

ZUBÍA

REVISTA DE CIENCIAS

MONOGRÁFICO

26

ier

Instituto de Estudios Riojanos

ZUBÍA. MONOGRÁFICO
REVISTA DE CIENCIAS.
Nº 26 (2014). Logroño (España).
P. 1-235, ISSN: 1131-5423



DIRECTORA

Purificación Ruiz Flaño

CONSEJO DE REDACCIÓN

Luis Español González
Rubén Esteban Pérez
Rafael Francia Verde
Juana Hernández Hernández
Luis Miguel Medrano Moreno
Patricia Pérez-Matute
Enrique Requeta Loza
Rafael Tomás Las Heras

CONSEJO CIENTÍFICO

José Antonio Arizaleta Urarte
(Instituto de Estudios Riojanos)
José Arnáez Vadillo
(Universidad de La Rioja)
Susana Caro Calatayud
(Instituto de Estudios Riojanos)
Eduardo Fernández Garbayo
(Universidad de La Rioja)
Rosario García Gómez
(Universidad de La Rioja)
José M.ª García Ruiz
(Instituto Pirenaico de Ecología-CSIC)
Javier Guallar Otazua
(Universidad de La Rioja)
Teodoro Lasanta Martínez
(Instituto Pirenaico de Ecología-CSIC)
Joaquín Lasierra Cirujeda
(Hospital San Pedro, Logroño)
Luis Lopo Carramiñana
(Dirección General de Medio Natural del Gobierno de La Rioja)
Fernando Martínez de Toda
(Universidad de La Rioja)
Alfredo Martínez Ramírez
(Centro de Investigación Biomédica de La Rioja –CIBIR–)
Juan Pablo Martínez Rica
(Instituto Pirenaico de Ecología-CSIC)
José Luis Nieto Amado
(Universidad de Zaragoza)
José Luis Peña Monné
(Universidad de Zaragoza)
Félix Pérez-Lorente
(Universidad de La Rioja)
Diego Troya Corcuera
(Instituto Politécnico y Universidad Estatal de Virginia, Estados Unidos)
Eduardo Viladés Juan
(Hospital San Pedro, Logroño)
Carlos Zaldívar Ezquerro
(Dirección General de Medio Natural del Gobierno de La Rioja)

DIRECCIÓN Y ADMINISTRACIÓN

Instituto de Estudios Riojanos
C/ Portales, 2
26071 Logroño
publicaciones.ier@larioja.org

Suscripción anual España (1 número y monográfico): 15 €
Suscripción anual extranjero (1 número y monográfico): 20 €
Número suelto: 9 €
Número monográfico: 9 €

INSTITUTO DE ESTUDIOS RIOJANOS

ZUBÍA

REVISTA DE CIENCIAS

Monográfico Núm. 26

INVESTIGACIÓN EN EL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN
DE LA UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Coordinadores

ÓSCAR CIAURRI RAMÍREZ Y LUIS ESPAÑOL GONZÁLEZ



Gobierno de La Rioja
Instituto de Estudios Riojanos
LOGROÑO

2014

Investigación en el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja / coordinadores, Óscar Ciaurri Ramírez, Luis Español González. -- Logroño : Instituto de Estudios Riojanos, 2014

235 p. : gráf. ; 24 cm -- (Zubía. Monográfico, ISSN 1131-5423; 26). -- D.L. LR 413-2012

1. Universidad de La Rioja - Departamento de Matemáticas y Computación. I. Ciaurri Ramírez, Óscar. II. Español González, Luis. III. Instituto de Estudios Riojanos. IV. Serie

167 (460.21)

51:37.02 (460.21)

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse ni transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electro-óptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito de los titulares del copyright.

- © Logroño, 2014
Instituto de Estudios Riojanos
C/ Portales, 2
26001-Logroño, La Rioja (España)
- © Diseño del interior: Juan Luis Varona (Universidad de La Rioja), a partir de los archivos LaTeX proporcionados por los autores.
- © Imagen de la cubierta: Composición fractal realizada por *José Pérez Valle*.
- © Imagen de la contracubierta: Fotografía de la Nebulosa Trífida (M20), en la constelación de Sagitario, tomada en Murillo de Río Leza por la *Agrupación Astronómica de La Rioja* el 25 de agosto de 2014.

Producción gráfica: Gráficas Isasa S.L. (Arnedo, La Rioja)

ISSN 1131-5423

Depósito Legal: LR 413-2012

Impreso en España - Printed in Spain

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Óscar Ciaurri Ramírez, Luis Español González (*Coordinadores*) 7–9

PRÓLOGO

José Luis Ansorena (*Director del Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja*) 11–12

JOSÉ LUIS ANSORENA

Espacios de funciones derivables
Spaces of differentiable functions 13–18

JESÚS ARANSAY, JOSÉ DIVASÓN, CÉSAR DOMÍNGUEZ,
FRANCISCO GARCÍA, JÓNATHAN HERAS, ARTURO JAIME,
LAUREANO LAMBÁN, ELOY MATA, GADEA MATA, JUAN JOSÉ OLARTE,
VICO PASCUAL, BEATRIZ PÉREZ, ANA ROMERO, ÁNGEL LUIS RUBIO,
JULIO RUBIO, EDUARDO SÁENZ DE CABEZÓN

Informática para las Matemáticas, Matemáticas para la Informática,
Informática Aplicada
*Computer Science for Mathematics, Mathematics for Computer Science,
Applied Computer Science* 19–37

ALBERTO ARENAS, ÓSCAR CIAURRI, EDGAR LABARGA,
LUZ RONCAL, JUAN LUIS VARONA

Series de Fourier no trigonométricas: una perspectiva familiar
Nontrigonometric Fourier series: a familiar point of view 39–54

MANUEL BELLO HERNÁNDEZ, JUDIT MÍNGUEZ CENICEROS

Aproximación racional y polinomios ortogonales
Rational approximation and orthogonal polynomials 55–76

PILAR BENITO, DANIEL DE-LA-CONCEPCIÓN, JESÚS LALIENA,
SARA MADARIAGA, JOSÉ M. PÉREZ-IZQUIERDO

Algunos aspectos del álgebra no asociativa
Some aspects on nonassociative algebra 77–96

**ROBERTO CASTELLANOS FONSECA, CLARA JIMÉNEZ-GESTAL,
JESÚS MURILLO RAMÓN**
Didáctica de la Matemática: cuándo el cómo cuenta tanto (casi) como el qué
Mathematics Education: when how is (almost) as important as what 97–117

LUIS ESPAÑOL GONZÁLEZ
Investigaciones sobre Julio Rey Pastor realizadas desde La Rioja
entre 1982 y 2000
*Researches about Julio Rey Pastor made from La Rioja
between 1982 and 2000* 119–141

**JOSÉ IGNACIO EXTREMIANA ALDANA, LUIS JAVIER HERNÁNDEZ PARICIO,
MARÍA TERESA RIVAS RODRÍGUEZ**
Modelos de Quillen, espacios y flujos exteriores y algunas aplicaciones
Quillen models, exterior spaces and flows, and some applications 143–164

**JOSÉ ANTONIO EZQUERRO, DANIEL GONZÁLEZ,
JOSÉ MANUEL GUTIÉRREZ, MIGUEL ÁNGEL HERNÁNDEZ-VERÓN,
ÁNGEL ALBERTO MAGREÑÁN, NATALIA ROMERO, MARÍA JESÚS RUBIO**
Resolución de ecuaciones no lineales mediante procesos iterativos
Solving nonlinear equations by iterative processes 165–200

**MANUEL IÑARREA, WAFAA KANAAN, VÍCTOR LANCHARES,
ANA ISABEL PASCUAL, JOSÉ PABLO SALAS**
Sistemas dinámicos: de los átomos al sistema solar
Dynamical systems: from the atoms to the solar system 201–219

JAVIER PÉREZ LÁZARO
Regularidad de la función maximal de Hardy-Littlewood
Regularity of the Hardy-Littlewood maximal function 221–227

INFORMÁTICA PARA LAS MATEMÁTICAS, MATEMÁTICAS PARA LA INFORMÁTICA, INFORMÁTICA APLICADA

JESÚS ARANSAY¹, JOSÉ DIVASÓN¹, CÉSAR DOMÍNGUEZ¹,
FRANCISCO GARCÍA¹, JÓNATHAN HERAS¹, ARTURO JAIME¹,
LAUREANO LAMBÁN¹, ELOY MATA¹, GADEA MATA¹,
JUAN JOSÉ OLARTE¹, VICO PASCUAL¹, BEATRIZ PÉREZ¹,
ANA ROMERO¹, ÁNGEL LUIS RUBIO¹, JULIO RUBIO¹,
EDUARDO SÁENZ DE CABEZÓN¹

RESUMEN

En este artículo presentamos un recorrido a grandes rasgos por las líneas de investigación del grupo de Informática de la Universidad de La Rioja. Se trata de un proyecto que se prolonga desde hace más de 10 años, que actualmente engloba a 16 personas, y que con la incorporación de investigadores con distintos intereses ha conseguido coordinar un grupo interdisciplinar, que cubre áreas diversas de la Informática.

Palabras clave: Informática, Cálculo Simbólico, Sistemas de Información.

In this paper, we describe the research lines of the Computer Science team at the Universidad de La Rioja. It is a more than 10 years old project, grouping 16 researchers and with an important interdisciplinary orientation, covering several Computer Science areas.

Key words: Computer Science, Symbolic Computation, Information Systems.

1. INTRODUCCIÓN

Es bien conocido que las Matemáticas han estado en la base de la creación misma de la Informática (sólo a título de ejemplo, mencionemos las distintas actividades realizadas en torno al centenario del nacimiento de Alan Turing, en el año

1. Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Logroño (La Rioja, España)
Correo electrónico: {jesus-maria.aransay, jose.divasonm, cesar.dominguez,
francisco.garcia, arturo.jaime, jonathan.heras, lalamban, eloy.mata, gadea.mata,
jjolarte, vico.pascual, beatriz.perez, ana.romero, arubio, julio.rubio,
eduardo.saenz-de-cabezon}@unirioja.es
Página web: <https://es.us.unirioja.es/psycotrip/>

2012). Por tanto, es natural que nuestro grupo esté integrado en un Departamento de Matemáticas y Computación. Además, la Informática tiene un pie en la Física, en la Electrónica, y en la Ingeniería (no sólo en lo que respecta al Hardware, sino también en el Software, al menos desde la «crisis del software» en los años 70 del siglo pasado). Por ello, nuestro grupo, que ha sido también el responsable en gran medida de la impartición en la Universidad de La Rioja de los estudios de Informática (la ya extinta Ingeniería Técnica en Informática de Gestión, los actuales Grado en Ingeniería Informática y Programa de Doctorado en Ingeniería Informática, y el previsto Máster en Tecnologías Informáticas), ha trabajado para incorporar líneas de investigación que vayan más allá de los aspectos más teóricos (los más relacionados con las matemáticas), aunque sin renunciar a ellos.

En el siguiente texto, presentamos una panorámica, necesariamente superficial, de nuestros temas de investigación, comenzando por los temas que cronológicamente fueron los primeros, e hilvanando, a continuación, un pequeño recorrido por el resto de nuestra investigación.

2. CÁLCULO SIMBÓLICO

Desde el comienzo de la Informática, uno de sus principales usos ha sido su aplicación en Matemáticas, bien en su vertiente teórica, bien en su vertiente aplicada, en forma de cálculo científico, muy vinculado en sus inicios a los esfuerzos bélicos en la Segunda Guerra Mundial. (La otra fuente de aplicaciones de la Informática se encuentra, por supuesto, en los ámbitos industriales y comerciales.) Dentro de las aplicaciones matemáticas de la Informática, siempre se han distinguido dos aspectos (aunque en ocasiones hayan aparecido entremezclados): el Cálculo Numérico (incluyendo en él los procedimientos estadísticos) y el Cálculo Simbólico. La diferencia entre ambos aspectos reside en que en el primero se manipulan principalmente datos reales en representación de coma flotante, mientras que en el segundo se privilegia la manipulación algebraica o formal de expresiones, y cuando se trata de calcular con números, se hace con representaciones exactas o de precisión arbitraria.

Entre ambos tipos de cómputo, el cálculo numérico ha sido, y sigue siendo, el foco principal de interés en matemáticas (se dice que los métodos numéricos llevaron al hombre a la luna). Sin embargo, a comienzos de la década de los 80 del siglo pasado se conoció un reforzamiento del cálculo simbólico (que, de todos modos y como ya hemos indicado, siempre había estado presente), debido a distintos motivos, algunos tecnológicos, como la difusión de los computadores personales (que *democratizaron* el cálculo en todos los departamentos universitarios), y otros internos, como la implementación del algoritmo de Buchberger para el cálculo de bases de Gröbner, que revolucionó el panorama de la mecanización del Álgebra Conmutativa y la Geometría Algebraica.

2.1. La prehistoria

Empujados por el impulso del Álgebra Computacional, más y más disciplinas de las Matemáticas fueron incorporándose al elenco de aplicaciones del Cálculo Simbólico. A mediados de los años 80 del siglo pasado se formó una pequeña comunidad de investigadores que trabajaban en el cálculo simbólico en Topología Algebraica (con la mayoría de los esfuerzos dedicados al difícil problema del cálculo de grupos de homotopía de las esferas). La Topología Algebraica es la parte de las matemáticas que se dedica al estudio de espacios topológicos (de un tipo de geometría, si se prefiere) por medio de invariantes algebraicos. Aunque los comienzos de esta área de las matemáticas (a finales del siglo XIX y principios del XX) estuvieron muy vinculados con el cálculo explícito de invariantes, hacia los años 1960 y 1970 la disciplina había alcanzado un grado de sofisticación teórica que hacía difícil ver cómo el cálculo explícito por ordenador podría hacer aportaciones relevantes en Topología Algebraica.

En una línea diferente de las previamente establecidas, Francis Sergeraert (Institut Fourier, Grenoble, Francia) introdujo en 1986 una nueva teoría, la *homología efectiva*, que pretendía definir un mecanismo general para abordar de un modo genérico los problemas de calculabilidad en Topología Algebraica. Uno de los primeros textos completos dedicados a la homología efectiva fue la tesis de Julio Rubio, defendida en la Universidad de Zaragoza, en 1988, bajo la dirección de Eladio Domínguez (Universidad de Zaragoza) y de Francis Sergeraert.

Una de las características principales de la homología efectiva es su énfasis en la computación práctica, que permite el diseño de programas de ordenador que alcanzan resultados concretos. Así, en el año 1991 (año en el que Julio Rubio defendió una segunda tesis doctoral en el Institut Fourier) se disponía de un sistema de cálculo simbólico en Topología Algebraica basado en las ideas de la homología efectiva. Dicho sistema fue denominado *Kenzo* por Francis Sergeraert y, como veremos, ha sido importante en la génesis del grupo de Informática en la Universidad de La Rioja.

Durante los años 90, Julio Rubio siguió investigando en ese ámbito en la Universidad de Zaragoza, en el Departamento de Informática e Ingeniería de Sistemas, manteniendo frecuentes contactos con la Universidad de La Rioja, en concreto con Laureano Lambán. Algunas publicaciones relevantes de esta fase, que podemos calificar de *prehistórica*, del grupo de Informática son [69, 70, 71, 73, 74, 75].

2.2. Cálculo en Topología Algebraica

Aunque, como veremos más adelante, la vía por la que se estableció, en orden cronológico, el grupo de investigación en la Universidad de La Rioja no fue ésta, el cálculo simbólico en Topología Algebraica no fue abandonado desde la incorporación de Julio Rubio en el curso 2000/2001 a la Universidad de La Rioja.

Las principales aportaciones en esta área han provenido de la investigación de Ana Romero, que defendió su tesis en el año 2007, codirigida por Julio Rubio y

Francis Sergeraert. Concretamente, Ana Romero ha dedicado sus esfuerzos a hacer calculables unas herramientas de la Topología Algebraica denominadas *sucesiones espectrales* [58, 65]. Otros temas de interés han sido el cálculo de la homología de grupos [59, 63] y la sistematización del uso de campos vectoriales discretos (que forman parte de la Teoría Discreta de Morse) [67]. En los últimos años ha participado en el establecimiento, junto a Francis Sergeraert, de las bases de la *homotopía efectiva*, prometedora técnica que aborda el problema de la calculabilidad homotópica, más complicado que su equivalente homológico [66].

La mayoría de las aportaciones de Ana Romero han sido trasladadas al sistema Kenzo, como módulos adicionales, que han venido a enriquecer considerablemente el alcance del sistema, manteniéndolo vivo y actualizado.

Otras publicaciones importantes en este ámbito han sido [10, 76, 77, 78].

2.3. Cálculo en Álgebra Homológica

Las técnicas homológicas pueden emplearse no sólo en Topología sino también en otras áreas de las matemáticas, como el Álgebra, y más en particular en el Álgebra Conmutativa. Eduardo Sáenz de Cabezón ha realizado algunas de sus aportaciones en cálculo simbólico en Álgebra Homológica, y más concretamente en la computación de la Homología de Koszul de ideales. En su tesis, que fue defendida en el año 2008, bajo la dirección de Luis Javier Hernández (Universidad de La Rioja) y de Werner Seiler (Kassel University, Alemania), introdujo el concepto clave de *resolución de Mayer-Vietoris*. Posteriormente, Eduardo Sáenz de Cabezón ha aplicado con éxito esa noción para diseñar algoritmos eficaces para el cálculo de invariantes algebraicos [11, 79, 80].

Eduardo Sáenz de Cabezón se ha interesado también por la complejidad algorítmica (es decir, por la estimación de los recursos necesarios para llevar a cabo un cálculo) de distintos cómputos algebraicos, demostrando, en particular, que el problema de calcular la característica de Euler es un problema $\#P$ -completo [68], un tipo de problemas reputados por ser difíciles (no se conoce para ellos ningún algoritmo eficaz y, si se conociese, eso daría automáticamente solución eficaz a múltiples problemas difíciles).

Siguiendo el estilo general de nuestro grupo de investigación, Eduardo Sáenz de Cabezón no sólo ha realizado contribuciones teóricas, sino que también las ha plasmado en programas ejecutables concretos que forman parte de distintos sistemas de cálculo simbólico, como CoCoA.

2.4. Cálculos y errores

Una característica específica del cálculo simbólico en Topología Algebraica ha sido que algunos de los resultados alcanzados por ordenador desafiaban el conocimiento teórico disponible, en el sentido de que algunos de esos resultados no podían ser confirmados ni refutados por medios distintos de los programas que

los calculaban (eso es seguramente consecuencia de la aparición en los cálculos, como intermediarios, de espacios de naturaleza infinita, que impiden verificaciones por métodos matemáticos estándar). Eso hizo nacer dentro de nuestro grupo un interés por demostrar la corrección de los programas de cálculo simbólico (es decir, demostrar que los programas realizan realmente lo que se espera de ellos). En ausencia de otros medios alternativos, ésa sería la única posibilidad de que los resultados encontrados por Kenzo tengan categoría de certezas matemáticas.

Recientemente, esta preocupación por la corrección de nuestros programas se ha visto reafirmada, al refutar Kenzo algunos resultados que se habían publicado como ciertos en revistas y memorias de investigación en editoriales de prestigio. Concretamente, en [64] mostramos, con la ayuda de Kenzo, que un grupo de homotopía que aparecía como un teorema en [50] en realidad era incorrecto; dicha incorrección, y que el resultado calculado por Kenzo era el correcto, fue reconocida por los autores. Análogamente, en el libro [28] aparece un resultado sobre la relación entre sucesiones espectrales y la homología persistente que es incorrecto, como fue comprobado experimentalmente utilizando Kenzo; dichos resultados experimentales nos permitieron también determinar la formulación correcta del resultado buscado [62]. Todo ello pone de manifiesto el interés de la investigación en la *verificación de programas*.

3. VERIFICACIÓN DE PROGRAMAS

Como hemos mencionado en la introducción, en los años 70 del siglo pasado se produjo una fuerte convulsión en la informática, producida por el hecho de que los proyectos de programación no conseguían sus objetivos, y las expectativas generadas por las mejoras en el hardware no se traducían en una mejora en el software, que se había hecho difícil de mantener y de comprender. Entre las distintas reacciones a esta situación (que conllevaron cambios en lenguajes, metodologías y modos de desarrollo del software) se encontró la de aquéllos que propugnaban la utilización de *métodos formales*, es decir de métodos matemáticos que permitiesen demostrar la corrección de los programas o, al menos, incrementar la confianza en los resultados encontrados por ellos. Dentro de esta corriente de pensamiento, nuestros problemas concretos en cálculo simbólico nos llevaron de un campo en el que la Informática era aplicada a las Matemáticas, a otro en el que los papeles se invertían y las Matemáticas eran aplicadas a la Informática.

3.1. Especificación Algebraica

Cuando, en el curso 2000/2001, Julio Rubio se traslada de la Universidad de Zaragoza a la de La Rioja, ya se había establecido una línea de investigación conjunta con Laureano Lambán para comenzar a aplicar métodos formales a Kenzo y otros sistemas de cálculo simbólico, y se había comenzado la dirección de dos tesis doctorales en La Rioja. Estos esfuerzos se concretaron en la tesis de Vico Pascual,

defendida en 2002, codirigida por Laureano Lambán y Julio Rubio. En ella, se estudian, desde el punto de vista de la especificación algebraica, las estructuras de datos funcionales (que permiten, en particular, la codificación de espacios infinitos) que aparecen en Kenzo [43, 44].

Kenzo es, también, un sistema basado en la programación orientada a objetos. El análisis formal de las características orientadas a objetos de Kenzo fue el tema de la tesis de César Domínguez, de nuevo codirigida por Laureano Lambán y Julio Rubio, en 2003 [16, 17, 19].

Otras publicaciones de esta línea de investigación fueron [12, 13].

Tras esta etapa dedicada a la especificación algebraica de estructuras de datos, que podemos calificar de teórica, se intuyó que había llegado el momento de migrar a algún tipo de sistemas informáticos que nos permitiesen, además de especificar tipos de datos y algoritmos, demostrar propiedades de los programas. Es decir, nos interesamos por los programas de ayuda a la demostración de teoremas. En este contexto, hemos desarrollado librerías formales en los sistemas Isabelle, Coq y ACL2.

3.2. Isabelle

A la hora de elegir un asistente de demostración para verificar algunos algoritmos clave de Kenzo, nuestra primera opción fue el sistema Isabelle, y más concretamente su implementación de lógica de orden superior, Isabelle/HOL (HOL es un acrónimo de «Higher-Order Logic»), ya que ésta permitía representar de modo natural la programación funcional de orden superior presente en Kenzo. Además, al estar basado en lógica clásica (y no intuicionista), también las demostraciones matemáticas originales podían trasladarse sin prestar atención a los fundamentos. El primer resultado clave obtenido fue la mecanización completa del algoritmo más importante de Kenzo, conocido con el nombre de Lema Básico de Perturbación (o BPL, según sus siglas en inglés) [3]. Dicha formalización fue el objetivo de la tesis de Jesús Aransay, defendida en 2006 y codirigida por Clemens Ballarin (Technical University of Munich) y Julio Rubio.

Un inconveniente de utilizar Isabelle/HOL es que la obtención de programas (cuya especificación haya sido demostrada correcta) a partir de las demostraciones mecanizadas no es directa. Por ello, se investigó en ese problema, consiguiendo obtener versiones ejecutables del BPL, ligadas a las demostraciones formalizadas en Isabelle/HOL [4]. En la actualidad, esta línea de formalización en Isabelle/HOL con la consiguiente generación de programas certificados sigue en activo, con la tesis de José Divasón, que está siendo dirigida por Jesús Aransay, y ha permitido obtener interesantes resultados de cálculo verificado en Álgebra Lineal a partir del método de eliminación de Gauss-Jordan [5]. Dicho procedimiento permite obtener directamente resultados de cálculo para la resolución de ecuaciones lineales o el cálculo de determinantes (este aspecto es especialmente importante, pues es bien conocido que algunos de los sistemas de cálculo simbólico comerciales, como

Mathematica, no son de confianza en el cálculo de determinantes con números enteros grandes [27]).

3.3. Coq

Como hemos indicado en el apartado anterior, un inconveniente de utilizar un sistema de demostración basado en la lógica clásica, como Isabelle, es que la extracción de programas ejecutables se convierte en un problema de investigación adicional. En cambio, en los sistemas basados en una *lógica constructiva*, cada demostración desarrollada, incorpora, de modo automático, un programa de cálculo certificado correcto. El sistema más conocido basado en lógica constructiva es Coq, cuyo soporte teórico es la Teoría Constructiva de Tipos, creada por Thierry Coquand (Göteborg University).

Nuestras primeras aportaciones en Coq giraron en torno a la construcción por César Domínguez de una demostración completa del BPL en el caso particular de un bicomplejo. Esto permitió una formalización en Coq de la homología efectiva de un bicomplejo, con sus programas asociados [18].

El resto de desarrollos en Coq han estado vinculados al proyecto europeo «Formalisation on Mathematics» (ForMath, [29]). Este proyecto se desarrolló entre 2010 y 2013, fue liderado por Thierry Coquand, y tuvo 4 nodos, uno de los cuales fue nuestro grupo en La Rioja [72]. Dentro de nuestra contribución al proyecto ForMath, las aportaciones más importantes se centraron en la tesis de María Poza, que fue defendida en 2013, bajo la codirección de César Domínguez y Julio Rubio. En dicha tesis se formalizaron los algoritmos que relacionan homología efectiva y campos de vectores discretos. También se consiguió verificar programas para el procesamiento homológico de imágenes biomédicas (en el ámbito de la neurofisiología, concretamente), una de las aplicaciones más destacadas del proyecto ForMath [53].

Durante una breve etapa en la que Jónathan Heras fue contratado como investigador por el proyecto ForMath, además de colaborar estrechamente con María Poza, realizó también importantes contribuciones en Coq, como la formalización de la homología persistente, en un trabajo conjunto con Thierry Coquand y otros miembros del nodo de ForMath en Gotemburgo [33].

3.4. ACL2

El tercer sistema de demostración automatizada que hemos utilizado intensivamente en nuestra investigación ha sido ACL2. Se trata de un sistema muy diferente de Isabelle y de Coq. Por una parte, desde el punto de vista de los fundamentos, es un sistema basado en la lógica de primer orden (mientras que Isabelle/HOL y Coq dependen de lógicas de orden superior). Por otra, ACL2 es un sistema mucho más automático, mientras que Isabelle y Coq son más *interactivos* (en el sentido de que el usuario debe dirigir mucho más directamente los pasos

de las demostraciones). Por último, la dicotomía deducción/cálculo se presenta de un modo diferente en ACL2, puesto que se trata, simultáneamente, de un lenguaje de programación y de una lógica para enunciar y demostrar propiedades de los programas.

En tanto que lenguaje de programación, ACL2 es una variante de Common Lisp, que resulta ser también el lenguaje en el que está programado Kenzo. Por ello, parece un sistema especialmente adecuado para nuestros intereses. Sin embargo, al no disponer de expresividad de orden superior, no puede ser utilizado de modo natural para modelar algunas de las características de Kenzo (en particular, las que se refieren al tratamiento de espacios infinitos). Esta característica explica nuestra necesidad de recurrir, además de a ACL2, a sistemas como Isabelle y Coq.

Las primeras aportaciones en ACL2 de nuestro grupo fueron implementadas por Mirian Andrés, y estuvieron dedicadas a la formalización en ACL2 de algunas construcciones básicas en Kenzo (y en Topología Algebraica), como el complejo de cadenas asociado a una estructura simplicial. La tesis de Mirian Andrés, que estaba siendo dirigida por Laureano Lambán y Julio Rubio, quedó lamentablemente inacabada. Nuestra querida amiga Mirian falleció como consecuencia de un accidente de tráfico sufrido cuando acudía a participar, y presentar parte de su investigación, en el Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones que se celebró en Granada en 2008. Los temas que hubiese debido cubrir su tesis fueron posteriormente completados por Laureano Lambán y Julio Rubio, en conjunción con los investigadores de la Universidad de Sevilla Francisco Jesús Martín Mateos y José Luis Ruiz Reina. Los principales hitos fueron la formalización en ACL2 del *Teorema de Normalización* (un importante resultado en Homología Simplicial, que actúa como una especie de pre-requisito para Kenzo) [40] y del *Teorema de Eilenberg-Zilber* (central en Kenzo, y en Topología Algebraica Computacional, al establecer un puente entre la Geometría y el Álgebra) [41, 42].

La tesis de Jónathan Heras también incluyó importantes aportaciones en ACL2, como la demostración de la corrección de la implementación en Kenzo de los conjuntos simpliciales [35] y la verificación de programas Common Lisp para el procesamiento homológico de imágenes digitales [36]. Estas contribuciones se inscribieron en un contexto más amplio, en el que se produjeron aplicaciones para la integración de deducción y cálculo, como explicamos en la siguiente sección.

4. INTEGRACIÓN DE CÁLCULO Y DEDUCCIÓN

Con lo explicado en los apartados anteriores, el lector puede hacerse una idea clara de que, dentro de nuestro grupo, se utilizan tecnologías muy variadas: distintos lenguajes de programación, distintos sistemas de cálculo simbólico, distintos sistemas de razonamiento automatizado. Aunque hay una cierta especialización de cada investigador a cada entorno de trabajo, está claro que los objetivos están indisolublemente enlazados, y por ello los investigadores se deben coordinar para resolver problemas con una perspectiva abierta. De un modo análogo, aparece la

necesidad de *interoperar* entre distintos sistemas para que colaboren, al igual que los investigadores, en un objetivo común.

En el área del cálculo simbólico, Ana Romero ha dirigido la mayoría de los esfuerzos. En primer lugar, y en colaboración con Mirian Andrés, utilizando el *middleware* CORBA para distribuir cálculos en Topología Algebraica [2]. Más adelante ha integrado cálculos en Kenzo con otros en GAP [59] y en JavaPlex [62]. En todas estas iniciativas, la tecnología XML ha sido utilizada como *interlingua* (concretamente los estándares MathML y OpenMath).

Ese mismo tipo de tecnología ha sido también fundamental para interoperar entre el asistente de demostración Isabelle y el sistema de razonamiento mecanizado ACL2 [6], en un esfuerzo que ha agrupado no sólo a investigadores de nuestro grupo dedicados a la verificación de programas, sino también a otros que provienen de la metamodelización conceptual (especialistas en las tecnologías UML y OCL), cuya labor comentaremos en posteriores secciones. Esa infraestructura fue utilizada para verificar, integrando distintas herramientas, programas de tratamiento de imágenes [34].

También los sistemas Isabelle/HOL y Coq fueron comparados desde el punto de vista de su capacidad expresiva y su estilo de uso en varios trabajos [7, 8]; para una introducción divulgativa sobre el uso de estos asistentes de demostración, véase [9].

La apuesta más arriesgada en esta área de la interoperabilidad fue la construcción de un sistema que integrase deducción y cálculo. Concretamente, se diseñó un sistema que tuviese como motor de cálculo Kenzo y como sistema de ayuda al razonamiento ACL2. El sistema tomó la forma de una interfaz de usuario para el sistema Kenzo, que denominamos *fKenzo* (por «friendly Kenzo») e incluía nuevos módulos para Kenzo, algunos de ellos verificados en ACL2 (como hemos mencionado en el apartado anterior), lo que podía ser comprobado por los usuarios sin salir de *fKenzo* [37, 38]. Este sistema vertebró la tesis de Jónathan Heras, defendida en 2011, y que fue codirigida por Vico Pascual y Julio Rubio. El marco general en el que se inscribió la tesis de Jónathan Heras fue la *gestión mecanizada del conocimiento matemático* (o MKM, por las siglas en inglés de *Mathematical Knowledge Management*), área de investigación que pretende producir recursos para una práctica integral de las matemáticas por computador (incluyendo cálculo, deducción, acceso distribuido y difusión electrónica del conocimiento matemático).

Una reflexión que surge de todas estas iniciativas es que es necesaria una visión holística, interdisciplinar, que requiere de investigadores en distintas áreas de la Informática, que incluyen bases de datos, técnicas de Inteligencia Artificial, procesamiento de lenguajes formales, cálculo distribuido y, en general, una «Informática sin adjetivos». Nuestro grupo llevaba tiempo preparado para ese desafío, puesto que había incluido, desde años atrás, a investigadores en varias de esas áreas necesarias, como explicamos en la siguiente sección.

5. INFORMÁTICA, SIN ADJETIVOS

5.1. Sistemas de Información

El grupo Noesis de la Universidad de Zaragoza, dirigido por Eladio Domínguez, no sólo estaba dedicado a la Topología Computacional, sino que también tenía (y tiene) un interés en la investigación en sistemas de información. Siendo el foco primigenio las bases de datos, poco a poco los intereses fueron moviéndose hacia la modelización conceptual y la metamodelización [25]. En el tiempo, esto coincidió con el auge del (meta)lenguaje UML. La tesis doctoral de Ángel Luis Rubio, en 2002, estuvo dedicada al análisis de los aspectos dinámicos de UML [26]. Dicha tesis fue dirigida por Eladio Domínguez, fue defendida en 2002 en la Universidad de La Rioja, y permitió la entrada en nuestro grupo en La Rioja de las tecnologías basadas en UML.

En los años siguientes, y siempre en colaboración con el grupo Noesis, Ángel Luis Rubio continuó investigando en temas como la evolución de sistemas de información [21], y la integración de las tecnologías UML y XML [20], que luego han sido utilizadas con éxito en otras investigaciones de nuestro grupo (como la ya mencionada de la interoperabilidad entre demostradores de teoremas). Esta investigación ha contado también con la contribución de Beatriz Pérez, que se incorporó a nuestro grupo en 2008, y defendió su tesis, codirigida por Eladio Domínguez y María Antonia Zapata (Universidad de Zaragoza), en 2011 [22].

Por último, siguiendo con la línea de trabajos relacionados con la metamodelización y UML hemos de referir la tesis doctoral de Emilio Rodríguez, defendida en 2013 bajo la dirección de Francisco García y Ángel Luis Rubio. En ella se ha realizado un, a la vez exhaustivo y arduo, trabajo de análisis sobre los problemas asociados a la teoría de la modelización y, muy especialmente, los relativos a los estándares UML y MOF propuestos por el Object Management Group (OMG). Este trabajo fue presentado en el congreso MODELS 2010 [57], congreso de referencia de la investigación en UML, y captó el interés de los asistentes. El correspondiente artículo fue enviado a OMG a instancias de los organizadores del Congreso. La tesis no se limita a evidenciar problemas, sino que realiza una novedosa propuesta para la teoría de la modelización que responde y explica muchos de los interrogantes abiertos.

5.2. Servicios y aplicaciones web

Para conseguir eficacia en el cálculo simbólico distribuido, dentro del grupo se potenció la investigación en el área de los servicios web. Concretamente, la tesis de Eloy Mata, que fue defendida en 2009 y codirigida por José Ángel Bañares (Universidad de Zaragoza) y Julio Rubio, estuvo dedicada a este tema. En ella se abordaron problemas de interoperabilidad lingüística, de coordinación de servicios web y, de modo coherente con las ideas generales que orientan nuestra investigación, de formalización de los sistemas de coordinación diseñados [1, 47, 48, 49].

En el contexto más amplio de las aplicaciones web, Francisco García ha investigado arquitecturas para mejorar el desarrollo de programas para Internet. Concretamente, su propuesta de independizar las tareas de diseño gráfico y de implementación de la lógica de negocio, apoyada por herramientas software específicas (denominadas *sistemas de plantillas en navegador*), ha mostrado ser muy eficaz, tanto en el plano teórico como en el práctico [30].

5.3. Seguridad

Un problema que ha atravesado de modo transversal nuestra investigación es el de la Seguridad Informática, entendida en un sentido amplio, que incluye desde nuestra preocupación por la corrección del software y su verificación, hasta el desarrollo de arquitecturas para mejorar la seguridad de los programas implementados. En esta área hay que destacar de nuevo la tesis de Emilio Rodríguez, ya mencionada anteriormente en la sección 5.1. En dicha tesis se propone una arquitectura para modelar la seguridad en arquitecturas orientadas a servicios (SOA), por ejemplo las basadas en servicios web. Esta arquitectura se preocupa, de modo novedoso, no sólo de la seguridad de los datos, que es lo habitual, sino también de la del código ejecutado tanto por los proveedores como por los consumidores de los servicios [55]. Además, la tesis ha arrojado resultados adicionales en forma de herramientas para la representación del conocimiento utilizando extensiones de los mapas conceptuales (*Concept Maps*) [56].

Esta investigación ilustra el trabajo de coordinación que subyace en nuestro equipo: se cubren temas de metamodelización, de servicios web y, además, se señala una característica distintiva de nuestra labor, como es la apuesta por una Informática Aplicada a problemas reales.

6. INFORMÁTICA APLICADA

6.1. Cálculo Científico

Para poner en valor la investigación relacionada con la coordinación de servicios distribuidos, el grupo, bajo la dirección de Eloy Mata, contactó con la empresa riojana de telecomunicaciones Knet. Gracias a esa colaboración se constituyó el proyecto *RiojaScience@home*, en el que por medio de un sistema de computación voluntaria, los clientes de ADSL de Knet podrían dedicar parte de la potencia de cálculo de sus equipos (cuando éstos estuviesen desocupados) a realizar tareas para facilitar el cálculo científico en investigaciones de interés social.

El proyecto estrella fue la ejecución distribuida de programas de Dinámica Molecular que colegas del área de Química Física (Departamento de Química de la Universidad de La Rioja) necesitaban para investigar posibles fármacos contra la hepatitis.

La arquitectura propuesta es escalable y permite trabajar tanto con CPUs como con GPUs (los procesadores de gráficos que tienen parte de los equipos personales actuales) [54].

En este ámbito del cálculo científico también hay que destacar la colaboración de Eduardo Sáenz de Cabezón con investigadores del Departamento de Agricultura y Alimentación, que ha permitido el establecimiento de modelos matemáticos para el control de plagas en cultivos, así como su implantación como servicios informáticos [81].

6.2. Imágenes Digitales

Dentro del área de la bioinformática, otra colaboración importante en los últimos años ha sido la establecida con un equipo de biólogos dirigidos por Miguel Morales [51]. Este grupo de biólogos investigan sobre la síntesis de fármacos que puedan actuar contra enfermedades neurodegenerativas como el Alzheimer.

Como parte imprescindible de su trabajo, los biólogos deben analizar imágenes de cultivos neuronales tomadas con aparatos microscópicos muy potentes. Nuestra tarea como informáticos consiste en intentar automatizar dicho procesamiento, aplicando técnicas que provienen de la Geometría y la Topología Algebraica. Algunos algoritmos de Jónathan Heras y de Ana Romero han sido ya implementados y están en uso en laboratorios de neurofisiología de Europa.

Este tema es el objeto de la tesis de Gadea Mata, que está siendo codirigida por Miguel Morales y Julio Rubio. Como resultados parciales, Gadea Mata ha construido varios plugins para el entorno de programación Fiji/ImageJ, que es ampliamente utilizado por científicos experimentales en biología.

Algunas publicaciones sobre este tema son [60, 61].

6.3. Protocolos Biomédicos

El grupo Noesis de la Universidad de Zaragoza también ha impulsado, a lo largo de los años, la transferencia tecnológica al tejido industrial, a través en particular de una spin-off llamada InfoZara. Algunos de los contratos firmados estuvieron también relacionados con el área biomédica, y se dedicaron al análisis y validación de protocolos biomédicos.

Desde nuestro grupo, Beatriz Pérez estuvo muy comprometida con estos temas (que, de hecho, pasaron a formar parte de su tesis). Se trata de una investigación aplicada que muestra de nuevo cómo los distintos temas se enhebran en nuestro grupo, puesto que en ella convergen temas de metamodelización [23, 24] con otros relacionados con los métodos formales. En efecto, técnicas de demostración de teoremas (basadas en *Model Checking*, en esta ocasión [52]) han sido utilizadas para la validación de protocolos biomédicos reales que se usan en distintos laboratorios e instituciones.

6.4. Fiabilidad en Redes

La investigación de Eduardo Sáenz de Cabezón sobre la homología de ideales monomiales ha encontrado aplicación en el área de la Estadística Algebraica [45, 46] y en el análisis de Redes Complejas. Estos proyectos aplicados han sido realizados en conjunción con Henry P. Wynn (London School of Economics).

El cálculo simbólico ha sido utilizado para estudiar la fiabilidad de redes, vinculando las características algebraicas a propiedades que permiten prever el comportamiento de las redes ante fallos de los sistemas de comunicación.

Esta prometedora línea ha producido ya resultados reflejados en las publicaciones [82, 83, 84, 85].

6.5. Informática aplicada a los procesos de enseñanza y aprendizaje en Matemáticas

Otro de los proyectos de transferencia más importantes llevados a cabo por nuestro grupo ha sido financiado por la empresa barcelonesa Addlink. Se trata de un entorno para facilitar el aprendizaje de las matemáticas en los cursos de educación secundaria.

Nuestro grupo se encargó del diseño e implementación de la arquitectura que subyace al entorno. Dicha arquitectura es similar a la desarrollada para *fKenzo*: un motor de cálculo (en este caso el sistema libre de cálculo Maxima, también programado en Common Lisp) es envuelto en una capa intermedia, que introduce elementos de procesamiento del conocimiento en el sistema, y después se comunica, por medio de tecnologías XML, con una capa externa. En esta ocasión, en lugar de tener un demostrador de teoremas como ACL2 como asistente, el alumno usuario se encuentra con una serie de contenidos didácticos que fueron diseñados y desarrollados por investigadores de la Universidad de Cantabria.

El producto resultante se denominó TutorMates [86], y la Universidad de La Rioja firmó un contrato de comercialización con Addlink, vinculado al trabajo de nuestro grupo.

Algunas publicaciones en las que se explican los fundamentos de TutorMates son [31, 32].

6.6. Informática aplicada a los procesos de enseñanza y aprendizaje en Informática

Como ya indicamos en la introducción, nuestro grupo de investigación es también responsable, en gran medida, de los estudios de Informática que se imparten en nuestra universidad. Parece natural, por tanto, que nuestros esfuerzos en investigación aplicada reviertan también en la mejora de nuestra labor docente.

Esta vía está siendo explorada por César Domínguez y Arturo Jaime. En particular están realizando estudios para analizar el rendimiento de distintos métodos

docentes en asignaturas de la titulación. Estas técnicas incluyen la implementación de aprendizaje basado en proyectos [14] y la telecolaboración vía TICs entre asignaturas complementarias impartidas en universidades presenciales distantes entre sí [39]. Por otro lado, la tesis de Juan José Olarte, codirigida por César Domínguez y Arturo Jaime, pretende explorar los distintos estilos de tutorización en proyectos fin de carrera y desarrollar herramientas informáticas que den soporte a dichos estilos [15].

7. CONCLUSIONES

Nuestro equipo de investigación ha agrupado a lo largo de los años a la mayor parte de los profesores de las áreas de conocimiento informáticas en la Universidad de La Rioja (Lenguajes y Sistemas Informáticos, Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial; la tercera área informática, Arquitectura de Computadores, no está presente en nuestra universidad).

Esto ha hecho aflorar unas sinergias que han permitido coordinar, de un modo mantenido en el tiempo, un grupo de investigadores y temas diversos, en los que una integración flexible, a la par que coherente, ha dado sus frutos, como queda demostrado por las publicaciones y el impacto internacional que se han conseguido en las distintas líneas de investigación abiertas.

REFERENCIAS

- [1] P. ÁLVAREZ, J. A. BAÑARES, E. MATA, P. R. MURO-MEDRANO Y J. RUBIO, Generative communication with semantic matching in distributed heterogeneous environments, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **2809** (2003), 231–242.
- [2] M. ANDRÉS, V. PASCUAL, A. ROMERO Y J. RUBIO, Remote access to a Symbolic Computation system for Algebraic Topology: a client-server approach, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **3516** (2005), 635–642.
- [3] J. ARANSAY, C. BALLARIN Y J. RUBIO, A mechanized proof of the Basic Perturbation Lemma, *J. Automat. Reason.* **40** (2008), 271–292.
- [4] J. ARANSAY, C. BALLARIN Y J. RUBIO, Generating certified code from formal proofs: a case study in homological algebra, *Form. Asp. Comput.* **22** (2010), 193–213.
- [5] J. ARANSAY Y J. DIVASÓN, Formalization and execution of Linear Algebra: from theorems to algorithms, *Logic-Based Program Synthesis and Transformation* (Madrid, 2013), Technical Report TR-11-13, Universidad Complutense de Madrid, 49–66, *Gopal Gupta y Ricardo Peña (Eds.)*, Madrid, 2013.
- [6] J. ARANSAY, J. DIVASÓN, J. HERAS, L. LAMBÁN, V. PASCUAL, A. L. RUBIO Y J. RUBIO, Transforming (almost) without programming: a case of interoperability among theorem provers, <http://wiki.portal.chalmers.se/cse/uploads/ForMath/twpcitp>.

- [7] J. ARANSAY Y C. DOMÍNGUEZ, A case-study in algebraic manipulation using mechanized reasoning tools, *Int. J. Comput. Math.* **87** (2010), 1936–1949.
- [8] J. ARANSAY Y C. DOMÍNGUEZ, Modelling Differential Structures in Proof Assistants: The Graded Case, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **5717** (2009), 203–210.
- [9] J. ARANSAY Y C. DOMÍNGUEZ, Demostración asistida por ordenador, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **15** (2012), 75–104.
- [10] A. BERCIANO, J. RUBIO Y F. SERGERAERT, A case study of A-infinite-structure, *Georgian Math. J.* **17** (2010), 57–77.
- [11] A. M. BIGATTI Y E. SÁENZ-DE-CABEZÓN, Computation of the $(n-1)$ -st Koszul homology of monomial ideals and related algorithms, *Proceedings International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 31–37, ACM, 2009.
- [12] C. DOMÍNGUEZ Y D. DUVAL, Diagrammatic logic applied to a parameterisation process, *Math. Structures Comput. Sci.* **20** (2010), 639–654.
- [13] C. DOMÍNGUEZ Y D. DUVAL, A parameterization process: from a functorial point of view, *Int. J. Found. Comput. Sci.* **23** (2012), 225–242.
- [14] C. DOMÍNGUEZ Y A. JAIME, Database design learning: A project-based approach organized through a course management system, *Comput. Educ.* **55** (2010), 1312–1320.
- [15] C. DOMÍNGUEZ, A. JAIME, F. J. GARCÍA-IZQUIERDO Y J. J. OLARTE, Supervision typology in computer science engineering capstone projects, *J. Eng. Educ.* **101** (2012), 679–697.
- [16] C. DOMÍNGUEZ, L. LAMBÁN Y J. RUBIO, Object-oriented institutions to specify symbolic computation systems, *RAIRO Theor. Inform. Appl.* **41** (2007), 191–214.
- [17] C. DOMÍNGUEZ Y J. RUBIO, Modeling inheritance as coercion in a symbolic computation system, *Proceedings International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 109–115, ACM, 2001.
- [18] C. DOMÍNGUEZ Y J. RUBIO, Effective Homology of Bicomplexes, formalized in Coq, *Theoret. Comput. Sci.* **412** (2011), 962–970.
- [19] C. DOMÍNGUEZ, J. RUBIO Y F. SERGERAERT, Modeling Inheritance as Coercion in the Kenzo System, *J.UCS* **12** (2006), 1701–1730.
- [20] E. DOMÍNGUEZ, J. LLORET, B. PÉREZ, A. RODRÍGUEZ, A. L. RUBIO Y M. A. ZAPATA, Evolution of XML schemas and documents from stereotyped UML class models: A traceable approach, *Information and Software Technology* **53** (2011), 34–50.
- [21] E. DOMÍNGUEZ, J. LLORET, A. L. RUBIO Y M. A. ZAPATA, MeDEA: A database evolution architecture with traceability, *Data and Knowledge Engineering* **65** (2008), 419–441.
- [22] E. DOMÍNGUEZ, B. PÉREZ, A. L. RUBIO Y M. A. ZAPATA, A systematic review of code generation proposals from state machine specifications, *Information and Software Technology* **54** (2012), 1045–1066.

- [23] E. DOMÍNGUEZ, B. PÉREZ, A. L. RUBIO, M. A. ZAPATA, J. LAVILLA Y A. ALLUÉ, Occurrence-Oriented Design Strategy for Developing Business Process Monitoring Systems, *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering* **26** (2014), 1749–1762.
- [24] E. DOMÍNGUEZ, B. PÉREZ Y M. A. ZAPATA, Towards a Traceable Clinical Guidelines Application: A Model Driven Approach, *Methods of Information in Medicine* **46** (2010), 571–580.
- [25] E. DOMÍNGUEZ, A. L. RUBIO Y M. A. ZAPATA, Noesis: Towards a situational method engineering technique, *Information Systems* **32** (2007), 181–222.
- [26] E. DOMÍNGUEZ, A. L. RUBIO Y M. A. ZAPATA, Dynamic Semantics of UML State Machines: A Metamodeling Perspective, *Journal of Database Management* **13** (2002), 20–38.
- [27] A. J. DURÁN, M. PÉREZ Y J. L. VARONA, The misfortunes of a trio of mathematicians using Computer Algebra Systems. Can we trust in them?, *Notices Amer. Math. Soc.* **61** (2014), 1249–1252.
- [28] H. EDELSBRUNNER Y J. HARER, *Computational Topology: An Introduction*, American Mathematical Society, 2010.
- [29] FORMATH, Formalisation of Mathematics, <http://wiki.portal.chalmers.se/cse/pmwiki.php/ForMath/ForMath>.
- [30] F. J. GARCÍA-IZQUIERDO Y R. IZQUIERDO-CASTANEDO, Is the Browser the Side for Templating?, *IEEE Internet Computing* **16** (2012), 61–68.
- [31] M. J. GONZÁLEZ, J. RUBIO, T. RECIO, L. GONZÁLEZ-VEGA Y A. PASCUAL, Teaching Geometry with TutorMates, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **6785** (2011), 384–398.
- [32] M. J. GONZÁLEZ, J. RUBIO, T. RECIO, L. GONZÁLEZ-VEGA Y A. PASCUAL, TutorMates: Cálculo Científico en Educación Secundaria, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **14** (2011), 565–577.
- [33] J. HERAS, T. COQUAND, A. MÖRTBERG Y V. SILES, Computing Persistent Homology within Coq/SSReflect, *ACM Trans. Comput. Log.* **14** (2013), n.º 4, Art. 26.
- [34] J. HERAS, G. MATA, A. ROMERO, J. RUBIO Y R. SÁENZ, Verifying a platform for digital imaging: a multi-tool strategy, *Lecture Notes in Artificial Intelligence* **7961** (2013), 66–81.
- [35] J. HERAS, V. PASCUAL Y J. RUBIO, Proving with ACL2 the correctness of simplicial sets in the Kenzo system, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **6564** (2011), 37–51.
- [36] J. HERAS, V. PASCUAL Y J. RUBIO, A certified module to study digital images with the Kenzo system, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **6927** (2011), 113–120.
- [37] J. HERAS, V. PASCUAL, J. RUBIO Y F. SERGERAERT, fKenzo: a user interface for computations in Algebraic Topology, *J. Symbolic Comput.* **46** (2011), 685–698.

- [38] J. HERAS, V. PASCUAL, J. RUBIO Y F. SERGERAERT, fKenzo: una interfaz de usuario para realizar cálculos en Topología Algebraica, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **14** (2011), 205–308.
- [39] A. JAIME, C. DOMÍNGUEZ, A. SÁNCHEZ Y J. M. BLANCO, Interuniversity telecollaboration to improve academic results and identify preferred communication tools, *Comput. Educ.* **64** (2013), 63–69.
- [40] L. LAMBÁN, F. J. MARTÍN-MATEOS, J. RUBIO Y J. L. RUIZ-REINA, Formalization of a Normalization Theorem in Simplicial Topology, *Ann. Math. Artif. Intell.* **64** (2012), 1–37.
- [41] L. LAMBÁN, F. J. MARTÍN-MATEOS, J. RUBIO Y J. L. RUIZ-REINA, Certified symbolic manipulation: bivariate simplicial polynomials, *Proceedings International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 243–250, ACM, 2013.
- [42] L. LAMBÁN, F. J. MARTÍN-MATEOS, J. RUBIO Y J. L. RUIZ-REINA, Verifying the bridge between Simplicial Topology and Algebra: the Eilenberg-Zilber algorithm, *Log. J. IGPL* **22** (2014), 39–65.
- [43] L. LAMBÁN, V. PASCUAL Y J. RUBIO, Specifying implementations, *Proceedings International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 245–251, ACM, 1999.
- [44] L. LAMBÁN, V. PASCUAL Y J. RUBIO, An object-oriented interpretation of the EAT system, *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* **14** (2003), 187–215.
- [45] H. MARURI-AGUILAR, E. SÁENZ-DE-CABEZÓN Y H. P. WYNN, Betti numbers of polynomial hierarchical models for experimental designs, *Ann. Math. Artif. Intell.* **64** (2012), 411–426.
- [46] H. MARURI-AGUILAR, E. SÁENZ-DE-CABEZÓN Y H. P. WYNN, Alexander duality in experimental designs, *Ann. Inst. Statist. Math.* **65** (2013), 667–686.
- [47] E. MATA, P. ÁLVAREZ, J. A. BAÑARES, Y J. RUBIO, Towards an efficient rule-based coordination of Web Services, *Lecture Notes in Artificial Intelligence* **3315** (2004), 73–82.
- [48] E. MATA, P. ÁLVAREZ, J. A. BAÑARES, Y J. RUBIO, Formal Modelling of a Coordination System: From Practice to Theory, and Back Again, *Lecture Notes in Artificial Intelligence* **4457** (2007), 229–244.
- [49] E. MATA, P. ÁLVAREZ, J. A. BAÑARES, Y J. RUBIO, Formal Reasoning on a Web Coordination System, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **4739** (2007), 329–336.
- [50] R. MIKHAILOV Y J. WU, On homotopy groups of the suspended classifying spaces, *Algebr. Geom. Topol.* **10** (2010), 565–625.
- [51] M. MORALES ET AL., *SpineUp*, sitio web del grupo, <http://www.spineup.es>.
- [52] B. PÉREZ Y I. PORRES, Authoring and Verification of Clinical Guidelines: a Model Driven Approach, *Journal of Biomedical Informatics* **43** (2012), 520–536.

- [53] M. POZA, C. DOMÍNGUEZ, J. HERAS Y J. RUBIO, A certified reduction strategy for homological image processing, *ACM Trans. Comput. Log.* **15** (2014), n.º 3, Art. 23.
- [54] RIOJA SCIENCE AT HOME, RiojaScience@home, <http://www.riojascience.com/>.
- [55] E. RODRÍGUEZ-PRIEGO Y F. J. GARCÍA-IZQUIERDO, Securing Code in Services Oriented Architecture *Lecture Notes in Comput. Sci.* **4607** (2007), 550–555.
- [56] E. RODRÍGUEZ-PRIEGO, F. J. GARCÍA-IZQUIERDO Y A. RUBIO, References-enriched Concept Map: a tool for collecting and comparing disparate definitions appearing in multiple references, *Journal of Information Science* **39** (2013), 789–804.
- [57] E. RODRÍGUEZ-PRIEGO, F. J. GARCÍA-IZQUIERDO Y A. L. RUBIO, Modeling Issues: a Survival Guide for a Non-expert Modeler, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **6395** (2007), 361–375.
- [58] A. ROMERO, Computing the first stages of the Bousfield-Kan spectral sequence, *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* **21** (2010), 227–248.
- [59] A. ROMERO, G. ELLIS Y J. RUBIO, Interoperating between Computer Algebra systems: computing homology of groups with Kenzo and GAP, *Proceedings International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 303–310, ACM, 2009.
- [60] A. ROMERO, J. HERAS, G. MATA, M. MORALES, Y J. RUBIO, Procesamiento topo-geométrico de imágenes neuronales, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **17** (2014), 109–128.
- [61] A. ROMERO, J. HERAS, G. MATA, J. RUBIO Y F. SERGERAERT, Spectral sequences for computing persistent homology of digital images, *Conference on Applications of Computer Algebra* (Málaga, 2013), 331–335.
- [62] A. ROMERO, J. HERAS, J. RUBIO Y F. SERGERAERT, Defining and computing persistent Z-homology in the general case, <http://arxiv.org/abs/1403.7086>, 2014.
- [63] A. ROMERO Y J. RUBIO, Computing the homology of groups: The geometric way, *J. Symbolic Comput.* **47** (2012), 752–770.
- [64] A. ROMERO Y J. RUBIO, Homotopy groups of suspended classifying spaces: an experimental approach, *Math. Comp.* **82** (2013), 2237–2244.
- [65] A. ROMERO, J. RUBIO Y F. SERGERAERT, Computing Spectral Sequences, *J. Symbolic Comput.* **41** (2006), 1059–1079.
- [66] A. ROMERO Y F. SERGERAERT, Effective homotopy of fibrations, *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* **23** (2012), 85–100.
- [67] A. ROMERO Y F. SERGERAERT, Programming before Theorizing, a case study, *Proceedings International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 289–296, ACM, 2012.
- [68] B. H. ROUNE Y E. SÁENZ-DE-CABEZÓN, Complexity and algorithms for Euler characteristic of simplicial complexes, *J. Symbolic Comput.* **50** (2013), 170–196.

- [69] J. RUBIO, Programmation du Lemme de Perturbation, *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat.* **38** (1992), 41–47.
- [70] J. RUBIO, Integrating functional programming and symbolic computation, *Math. Comput. Simulation* **44** (1997), 505–511.
- [71] J. RUBIO, Topología Algebraica Efectiva, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **1** (1998), 198–208.
- [72] J. RUBIO, On the role of formalization in Computational Mathematics, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **20** (2013), 385–403.
- [73] J. RUBIO Y F. SERGERAERT, Homologie effective et suites spectrales d’Eilenberg-Moore, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **306** (1988), 723–726.
- [74] J. RUBIO Y F. SERGERAERT, Supports acycliques et algorithmique, *Astérisque* **192** (1990), 35–55.
- [75] J. RUBIO Y F. SERGERAERT, Constructive Algebraic Topology, *Bull. Sci. Math.* **126** (2002), 389–412.
- [76] J. RUBIO Y F. SERGERAERT, Postnikov “invariants” in 2004, *Georgian Math. J.* **12** (2005), 139–155.
- [77] J. RUBIO Y F. SERGERAERT, Algebraic models for homotopy types, *Homology Homotopy Appl.* **7** (2005), 139–160.
- [78] J. RUBIO Y F. SERGERAERT, Computing with locally effective matrices, *Int. J. Comput. Math.* **82** (2005), 1177–1189.
- [79] E. SÁENZ-DE-CABEZÓN, Multigraded Betti numbers without computing minimal free resolutions, *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* **20** (2009), 481–495.
- [80] E. SÁENZ-DE-CABEZÓN, Computing the support of monomial iterated mapping cones, *J. Symbolic Comput.* **45** (2010), 953–964.
- [81] E. SÁENZ-DE-CABEZÓN, L. J. HERNÁNDEZ, M. T. RIVAS, E. GARCÍA-RUIZ, V. MARCO, I. PÉREZ-MORENO Y F. J. SÁENZ-DE-CABEZÓN, A computer implementation of the partition of the unity procedure and its application to arthropod population dynamics. A case study on the European grape berry moth, *Math. Comput. Simulation* **82** (2011), 2–14.
- [82] E. SÁENZ-DE-CABEZÓN Y H. P. WYNN, Betti numbers and minimal free resolutions for multi-state system reliability bounds, *J. Symbolic Comput.* **44** (2009), 1311–1325.
- [83] E. SÁENZ-DE-CABEZÓN Y H. P. WYNN, Mincut ideals of two-terminal networks, *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* **21** (2010), 443–457.
- [84] E. SÁENZ-DE-CABEZÓN Y H. P. WYNN, Computational algebraic algorithms for the reliability of generalized k -out-of- n and related systems, *Math. Comput. Simulation* **82** (2011), 68–78.
- [85] E. SÁENZ-DE-CABEZÓN Y H. P. WYNN, Measuring the robustness of a network using minimal vertex covers, *Math. Comput. Simulation* **104** (2014), 82–94.
- [86] TUTORMATES, <http://www.tutormates.es>.



ZUBÍA

26



Gobierno de La Rioja
www.larioja.org



**Instituto
de Estudios
Riojanos**