_\alpha b_{\alpha\alpha} \nu_\alpha \otimes \bar{M}_3 = \Gamma A b \otimes \bar{M}_3$
- $\sum_{\alpha\gamma\delta} b_{\gamma\delta} E(X_\alpha X'_\gamma \otimes \nu_\alpha X'_\delta) = \bar{M}_3 \otimes \sum_\alpha b_{\alpha\alpha} \nu_\alpha = \bar{M}_3 \otimes \Gamma A b$
- $\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} E(X_\alpha X'_\beta) \ddot{\otimes} \Sigma \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) \Sigma \ddot{\otimes} \Sigma$
- $\sum_{\alpha\beta} \nu_\alpha \rho'_\beta \otimes E(X_\alpha X'_\beta) = \Gamma A B \Gamma' \otimes \Sigma$
- $\sum_{\alpha\beta} E(\nu_\alpha X'_\beta \otimes X_\alpha \rho'_\beta) = \sum_{\alpha\beta} \nu_\alpha \rho'_\beta \dot{\otimes} E(X_\alpha X'_\beta) = \Gamma A B \Gamma' \dot{\otimes} \Sigma$
- $\sum_{\alpha\beta} E(X_\alpha \rho'_\beta \otimes \nu_\alpha X'_\beta) = \sum_{\alpha\beta} E(X_\alpha X'_\beta) \dot{\otimes} \nu_\alpha \rho'_\beta = \Sigma \dot{\otimes} \Gamma A B \Gamma'$
- $\sum_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} E(X_\alpha X'_\beta) \ddot{\otimes} \Sigma \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) \Sigma \ddot{\otimes} \Sigma$.

  Así tenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(YAY', YBY') = {} & a'b(\bar{M}_4 - \Sigma \otimes \Sigma - \Sigma \dot{\otimes} \Sigma - \Sigma \ddot{\otimes} \Sigma) + \mathrm{tr}(AB)(\Sigma \otimes \Sigma + \Sigma \dot{\otimes} \Sigma) + \\ & \bar{M}'_3 \otimes a' B \Gamma' + a' B \Gamma' \otimes \bar{M}'_3 + \bar{M}_3 \otimes \Gamma A b + \Gamma A b \otimes \bar{M}_3 + \\ & \Gamma A B \Gamma' \otimes \Sigma + \Sigma \otimes \Gamma A B \Gamma' + \Gamma A B \Gamma' \dot{\otimes} \Sigma + \Sigma \dot{\otimes} \Gamma A B \Gamma'\end{aligned}$$

Nota Si Y_α es una variable aleatoria real, $E(Y) = \mu$, $\mathrm{var}(Y) = \sigma^2 I$

$$\mathrm{cov}(Y'AY, Y'BY) = a'b(\bar{m}_4 - 3\sigma^4) + 2\sigma^4 \mathrm{tr}(AB) + 2\mu' A b \bar{m}_3 + 2a' B \mu \bar{m}_3 + 4\sigma^2 \mu' A B \mu.$$

c) Si asumimos que Y tiene esperanza Γ y covarianza $V \otimes \Sigma$

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(YAY', YBY') = {} & a'b(\bar{M}_4 - \Sigma \otimes \Sigma - \Sigma \dot{\otimes} \Sigma - \Sigma \ddot{\otimes} \Sigma) + \mathrm{tr}(AVBV)(\Sigma \otimes \Sigma + \Sigma \dot{\otimes} \Sigma) + \\ & \bar{M}'_3 \otimes a' B \Gamma' + a' B \Gamma' \otimes \bar{M}'_3 + \bar{M}_3 \otimes \Gamma A b + \Gamma A b \otimes \bar{M}_3 + \\ & \Gamma AVB \Gamma' \otimes \Sigma + \Sigma \otimes \Gamma AVB \Gamma' + \Gamma AVB \Gamma' \dot{\otimes} \Sigma + \Sigma \dot{\otimes} \Gamma AVB \Gamma'\end{aligned}$$

y si asumimos normalidad i.e. $Y \sim N(\Gamma, V \otimes \Sigma)$, el término en $a'b$ es nulo al igual que $\bar{M}_3$.

- Si $Y \sim N(\Gamma, V \otimes \Sigma)$, $A_{n\times r}$, $B_{n\times q}$ matrices, entonces

$$\mathrm{cov}(YB, YA) = B'VA \otimes \Sigma, \qquad \mathrm{cov}(YA, YB) = A'VB \otimes \Sigma.$$

- $Y' = (Y^1, \ldots, Y^p)$, $\quad \mathrm{var}(Y') = \Sigma \otimes V \qquad \mathrm{cov}(Y', Y) = \Sigma \dot{\otimes} V$

  $\qquad \mathrm{var}(Y) = V \otimes \Sigma \qquad \mathrm{cov}(Y, Y') = V \dot{\otimes} \Sigma.$

- $\operatorname{cov}(AY', YB) = \Sigma \dot{\otimes} AVB \qquad \operatorname{cov}(YB, AY') = (AVB)' \dot{\otimes} \Sigma$
  $\operatorname{cov}(YC, YD) = C'VD \otimes \Sigma \qquad \operatorname{cov}(EY', FY') = \Sigma \otimes EVF'.$
- $\operatorname{cov}(KYA, HYB) = A'VB \otimes K\Sigma H'.$
- Calculemos la covarianza entre dos formas cuadráticas mixtas.

$$\begin{aligned}
[t]lA &= YAY' - \Gamma A\Gamma' - \Sigma \operatorname{tr}(AV) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}[a_{\alpha\beta}X_\alpha X'_\beta + \delta_{\alpha\beta}\nu_\alpha X'_\beta + \delta_{\alpha\beta}X_\alpha \nu'_\beta - \delta_{\alpha\beta}(AV)_{\alpha\beta}\Sigma] \\
K &= Y'KY - \Gamma' K\Gamma - V\operatorname{tr}(K\Sigma) \\
&= \sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{p}[k_{st}X^s X^{t\prime} + \delta_{st}\lambda_s X^{t\prime} + \delta_{st}X^s\lambda'_t - \delta_{st}(\Sigma K)_{st}V]
\end{aligned}$$

donde $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) = \Gamma A$, $X_\alpha = Y_\alpha - \mu_\alpha$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = K\Gamma'$, $X^s = Y^s - \pi_s$, $\Gamma = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $\Gamma' = (\pi_1, \ldots, \pi_p)$.

$$\begin{aligned}
E(A \ddot{\otimes} K) = \textstyle\sum_{\alpha\beta st} E[& a_{\alpha\beta}k_{st}X_\alpha X_\beta \ddot{\otimes} X^s X^{t\prime} + \delta_{\alpha\beta}k_{st}\nu_\alpha X'_\beta \ddot{\otimes} X^s X^{t\prime} + \delta_{\alpha\beta}k_{st}X_\alpha\nu'_\beta \ddot{\otimes} X^s X^{t\prime} \\
& -\delta_{\alpha\beta}(AV)_{\alpha\beta}k_{st}\Sigma \ddot{\otimes} X^s X^{t\prime} + a_{\alpha\beta}\delta_{st}X_\alpha X'_\beta \ddot{\otimes} \lambda_s X^{t\prime} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{st}\nu_\alpha X'_\beta \ddot{\otimes} \lambda_s X^{t\prime} \\
& +\delta_{\alpha\beta}\delta_{st}X_\alpha \nu'_\beta \ddot{\otimes} \lambda_s X^{t\prime} + a_{\alpha\beta}\delta_{st}X_\alpha X'_\beta \ddot{\otimes} X^s\lambda'_t + \delta_{\alpha\beta}\delta_{st}\nu_\alpha X'_\beta \ddot{\otimes} X^s \lambda'_t \\
& +\delta_{\alpha\beta}\delta_{st}X_\alpha\nu'_\beta \ddot{\otimes} X^s\lambda'_t - a_{\alpha\beta}\delta_{st}(\Sigma K)_{st}X_\alpha X'_\beta \ddot{\otimes} V + \delta_{\alpha\beta}\delta_{st}(AV)_{\alpha\beta}(\Sigma K)_{st}\Sigma \ddot{\otimes} V]
\end{aligned}$$

pues la esperanza de los términos de orden uno es nula.

- $\sum_{\alpha\beta st} a_{\alpha\beta}k_{st}E(X_\alpha X'_\beta \ddot{\otimes} X^s X^{t\prime}) = \sum_{\alpha\beta st} a_{\alpha\beta}k_{st}E(X_\alpha X^{s\prime} \otimes X_\beta X^{t\prime}) = 2\Sigma K\Sigma \ddot{\otimes} VAV + \operatorname{tr}(AV)\operatorname{tr}(\Sigma K)\Sigma \ddot{\otimes} V + M^* \ddot{\otimes} D_A - 2\Sigma K \Sigma \ddot{\otimes} VD_AV - \operatorname{tr}(K\Sigma)\Sigma \ddot{\otimes} D_{AV}V$, donde D_A es la matriz diagonal que tiene los elementos a_{ii} en la diagonal, la entrada $\bar{M}_{iskt} = E(x_{i\alpha}x_{s\alpha}x_{k\alpha}x_{t\alpha})$ de $\bar{M}$ $p^2 \times p^2$, de modo que $M^*_{ik} = \sum_{st} k_{st}\bar{M}^{is}_{kt} = \operatorname{tr}(K\bar{M}^{ik})$, $\bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{M}^{11} & \cdots & \bar{M}^{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{M}^{p1} & \cdots & \bar{M}^{pp} \end{pmatrix}$.

  En efecto, consideremos la entrada $ijkl$ de $E(X_\alpha X^{s\prime} \otimes X_\beta X^{t\prime})$ i.e.

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{\alpha\beta st} a_{\alpha\beta}k_{st}E(X_{i\alpha}X_{sj}X_{k\beta}X_{tl}) &= \textstyle\sum_{\alpha\beta st} a_{\alpha\beta}k_{st}v_{\alpha j}\sigma_{is}v_{\beta l}\sigma_{kt} + \sum_{\alpha\beta st} a_{\alpha\beta}k_{st}v_{\alpha\beta}\sigma_{ik}v_{jl}\sigma_{st} \\
& + \textstyle\sum_{\alpha\beta st} a_{\alpha\beta}k_{st}v_{\alpha l}\sigma_{it}v_{j\beta}\sigma_{sk} + \sum_{st} a_{jj}\delta_{jl}k_{st}\bar{M}_{iskl} - \sum_{\alpha st} a_{\alpha\alpha}k_{st}v_{\alpha j}\sigma_{is}v_{\alpha l}\sigma_{kt} \\
& - \textstyle\sum_{\alpha st} a_{\alpha j}k_{st}v_{\alpha j}\sigma_{ik}v_{jl}\sigma_{st} - \sum_{\alpha st} a_{\alpha\alpha}k_{st}v_{\alpha l}\sigma_{it}v_{j\alpha}\sigma_{sk} \\
& = (\Sigma K\Sigma)_{ik}(VAV)_{jl} + \operatorname{tr}(AV)\operatorname{tr}(\Sigma K)\sigma_{ik}v_{jl} + (\Sigma K\Sigma)_{ik}(VAV)_{jl} + a_{jj}\delta_{jl}\textstyle\sum_{st} k_{st}\bar{M}_{iskt} \\
& -(VD_AV)_{jl}(\Sigma K\Sigma)_{ik} - (AV)_{jj}v_{jl}\operatorname{tr}(K\Sigma)\sigma_{ik} - (VAV)_{jl}(\Sigma K\Sigma)_{ik}
\end{aligned}$$

- $\sum_{\alpha\beta st}\delta_{\alpha\beta}k_{st}E(\nu_\alpha X'_\beta \ddot{\otimes} X^s X^{t\prime}) = \sum_{\alpha\beta st}\delta_{\alpha\beta}k_{st}E(\nu_\alpha X^{s\prime}\otimes X_\beta X^{t\prime}) = \sum_{\alpha st}k_{st}\nu_\alpha \otimes \bar{M}^{\cdot\alpha}_{st}$
- $\sum_{\alpha\beta st}\delta_{\alpha\beta}k_{st}E(X_\alpha X^{s\prime}\otimes \nu_\beta X^{t\prime}) = \sum_{\alpha st}k_{st}\bar{M}^{\cdot\alpha}_{st}\otimes\nu_\alpha$
- $\sum_{\alpha\beta st}\delta_{\alpha\beta}(AV)_{\alpha\beta}k_{st}\Sigma\ddot{\otimes}E(X^sX^{t\prime}) = \mathrm{tr}(AV)\mathrm{tr}(\Sigma K)\Sigma\ddot{\otimes}V$
- $\sum_{\alpha\beta st}a_{\alpha\beta}\delta_{st}E(X_\alpha X'_\beta\ddot{\otimes}\lambda_s X^{t\prime}) = \sum_{\alpha\beta t}a_{\alpha\beta}\lambda'_t\otimes(\bar{M}^{\cdot s}_{\alpha\beta})'$
- $\sum_{\alpha\beta st}\delta_{\alpha\beta}\delta_{st}E(\nu_\alpha X'_\beta\ddot{\otimes}\lambda^s X^{t\prime}) = \sum_{\alpha\beta st}\delta_{\alpha\beta}\delta_{st}E(\nu_\alpha\lambda'_s\otimes X_\beta X^{t\prime}) = \Gamma AV\otimes\Sigma K\Gamma'$
- $\sum_{\alpha\beta st}\delta_{\alpha\beta}\delta_{st}E(X_\alpha\nu'_\beta\ddot{\otimes}\lambda^s X^{t\prime}) = \Sigma K\Gamma'\dot{\otimes}\Gamma AV$
- $\sum_{\alpha\beta st}a_{\alpha\beta}\delta_{st}E(X_\alpha X'_\beta\ddot{\otimes}X^s\lambda'_t) = \sum_{\alpha\beta t}a_{\alpha\beta}(\bar{M}^{\cdot t}_{\alpha\beta})'\otimes\lambda'_t$
- $\sum_{\alpha\beta st}\delta_{\alpha\beta}\delta_{st}E(\nu_\alpha X'_\beta\ddot{\otimes}X^s\lambda'_t) = \Gamma AV\dot{\otimes}\Sigma K\Gamma'$
- $\sum_{\alpha\beta st}\delta_{\alpha\beta}\delta_{st}E(X_\alpha\nu'_\beta\ddot{\otimes}X^s\lambda'_t) = \Sigma K\Gamma'\otimes\Gamma AV$
- $\sum_{\alpha\beta st}a_{\alpha\beta}\delta_{st}(K\Sigma)_{st}E(X_\alpha X'_\beta)\ddot{\otimes}V = \mathrm{tr}(AV)\mathrm{tr}(\Sigma K)\Sigma\ddot{\otimes}V$
- $\sum_{\alpha\beta st}\delta_{\alpha\beta}(AV)_{\alpha\beta}\delta_{st}(K\Sigma)_{st}\Sigma\ddot{\otimes}V = \mathrm{tr}(AV)\mathrm{tr}(\Sigma K)\Sigma\ddot{\otimes}V.$

Así tenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(YAY',Y'KY) &= 2\Sigma K\Sigma\ddot{\otimes}VAV + \bar{M}^*\ddot{\otimes}D_A - 2\Sigma K\Sigma\ddot{\otimes}VD_AV - \mathrm{tr}(K\Sigma)\Sigma\ddot{\otimes}D_AV\\ &+\Gamma AV\dot{\otimes}\Sigma K\Gamma' + \Sigma K\Gamma'\dot{\otimes}\Gamma AV + \Gamma AV\otimes\Sigma K\Gamma' + \Sigma K\Gamma'\otimes\Gamma AV + \textstyle\sum_{\alpha st}k_{st}\nu_\alpha\otimes\bar{M}^{\cdot\alpha}_{st}\\ &+\textstyle\sum_{\alpha st}k_{st}\bar{M}^{\cdot\alpha}_{st}\otimes\nu_\alpha + \sum_{\alpha\beta s}a_{\alpha\beta}(\bar{M}^{\cdot s}_{\alpha\beta})'\otimes\lambda'_s + \sum_{\alpha\beta s}a_{\alpha\beta}\lambda'_s\otimes(\bar{M}^{\cdot s}_{\alpha\beta})'.\end{aligned}$$

$E(YAY') = \Gamma A\Gamma' + \Sigma\mathrm{tr}(AV)$	$E(Y'HY) = \Gamma'H\Gamma + V\mathrm{tr}(\Sigma H)$
$\mathrm{cov}(YAY',YB) = \Gamma AVB\otimes\Sigma + \Sigma\dot{\otimes}\Gamma AVB + \bar{M}_3\otimes a'B$	$\mathrm{cov}(Y'HY,Y'K) = \Gamma'H\Sigma K\otimes V + V\dot{\otimes}\Gamma'H\Sigma K + \bar{N}_3\otimes h'K$
$\mathrm{cov}(YAY',YBY') = \mathrm{tr}(AVBV)(\Sigma\otimes\Sigma + \Sigma\dot{\otimes}\Sigma) +$ $\Sigma\otimes\Gamma AVB\Gamma' + \Sigma\dot{\otimes}\Gamma AVB\Gamma' + \Gamma AVB\Gamma'\otimes\Sigma +$ $\Gamma AVB\Gamma'\dot{\otimes}\Sigma + a'b(\bar{M}_4 - \Sigma\otimes\Sigma - \Sigma\dot{\otimes}\Sigma - \Sigma\ddot{\otimes}\Sigma) +$ $\bar{M}'_3\otimes a'B\Gamma' + a'B\Gamma'\otimes\bar{M}'_3 + \bar{M}_3\otimes\Gamma Ab + \Gamma Ab\otimes\bar{M}_3$	$\mathrm{cov}(Y'HY,Y'KY) = \mathrm{tr}(H\Sigma K\Sigma)(V\otimes V + V\dot{\otimes}V) +$ $V\otimes\Gamma'H\Sigma K\Gamma + V\dot{\otimes}\Gamma'H\Sigma K\Gamma + \Gamma'H\Sigma K\Gamma\otimes V +$ $\Gamma'H\Sigma K\Gamma\dot{\otimes}V + h'k(\bar{N}_4 - V\otimes V - V\dot{\otimes}V - V\ddot{\otimes}V) +$ $\bar{N}'_3\otimes h'K\Gamma + h'K\Gamma\otimes\bar{N}'_3 + \bar{N}_3\otimes\Gamma'Hk + \Gamma Hk\otimes\bar{N}_3$
$\mathrm{cov}(AY'K,HYB) = K'\Sigma H'\dot{\otimes}AVB$	$\mathrm{cov}(HYB,AY'K) = B'VA'\dot{\otimes}H\Sigma K$
$\mathrm{cov}(KYA,HYB) = A'VB\otimes K\Sigma H'$	$\mathrm{cov}(AY'K,BY'H) = K\Sigma H'\otimes A'VB$

Tabla 1

Referencias

[1] Anderson, T.W. (1958) *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. John Wiley & Sons, New York.

[2] Barra, J.R. (1971) *Notions Fondamentales de Statistique Mathématique*. Dunod, Paris.

[3] Muirhead, R.J. (1982) *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. John Wiley & Sons, New York.

[4] Poltronieri, J. (1987) "Algunas consideraciones sobre las formas cuadráticas y las formas lineales", *Uniciencia*, 4(1,2): 69–75.

[5] Poltronieri, J. (1987) "Algunas propiedades útiles en estadística", *Uniciencia*, 4(1,2): 59–67.

[6] Poltronieri, J. (1988) "Estudio de formas cuadráticas y formas lineales en el caso multivariado", Memorias IV Simposio de Métodos Matemáticos Aplicados a las Ciencias, B. Montero & J. Poltronieri (eds.), Editorial de la Universidad de Costa Rica: 165–173.

[7] Poltronieri, J. (1988) "Sobre la covarianza de formas cuadráticas y formas lineales", Memorias IV Simposio de Métodos Matemáticos Aplicados a las Ciencias, B. Montero & J. Poltronieri (eds.), Editorial de la Universidad de Costa Rica: 174–180.

[8] Poltronieri, J. (1995) "Contribución al estudio de formas cuadráticas en estadística multivariada", Memorias Simposio de Métodos Matemáticos Aplicados a las Ciencias, Inst. Tecnol. de C.R., J. Trejos (ed.): 133–142.

[9] Searle, S.R. (1971) *Linear Models*. John Wiley & Sons, New York.

[10] Styan, G.P.H. (1969) *Notes on the distribution of quadratic formes in singular normal variables*. Technical Report 122, University of Minnesota, Minneapolis, Minn.