REDIMAT
Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas
Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Un Origen Matemático vs Dos Orígenes Fenomenológicos: la Significación del Movimiento de Objetos Respecto del Punto (0,0)

Isaias Miranda[1], Luis Radford[2], y José Guzmán[3]

1) National Institute Politechich.
2) Laurentian University.
3) Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Date of publication: June 24th, 2013

To cite this article: Miranda, I., Radford, L., & Guzmán, J. (2013). Un Origen Matemático vs Dos Orígenes Fenomenológicos: la Significación del Movimiento de Objetos Respecto del Punto (0,0). *Journal of Research in Mathematics Education,* 2 (2), 183-208. doi:10.4471/redimat.2013.27

To link this article: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2013.27

REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education Vol. 2 No. 2 June 2013 pp. 183-208.

One Mathematical Origin vs. Two Phenomenological Origins: The Meaning of the Movement of Objects with Respect to the Point (0,0)

Isaias Miranda, *National Institute Politechich*
Luis Radford, *Laurentian University*
José Guzmán, *CINVESTAV*

Abstract

In this article we investigate the manner in which Grade10 (15–16-year-old) students and their teacher make sense of the (0, 0) point of a distance-time Cartesian graph in the context of the simultaneous movement of objects. The investigation of the sense-making processes is carried out through the theory of objectification. Within this theory, learning is conceptualized as the process in the course of which the students make sense of, and become critical acquainted with, cultural-historical forms of mathematical thinking. Methodologically, to investigate the sense-making processes that underpin learning, we pay attention to the different semiotic means that students and teachers mobilize (speech, gestures, symbols, artifacts, etc.). The results show some of the difficulties that the students have in order to notice the relational sense that underpins the mathematical meaning of point (0, 0). Behind an apparent simple sign lies, indeed, a condensed epistemology that the students start noticing after an arduous sensuous and conceptual work with the teacher. The article shows how a phenomenological meaning of (0, 0) is progressively transformed into a relational meaning characterized by a constant refinement of the sense of mathematical signs during the interaction between students, the teacher and the problem to solve.

Keywords: Mathematical origin, phenomenological origin, objectification, movement of objects, semiotic means of objectification, Cartesian Graphs.

2013 Hipatia Press
ISSN 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2013.27

REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education Vol. 2 No. 2 June 2013 pp. 183-208.

Un Origen Matemático vs Dos Orígenes Fenomenológicos: la Significación del Movimiento de Objetos Respecto del Punto (0,0)

Isaias Miranda
National Institute Politechich

Luis Radford
Laurentian University

José Guzmán
CINVESTAV

Resumen

En este artículo se analiza la evolución de las formas de significar, en estudiantes de grado 10, el origen de coordenadas de una gráfica d vs. t que informa sobre el movimiento simultáneo de dos objetos. Esta evolución es analizada a través de la teoría de la objetivación, la cual describe el saber como una forma codificada de acción y reflexión, y el aprendizaje como una transformación del sujeto que resulta de la toma de conciencia de la lógica histórico-cultural que subyace al saber. Desde el punto de vista metodológico, el aprendizaje se investiga como serie de procesos de objetivación; es decir, procesos sociales de toma de conciencia crítica en los que intervienen diferentes medios semióticos puestos en juego por los estudiantes (lenguaje, gestos, símbolos, artefactos, etc.). Los resultados indican la densidad epistemológica del concepto de origen cartesiano, así como las dificultades que implica la toma de conciencia sobre la importancia del punto (0,0) en la descripción del movimiento. Dicha toma de conciencia se caracteriza por un constante refinamiento de dotación de significados durante la interacción sucedida entre los estudiantes, el profesor y el problema a resolver.

Palabras Clave: Origen matemático, origen fenomenológico, objetivación, movimiento de objetos, medios semióticos de objetivación, gráficos cartesianos

2013 Hipatia Press
ISSN 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2013.27

Las gráficas cartesianas que representan el movimiento lineal de objetos con velocidad constante son generalmente usadas por los profesores de matemáticas cuando enseñan las representaciones gráficas de funciones de la forma f(x)=mx+b. Es común que el análisis de este tipo de gráficas consista en pedir a los estudiantes que, dado un tiempo específico, determinen la distancia recorrida por el objeto. Sin embargo, no es frecuente que los profesores centren su atención en la importancia que tiene el punto (0,0) en la determinación de las distancias recorridas: una pequeña modificación de este punto alterará la lectura del valor de la distancia e, incluso, la forma de la propia gráfica. Existen evidencias de las dificultades que tienen los estudiantes en asociar el origen de coordenadas con el lugar físico desde el cual se describe el movimiento (Nemirovsky, 1994; Nemirovsky, Tierney & Wright, 1998; Sherin, 2000; Radford, Demers, Guzmán & Cerulli, 2003; 2004) y del modo como estas dificultades son superadas (Miranda, Radford & Guzmán, 2007; Radford, 2009a, 2009b, 2009c).

Este artículo indaga cómo sucede el proceso de toma de conciencia de la interpretación de gráficas cartesianas que informan sobre el movimiento de objetos . La teoría utilizada para el análisis de los datos es la de objetivación (Radford, 2006).

Aproximación Socio-Cultural: Teoría de la Objetivación

En la teoría de la objetivación se propone una manera de teorizar los procesos de aprendizaje de los conceptos matemáticos (Radford, 2006); se basa en las investigaciones de tipo socio-cultural desarrolladas por Vygotsky y colaboradores (Leontiev, 1993; Vygotsky, 1978; Vygotsky & Luria, 1994). En concordancia con estas investigaciones, en la teoría de la objetivación se toma en cuenta, por un lado, la característica histórica del conocimiento matemático (vehiculado por la escuela) y, por el otro, la manera en que ese conocimiento es retomado por el alumno en procesos sociales de producción de significados (Miranda, Radford & Guzmán, 2007).

Entre los fundamentos de la teoría de la objetivación se encuentran dos principios: uno ontológico y otro epistemológico (Radford, 2006). Respecto al primero, la teoría establece que, filogenéticamente hablando, los objetos matemáticos no son independientes de la actividad realizada por los seres humanos; ni son simplemente el resultado del descubrimiento llevado a cabo por científicos interesados en conocer una realidad externa a ellos (Miranda, Radford & Guzmán, 2007). Por el contrario, en la teoría de la objetivación, los objetos matemáticos son generados por los individuos en el transcurso de su desarrollo histórico-cultural; en específico, estos objetos no son entidades substanciales. Los objetos son entendidos como formas culturalmente codificadas de movimiento. De manera más precisa, los objetos del saber "son patrones fijos de actividad reflexiva… incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos" (Radford, 2006, p. 111). Aplicando esta definición a las gráficas cartesianas en las que se representa el movimiento lineal de objetos, se puede decir que éstas son signos de una actividad de reflexión sobre el movimiento, reflexión que ha quedado incrustada en la cultura occidental desde la primera mitad del siglo XIV. Considerar a la gráfica cartesiana como signo o como objeto de mediación semiótica de cierta forma histórico-cultural de pensar el movimiento implica una reorganización en la manera de concebir el aprendizaje de dicha gráfica. Con el fundamento epistemológico de la teoría de la objetivación se describe, precisamente, el lineamiento general de esa reorganización por medio de la concepción sociocultural del aprendizaje (Radford, 2009c).

En el fundamento epistemológico se caracteriza la manera en que los estudiantes conocen los objetos matemáticos (Radford, 2006). Este conocimiento no es la consecuencia de las acciones adaptativas de un estudiante en el momento de resolver un problema, pues éstas son situadas dentro de las condiciones particulares de cada cultura y de cada forma de comprender el mundo (Miranda, Radford & Guzmán, 2007). El medio no es simplemente proveedor de estímulos a los que hay que adaptarse; el medio es portador de una serie de significaciones culturales que afectan la manera en que pensamos.

Las características de los fundamentos ontológico y epistemológico adoptados por la teoría sirven de base para concebir el aprendizaje de los objetos matemáticos como la "adquisición comunitaria (es decir, adquisición social y societal) de formas de reflexión del mundo guiadas por modos epistémico-culturales históricamente formados" (Radford, 2006, p. 105). Este aprendizaje no es una mera imposición o transmisión de contenidos conceptuales, sino un esfuerzo por "dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura" (Radford, 2006, p. 113). Estos contenidos conceptuales es lo que Hegel llama el saber “en-si-mismo” (“in-itself” knowledge). Ahora bien, esta dotación de sentido que subyace al aprendizaje no sucede de manera inmediata. En concordancia con las corrientes socioculturales, en la teoría de la objetivación el aprendizaje de las matemáticas es un proceso social en el que los significados son elaborados activamente por el estudiante. Dicho proceso es denominado: objetivación. A través de la objetivación, el saber “en-si-mismo” es transformado en saber para la conciencia (“for-itself” knowledge) que sucede a medida que nos “topamos” y “reconocemos” el saber “en-si-mismo.” En otras palabras, “la objetivación es (…) ese proceso social de toma de conciencia progresiva (…) de algo frente a nosotros, una figura, una forma, algo cuya generalidad notamos gradualmente, al mismo tiempo que la dotamos de sentido” (Radford, 2006, p. 116).

Desde el punto de vista de la teoría de la objetivación, el aprendizaje se tematiza como una forma compleja de actividad, caracterizado por dos fuentes de producción de significados: el uso de artefactos y la interacción social (Radford, 2006). En cuanto a la interacción social, ésta no debe entenderse como el resultado de la presencia de dos o más estudiantes dispuestos a negociar el significado de símbolos matemáticos. En esta teoría, los objetos matemáticos no se negocian, pues esto equivaldría a desconocer el papel de la cultura en el aprendizaje: “la interacción [social] es consustancial del aprendizaje” (Radford, 2006, p. 114); es decir, el aprendizaje es imposible de concebir si no existe la presencia de un individuo distinto de aquél que desea aprender. De manera específica, la relación sujeto-objeto no es entendida de forma lineal; sino que está mediada por la presencia de otro sujeto (Miranda, Radford & Guzmán, 2007). Sin embargo, la interacción social no es la única fuente que media esta relación; el uso de artefactos media, también, el aprendizaje:

> Una de las fuentes de adquisición del saber resulta de nuestro contacto con el mundo material, el mundo de artefactos culturales de nuestro entorno… y en el que se encuentra depositada la sabiduría histórica de la actividad cognitiva de las generaciones pasadas. (Radford, 2006, p. 113)

Es por ello que tanto el uso de artefactos como la interacción social deben ser tratados como fuentes inseparables de producción de significados (Miranda, Radford & Guzmán, 2007). En otras palabras, con la finalidad de alcanzar sus metas, los individuos necesitan usar artefactos y signos (escritos, verbales o gestuales) de forma deliberada que les permitan organizar sus acciones en un tiempo y un espacio determinados. Todo lo utilizado por individuos que se encuentren en un proceso de objetivación es en una producción de significado, para lograr "una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones para adquirir las metas de sus acciones" (Radford, 2003, p. 41), es lo que se llama en la teoría medios semióticos de objetivación.

La característica social y cultural de los medios semióticos de objetivación radica en el hecho de que contienen patrones históricos de actividad cognitiva. La utilización de reglas para medir es un ejemplo de objeto cultural que lleva en sí misma actividades históricas de medición (Radford, 2002, 2003). Ésta, la regla de medir, incluye abstracciones culturales como la "unidad de medida", la estructura aditiva-multiplicativa que permite referir una longitud al número de veces que la unidad "cabe" en la longitud que se mide, etc. Así, el acceso a los objetos matemáticos se da por medio de diversos medios semióticos de objetivación que los estudiantes utilizan en una actividad determinada y a través de los cuales ocurre la dotación de significados. Esta última es una confluencia de significados históricos incrustados en los medios de significación y significados situacionales con los que el alumno contribuye desde su propia perspectiva. Es esa la naturaleza societal de la objetivación.

En síntesis, en la teoría de la objetivación, el aprendizaje de las matemáticas es un "proceso constante de objetivación" (Miranda, Radford y Guzmán, 2007). Aún más, la objetivación también hace que las formas de pensamiento matemático de los estudiantes se modifiquen; es decir, se objetiva no sólo el objeto matemático, sino también la forma de pensarlo.

En la siguiente sección, se describen los problemas que sirvieron para observar precisamente esas constantes modificaciones de los estudiantes en cuanto a la interpretación del origen de coordenadas, en una gráfica cartesiana d vs. t, como el lugar desde el cual el movimiento simultáneo de dos objetos tiene sentido.

Metodología

Esta investigación formó parte de un programa longitudinal de investigación de cuatro años. Los datos fueron recolectados durante cuatro clases ordinarias de matemáticas, en una escuela de habla francesa, en Ontario, Canadá. Los estudiantes (15 años) estaban familiarizados con el uso de calculadoras que grafican datos y las aplicaciones que éstas permiten con aparatos electrónicos, como el Calculator Based RangerTM (CBR_{TM}). Cada clase fue organizada en equipos de 3 estudiantes. Durante todas ellas, el profesor visitó cada uno de los equipos para motivar una confrontación de ideas entre los propios integrantes. Al inicio de la primera clase, el profesor repartió a los estudiantes cuatro problemas, los cuales consistían en interpretar gráficas de objetos que se movían linealmente. En la segunda clase, después de que los estudiantes terminaron de resolver los cuatro problemas previos, el profesor les entregó el problema Los detectives (descrito más adelante). La estructura de estos cinco problemas, estuvo motivada por las investigaciones de Radford, Demers, Guzmán & Cerulli (2003, 2004), quienes documentan las confusiones de los estudiantes cuando estos pretenden asociar el origen desde el cual se describe el movimiento con la coordenada (0,0) de una gráfica *d* vs. *t*. El contenido de los problemas estuvo en correspondencia con el programa de matemáticas que cursaban los estudiantes. Éste establece que ellos deben adquirir conocimientos sobre el significado de la pendiente de una recta (por ejemplo, en el contexto del movimiento de objetos), así como de la fórmula $v=d/t$.

Problema *Los Detectives*

El problema cuyas respuestas son analizadas en este trabajo se describe a continuación:

> Durante algunos días, los detectives Andrés y Tania siguieron a dos sospechosos, Pedro y Martha. Los detectives sabían que Martha proporcionaría información secreta a Pedro en un sobre. Un día, una neblina densa cayó sobre el pueblo. Los sospechosos tomaron ventaja de este hecho para llevar a cabo la entrega del sobre. Ellos se encontraban separados a 7 metros de distancia. Los detectives, mientras tanto, decidieron no moverse para evitar ser vistos. Andrés se colocó a 3 metros de distancia detrás de Pedro y apuntó

un CBR en dirección de éste; Tania se situó a 2 metros detrás de Martha y apuntó un CBR en dirección de ésta. Pedro y Martha comenzaron a caminar al mismo tiempo en línea recta como se indica en la figura de abajo. En el momento en que los sospechosos comenzaron a moverse, nuestros detectives activaron sus CBR. Ellos querían saber el lugar exacto de la entrega del sobre.

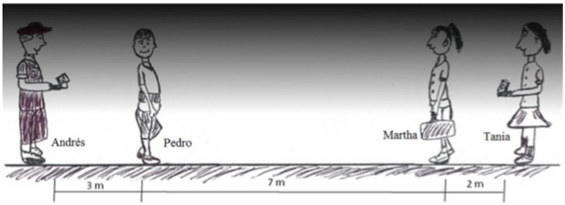
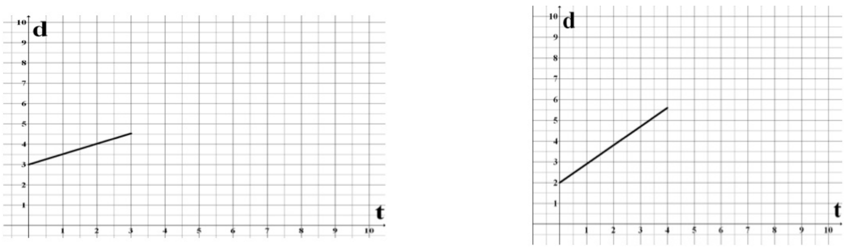


Figura 1. Dibujo correspondiente al problema.

A este problema se le añadieron 7 preguntas. En las primeras cuatro se les pedía a los estudiantes que escribieran las ecuaciones de movimiento de Martha y de Pedro, a partir de las gráficas producidas por los CBR de Tania y de Andrés, respectivamente (Figura 2).



t(s)	d Pedro (m)
0	3,0
3,0	4,53

t(s)	d Martha (m)
0	2,0
4,0	5,6

Figura 2. Izquierda: La gráfica y tabla del movimiento de Pedro, según Andrés. Derecha: La gráfica y tabla del movimiento de Martha, según Tania.

En la pregunta 5, a los estudiantes se les pedía decidir si la gráfica de la Figura 3 representaba o no el lugar donde Pedro le entregó el sobre a Martha. Esta pregunta fue elaborada con base en el supuesto de que los estudiantes tienden a asociar, en una gráfica d vs. t, la intersección de dos rectas con el encuentro de dos objetos. Una vez que los estudiantes tomaran esta decisión, ellos tenían que identificar el punto de intersección en el Dibujo (pregunta 6).

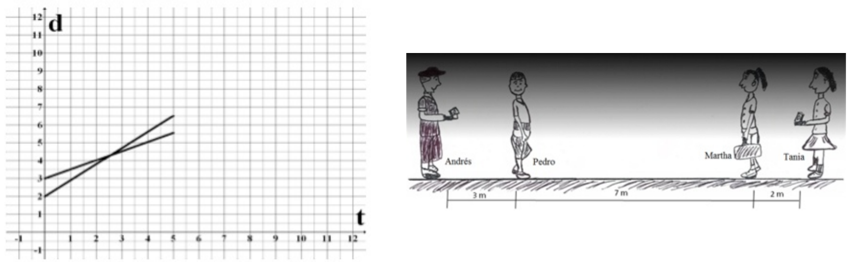


Figura 3. Izquierda: La Gráfica que los estudiantes debían analizar para decidir si en ésta se puede encontrar información sobre el momento en el que Pedro entrega el sobre a Martha. Derecha: El Dibujo del problema Los Detectives.

Una vez que los estudiantes se enfrentaran a una aparente contradicción[3], en la pregunta 7 se les pidió que propusieran una gráfica que describiera, de manera más adecuada que la mostrada en la pregunta 5, el movimiento de Martha y de Pedro. Para responder esta pregunta, los estudiantes debieron realizar un proceso de abstracción, caracterizado por la colocación de un solo origen fenomenológico dentro del Dibujo, de tal forma que tuviera relación con el origen de coordenadas de la gráfica propuesta. En otras palabras, los estudiantes deberían modificar los orígenes fenomenológicos (los dos CBR o, lo que es lo mismo, Andrés y Tania, los detectives) de manera distinta de que aparece en el Dibujo con el fin de obtener, en una misma gráfica, información que dé cuenta del momento exacto en el que Pedro entregó el sobre a Martha.

El análisis de los datos corresponde a las respuestas de las preguntas 5, 6 y 7 de un equipo de estudiantes (Clara, Pablo y Beatriz) filmados durante la tercera clase. El análisis se dividió en dos partes: 1) Antes de la intervención del profesor y 2) Después de la intervención de éste. Esto nos permitió detallar los momentos en los que se objetiva la forma de pensar el punto (0,0).

Notemos, antes de pasar al análisis de datos, que el diseño de las preguntas y la organización de la interacción de los alumnos constituye un elemento fundamental en la teoría de la objetivación. Diseño de preguntas y organización interaccional son las bases de la actividad a través de la cual la forma cartesiana de pensar las gráficas va desvelarse a la conciencia de los alumnos. Esta forma de pensar no puede, en efecto, manifestarse si no se actualiza a través de la actividad.

Análisis de los Datos

Parte 1: Antes de la Intervención del Profesor

Justo después de leer la pregunta 5, Clara, Pablo y Beatriz discutieron brevemente entre ellos. Todos estuvieron de acuerdo en escribir la siguiente respuesta: "el momento en que Pedro entregó el sobre es 2.3 segundos y el lugar es 4 metros." Tal y como lo supusimos durante el análisis epistemológico a priori, los estudiantes interpretaron al punto de intersección como el lugar donde Pedro se encontraría con Martha. Ellos no distinguieron la diferencia entre el origen matemático y el papel de cada uno de los orígenes fenomenológicos (los detectives).

Sin embargo, esta falta de distinción fue momentánea. Cuando los estudiantes respondieron la pregunta 6, ellos dudaron en identificar (en el Dibujo) el lugar donde los sospechosos se encontrarían. Contrario a lo que respondieron en la pregunta 5, en la pregunta 6 los estudiantes discutieron si los sospechosos o los detectives tendrían que ser considerados como los puntos de referencia a partir de los cuales los cuatro metros deberían medirse. La discusión comienza cuando Pablo coloca a Pedro un metro delante de la posición inicial del propio Pedro (L1).

Episodio 1

L1. Pablo: Es sólo un metro desde aquí [usa un bolígrafo para marcar un punto en el Dibujo; Figura 3, derecha]

L2. Clara: ¿Pero es 4 metros desde aquí o desde acá? … Es decir, 4 metros desde aquí [desliza sus dedos comenzando desde el dibujo de Pedro] … Porque comienza desde 2 y 3 [señala las ordenadas de las dos rectas de la gráfica de la Figura 2] y es 4 [metros] así que sería como … 4 metros desde acá [con sus dedos señala los dibujos de Pedro y Martha; ver Figura 3, derecha]

L3. Beatriz: ¡Sí! ¿Tienes una regla? [Pregunta a Clara]

Con su comentario y su gesto, Pablo implícitamente consideró a Andrés como el punto de referencia del movimiento de Pedro. Se puede inferir que Pablo sustrajo 3 metros (la distancia entre Andrés y Pedro mostrada en el Dibujo) de la distancia de 4 metros, propuesta por la respuesta del equipo, en la pregunta 5. Él no tuvo que mencionar esta operación matemática. Sin embargo, Pablo parece no haberse sentido cómodo con la posición final de Pedro: “es sólo un metro desde aquí” expresa una preocupación de Pablo sobre el lugar en que Pedro estará después de caminar un metro. En otras palabras, Pablo reconoció visualmente que su gesto deíctico puso a Pedro muy lejos (“sólo un metro”) de Martha como para que él (Pedro) tuviera que caminar más de 4 metros para encontrarse con Martha. Aun cuando la respuesta de Pablo era la correcta, ésta no convenció a sus compañeras de equipo. El gran espacio entre Pedro y Martha, resultado del gesto deíctico de Pablo, hizo que Clara tratara de encontrar otro punto de referencia a partir del cual los 4 metros debieran ser medidos (L2).

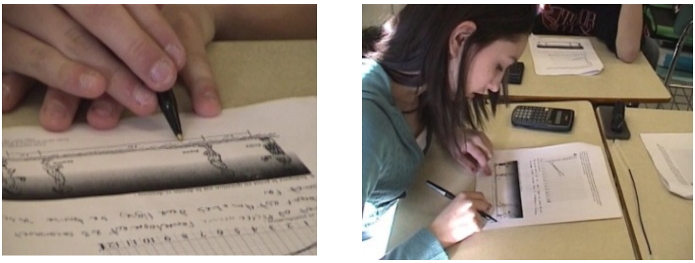


Figura 4. Izquierda: El gesto de Pablo indica que Pedro caminará un metro. Derecha: El gesto de Clara señala los dibujos de Pedro y de Martha.

Las acciones semióticas de Clara (L2) colocaron a Pedro más cerca de Martha que las de Pablo (L1). Cuando Clara deslizó su dedo, ella no sólo simuló la caminata de Pedro, sino también la volvió visible. Esta visibilidad perceptual que adquiere la distancia es un elemento importante del proceso de objetivación en curso. De acuerdo con la teoría de la objetivación, conforme el dedo se aproxima a Martha, Clara siente cómo Pedro se aproxima a Martha. Al hacer este gesto, Clara sugirió al punto inicial de Pedro como el origen del movimiento del propio Pedro.

Nótese que Clara no consideró el origen matemático, ni en su discurso ni en sus gestos, para significar los números 2 y 3 (ordenadas al origen de las rectas de la gráfica de la Figura 2). Teniendo esto en mente, Clara estableció una conexión entre estos dos números y las posiciones iniciales de Pedro y de Martha (Figura 3, derecha). El rol que tienen los detectives en relación con el movimiento de los sospechosos es ignorado en los medios semióticos de objetivación de Clara. Al final de este episodio, Beatriz le pidió a Clara la regla para medir la distancia entre Martha y Pedro (L3). Ella colocó la marca de 0 cm de la regla en el Dibujo de Pedro y vio dónde estaba la marca de 7 cm de la regla. Lo que Beatriz hizo fue verificar si el segmento de 7 cm mostrado en el Dibujo medía exactamente 7 cm. Puesto que el Dibujo no fue hecho a escala, Beatriz se dio cuenta de que esta coincidencia no ocurría. Aun así, Beatriz intentó encontrar, en el Dibujo, los 4 metros (sugeridos en la respuesta de la pregunta 5) por medio de la medición de 4 centímetros. Esta medición fue caracterizada por cuatro acciones de Beatriz: 1) ella movió su dedo índice desde el dibujo de Pedro hasta la marca de 4 cm de la regla (Figura 4, arriba-izquierda); 2) con un gesto similar, Beatriz movió 4 cm el mismo dedo partiendo desde el dibujo de Martha (Figura 5, arriba-derecha); 3) ella tomó su bolígrafo y puso un punto en su hoja de trabajo justo en la marca de 4 cm de la regla, medidos a partir del dibujo de Pedro (Figura 5, abajo-izquierda); 4) Beatriz colocó la marca de 4 cm de la regla en el dibujo de Martha y puso un punto en su hoja de trabajo justo en la marca de 0 cm de la regla (Figura 5, abajo-derecha).

Desde un punto de vista semiótico, con las dos primeras acciones, Beatriz le da sentido a la respuesta de la pregunta 5. El movimiento de sus dedos significan los movimientos de los sospechosos; con la tercera y cuarta acciones, Beatriz sintetizó sus dos gestos previos, pues los puntos objetivaron los movimientos de su dedo y, por tanto, los de los sospechosos. Aún más, al poner los puntos de las posiciones finales tanto de Martha como de Pedro, Beatriz obligó a los sospechosos a moverse. Puede decirse que el dinamismo de la característica inmóvil del Dibujo fue sustituida por el acto de medir, de mover los dedos y de poner puntos en la hoja de trabajo.

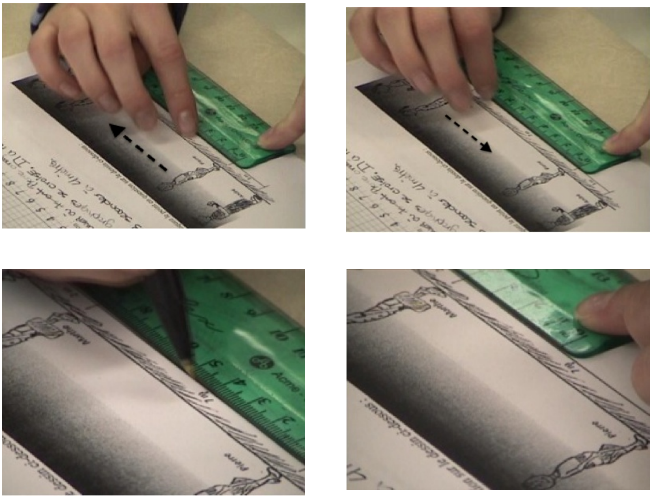


Figura 5. Arriba-izquierda: Beatriz mueve su dedo índice 4 centímetros desde el dibujo de Pedro, en el sentido de la flecha. Arriba-derecha: Beatriz mueve su dedo índice 4 centímetros desde el dibujo de Martha, en el sentido de la flecha. Abajo-izquierda: Beatriz pone un punto a 4 centímetros medidos a partir del dibujo de Pedro. Abajo-derecha: Beatriz pone un punto a 4 centímetros medidos a partir del dibujo de Martha.

Ahora bien, la manera como Beatriz usó la regla parece haber sido inducida por los dos gestos deícticos previos de Clara (Figura 4). Tanto Beatriz como Clara no consideraron las posiciones de Andrés ni de Tania como los orígenes fenomenológicos. Por medio de los gestos y las graduaciones de la regla, Clara y Beatriz objetivaron los lugares a partir de los cuales los movimientos de Martha y Pedro podían ser descritos. La regla, en este caso, es un medio semiótico de objetivación (Radford, 2003).

Después de dudar por algunos minutos, Beatriz motivó a Clara a fijar su postura sobre la idea de mover a cada sospechoso 4 metros a partir de sus posiciones iniciales.

Episodio 2

L4. Beatriz: Bueno, puede ser que Pedro caminó 4 metros a partir de aquí [usa su bolígrafo para señalar el dibujo de Pedro] y ella [Martha] caminó 4 metros a partir de aquí [usa su bolígrafo para señalar el dibujo de Martha]

L5. Clara: Los dos sospechosos están a 4 metros al mismo tiempo [ella señala el punto de intersección de las dos rectas]

L6. Beatriz: [Señalando el Dibujo de la hoja de Clara con su bolígrafo] ¡Sí, sí! Lo sé. No importa dónde él [Andrés] está [ella mueve su bolígrafo de izquierda a derecha rápidamente sobre el dibujo de Andrés, en la hoja de trabajo de Clara]. Él [Pedro] caminó 4 metros [mientras mueve su bolígrafo desde Pedro hasta Martha, Clara cubre los dibujos de Andrés y de Tania con la palma de sus manos].

Debido a la insistencia de Beatriz de mover a cada sospechoso 4 centímetros, a partir de sus posiciones iniciales, en este momento de la conversación, la intención de Pablo de colocar a Pedro sólo un metro delante de la posición inicial del propio Pedro (L1) se diluyó en el tiempo. El comentario de Beatriz fue motivado por la consideración de que la ordenada del punto de intersección de las dos rectas debía significar "Martha entrega el sobre a Pedro".

Para reforzar su punto de vista, Beatriz le dijo a Clara que la posición inicial de Andrés es irrelevante para describir el movimiento de Pedro (L6). De manera similar, y aun cuando Beatriz no se refirió ni a Tania ni a Martha en su intervención, ella implícitamente aseguró que el rol de la primera no es importante para describir el movimiento de la segunda. El propósito de Beatriz fue persuadir a Clara a centrar su atención en los sospechosos y no en los detectives. Hasta cierto punto, ella logró su cometido, pues los gestos de Clara simularon lo que Beatriz proponía. De hecho, al colocar las palmas de sus manos en los dibujos de Pedro y de Martha (L6), Clara parece atender la idea de Beatriz. Con esta acción semiótica, Clara no sólo ocultó a los sospechosos, sino también mantuvo el punto (0,0) lejos de la discusión. Vemos, pues, que el punto (0,0) no aparece todavía dotado de su significado cartesiano. Después de discutir cerca de 5 minutos, el consenso general del grupo de Clara fue poner, en el Dibujo, un punto justo a la mitad de la distancia entre las posiciones iniciales de Pedro y de Martha (Figura 6). Este punto significó el lugar donde Martha entregaría el sobre a Pedro. En este momento de la conversación, el análisis previo de Beatriz, hecho inmediatamente después de que ella pidió a Clara una regla de medir (L3), fue sustituido por un análisis que realmente le diera significado (aunque de manera incorrecta) al punto de intersección de las dos rectas. Si la separación entre los puntos hechos por Beatriz (flechas en la Figura 6) no le daba sentido al encuentro de los sospechosos, un único punto colocado en medio de Pedro y de Martha sí lo daría.

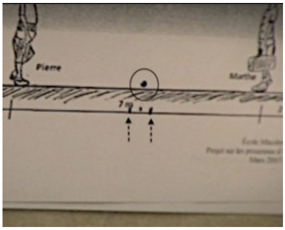


Figura 6. El óvalo encierra el punto hecho por Beatriz, el cual indica el lugar donde Pedro y Martha se encontraron uno con el otro, según Clara, Beatriz y Pablo. Las flechas apuntan a las marcas dejadas por Beatriz en el análisis que ella hizo después de pedir a Clara una regla de medir (L3).

Parte 2: La Intervención del Profesor

Episodio 3

Aun cuando los estudiantes respondieron la pregunta 6 (localización del punto de encuentro de Pedro y Martha en el Dibujo) sin dificultades, ellos dudaron al proponer una gráfica cartesiana distinta (pregunta 7) de la mostrada en la pregunta 5. Así, ellos le pidieron al profesor su ayuda. Antes de dar alguna respuesta, el profesor decidió revisar las soluciones previas de los estudiantes. Cuando él vio el punto hecho por Beatriz (Figura 6) y leyó lo que los estudiantes escribieron en la pregunta 5, él invitó al grupo de Clara a pensar sobre sus respuestas. En el siguiente episodio se muestra cómo el profesor llevó a cabo tal persuasión.

> L7. Profesor: … [Lee la respuesta de la pregunta 5] “El tiempo en el que Pedro recibió el sobre es 2.3 segundos y el lugar es de 4 metros [con la intención de llevar a los integrantes de este equipo a una reflexión más profunda sobre el significado de estos valores, dice] ¿De qué? ¿De quién? ¿Por qué escribieron sólo 4 metros? ¿Hay 4 metros entre las dos personas? ¿Dónde están los 4 metros? [revisa las preguntas 5 y 6] … ¿Dónde es que los dos se encuentran? ¿Dónde se cruzan las dos rectas?
>
> L8. Beatriz: ¡Mmmh!

L9. Profesor: ¿Qué quiere decir eso [los cuatro metros] en la gráfica [señala el Dibujo]?
L10. Pablo: 4 metros… No lo sé.
L11. Profesor: Fíjense sólo en una recta a la vez. Cuando esta línea de aquí está a 4 metros [señala la recta cuya ordenada al origen es 2 metros] ¿Quién está…? Esta es Martha. Martha es la recta de abajo [se refiere a la recta cuya ordenada al origen es 2. Escribe la letra M sobre la gráfica, en la hoja de trabajo de Clara; véase Figura 6, izquierda]. ¿Están de acuerdo? Esta es Martha [señala la recta cuya ordenada al origen es 2] y este es Pedro [se refiere a la recta cuya ordenada al origen es 3. Escribe la letra P sobre La Gráfica, en la hoja de trabajo de Clara; véase Figura 6, derecha]
L12. Clara: Sí.
L13. Profesor: Cuando Martha está a 4 metros [señala con su bolígrafo el punto de intersección de las rectas de la gráfica], ¿dónde está Martha? Ahí [sobre el Dibujo] dibuja una recta que indique dónde Martha va a estar [desplaza su bolígrafo sobre el Dibujo]. Cuando está a 4, ¿pueden colocar a Martha en 4 metros? [desplaza su bolígrafo sobre el Dibujo].
L14. Clara: Adelante [señala el punto medio de la distancia entre Pedro y Martha, como el de la Figura 8].
L15. Profesor: ¿Se detiene ahí? [se refiere al punto medio que señaló Clara] ¿La colocas ahí? [señala el punto medio de la distancia entre Pedro y Martha, como el de la Figura 8].
L16. Clara: Sí
L17. Profesor: ¿Dónde están los 4 metros? Traza una línea horizontal que represente los 4 metros. Por ejemplo aquí decimos que estos son 2 metros [Coloca sus dedos índice y pulgar en forma de C y los coloca sobre los dibujos de Martha y Tania], estos son 7 metros [Coloca sus dedos índice y pulgar en forma de C y los coloca sobre los dibujos de Martha y Pedro; véase Figura 6, derecha]. ¿Dónde están los 4 metros?

La pregunta con la cual el profesor enfatizó la importancia de referir los 4 metros a un origen fue "¿dónde están los 4 metros?" (L7 y L17). El esfuerzo de él para que los estudiantes centraran la atención en esta referencia consistió en pedirles que identificaran, en el Dibujo, cada uno de los movimientos descritos en la Gráfica. Para ello, el profesor identificó las rectas de la pregunta 5 con las letras M y P para hacer visibles las correspondencias entre el modo de describir los movimientos de los sospechosos en la Gráfica y los inferidos en el Dibujo (L11 y Figura 7, izquierda). Es claro que las letras no son ni Martha ni Pedro; sin embargo, esta acción le permitió al profesor hacer visible la correspondencia biunívoca entre el movimiento de cada sospechoso con las rectas obtenidas por cada uno de los detectives.

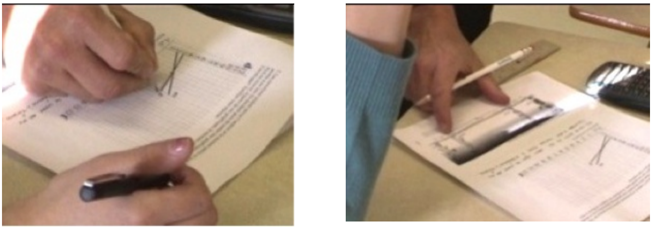


Figura 7. Izquierda: El profesor identifica las rectas en la grafica con las letras M y P. Derecha: Con esta separación de sus dedos, el profesor ejemplifica cómo los estudiantes deben mostrar los cuatro metros sobre El Dibujo.

Después de marcar las rectas, el profesor pidió a los estudiantes que identificaran en el Dibujo la coordenada espacial (4 metros) del punto de intersección de las dos rectas. Para ejemplificar cómo los estudiantes podían llevar a cabo esta identificación, el profesor separó sus dedos pulgar e índice a distancias semejantes a las de los segmentos trazados entre las ilustraciones de los detectives y las de los sospechosos (Figura 7, derecha). Con estos gestos, el profesor indujo a los estudiantes a trasladar los 4 metros del eje vertical del plano cartesiano a las distancias fenomenológicas (horizontales) ubicadas en el Dibujo. Es indudable que este traslado fue hecho previamente por los estudiantes; sin embargo, los gestos del profesor hicieron que la identificación de la coordenada espacial del punto de intersección fuera objetivada como el espacio entre dos lugares fijos, simbolizados por medio de los dedos del profesor.

Haber pedido la identificación de los 4 metros en el espacio fenomenológico (el Dibujo) es haber pedido, también, que los estudiantes animaran los dibujos de Martha y Pedro. Esto se puede observar con mayor claridad en L13, cuando el profesor pidió a los estudiantes que señalaran dónde tendría que estar Martha si ella camina

4 metros. Como en el Dibujo se muestran las posiciones iniciales de ambos sospechosos, pedir dónde estará Martha cuando ella haya recorrido cuatro metros es pedir a los estudiantes que la muevan. Sin embargo, este movimiento no debe ser arbitrario, pues los 4 metros deben ser medidos desde un lugar fijo. La separación de los dedos en forma de C (L17) del profesor hace énfasis, precisamente, en que la descripción del movimiento de un objeto tiene sentido sólo cuando dicho movimiento es referido a un origen. El énfasis de este gesto está también implícito en la pregunta "¿por qué escribieron sólo 4 metros? (L7).

Es obvio que el gesto de los estudiantes no mueve a Martha; sin embargo, éste les permite imaginar el lugar donde ella va a estar después de haber recorrido 4 metros. Desde el punto de vista de la teoría de la objetivación, la imaginación provocada por la separación de los dedos del profesor forma parte del proceso de toma de conciencia del origen matemático[4].

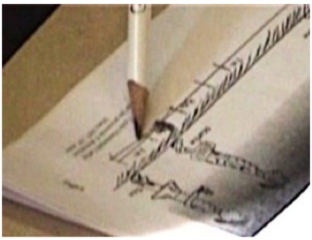
El intento del profesor por hacer reflexionar a los integrantes del equipo sobre el origen fenomenológico que describe el movimiento de los sospechosos fue recompensado cuando Clara preguntó cuál sería el lugar donde Martha iniciaría su caminata. En el siguiente extracto se expone esta pregunta, así como la forma en que el profesor la respondió.

Episodio 4

> L18. Clara: ¿Es que ella [Martha] comienza de ahí [señala el dibujo de Tania] o de ahí [señala el dibujo de Martha]?
>
> L19. Profesor: Esa es una excelente pregunta. Ella [Martha] ¿comienza de ahí [señala el dibujo de Tania] o de ahí [señala el dibujo de Martha]?… Pablo, ¿dónde comienza ella? ¿Ella comienza desde Martha o desde Tania?
>
> L20. Pablo: Desde Tania.
>
> L21. Clara: Desde Tania.
>
> L22. Profesor: ¿Desde Tania? ¿Por qué comenzará desde Tania y no desde Martha; o de Martha y no desde Tania [véase Figura 7]?

Las referencias a un origen son claramente más explícitas en esta parte del discurso que en el inicio de la intervención del profesor. La pregunta de Clara "¿es que ella [Martha] comienza de ahí [señala el dibujo de Tania] o de ahí [señala el dibujo de Martha]? (L18) rememoró las preguntas del profesor: “¿de qué?, ¿de quién?” (L7). La pregunta de Clara muestra que ella, en ese momento, fue consciente de la necesidad de referir la distancia de 4 metros a un punto fijo.

Mediante gestos deícticos (Figura 8), el profesor especificó los lugares físicos que él menciona en su pregunta (L19): “ella [Martha] ¿comienza de ahí [señala el dibujo de Tania] o de ahí [señala el dibujo de Martha]? Por primera ocasión en el discurso se mencionó el nombre de Tania; haberla involucrado en la conversación significó especificar el origen fenomenológico desde el cual el movimiento de Martha es descrito. Además, con esta pregunta, el profesor permitió que los estudiantes pudieran distinguir los distintos papeles que juegan Tania y Martha, tanto en el origen del movimiento de ésta como en la medición de los cuatro metros. De esta forma, con la pregunta y las indicaciones de su lápiz, el profesor persuadió a los estudiantes a elegir uno y sólo un dibujo como representante del origen fenomenológico del movimiento de Martha: el correspondiente al de Martha o al de Tania.



¿Ella comienza desde Martha…

o desde Tania?”

Figura 8. Palabras y gestos del profesor que persuaden a los estudiantes a analizar el origen desde el cual se miden los 4 metros.

Al ver que los estudiantes aún no lograban diferenciar el rol distinto que tiene Tania del que tiene Martha, el profesor elaboró otra pregunta. En el siguiente extracto se observa cómo Beatriz, al responder esta nueva pregunta del profesor, logró relacionar a Tania con el origen de coordenadas.

Es importante tener en mente la importancia de la actividad profesor-alumnos en todo este proceso de objetivación. El proceso de objetivación se da en el interior de la actividad a través de la cual la forma matemática de pensar cartesianamente las gráficas se está desvelando a los alumnos. Esta actividad mediatiza el saber matemático en cuestión y la manera en que éste aparece (o se actualiza) en la actividad concreta. El próximo episodio revela detalles adicionales de la dinámica de la actividad y la toma de conciencia del contenido conceptual por los estudiantes.

Episodio 5

L23. Profesor: ¿Ella [Martha] camina 4 metros?
L24. Clara y Beatriz: Sí
L25. Profesor: Pero ella [Martha] ¿dónde comienza?
L26. Beatriz: ¡Mmmh!… Dos metros delante de Tania
L27. Profesor: Así es, ella no camina 4 metros.
L28.Pablo: Son 2 metros.
L29.Profesor: Ella caminó 2 metros.
L30.Beatriz: ¡Ah!, porque la Gráfica va …
L31. Profesor: El lector [CBR] lee la distancia entre los dos, entre Tania y Martha.

A diferencia de las preguntas hechas por el profesor en L19 y L22, en las que intentó centrar la atención en el origen del movimiento de Martha, la pregunta que él mismo hizo en L23 estuvo referida al movimiento de Martha.

Una vez que Clara y Beatriz respondieron afirmativamente esta pregunta (L24), el profesor nuevamente pidió reflexionar a los estudiantes sobre la naturaleza del punto de partida de Martha (L25). Beatriz relacionó este punto con la posición de Tania y se dio cuenta de que Martha está colocada a 2 metros delante de dicha posición (L26). Con esta respuesta, ella diferenció el punto (inicial) de Martha del punto (fijo) de Tania. Esta distinción fue acentuada por el profesor, inmediatamente después de la respuesta de Beatriz (L27). Al haber dicho que Martha "no camina 4 metros", el profesor enfatizó la diferencia entre el espacio recorrido por Martha y el que existe entre ella y Tania. Por un lado, la afirmación del profesor imposibilitó, de forma explícita, que Martha haya caminado 4 metros; por otro, posibilitó, de forma implícita, que Pablo estableciera una relación aritmética entre la distancia caminada por Martha y la medida por Tania (L28). La confirmación de esta relación implícita es la respuesta del profesor (L29), hecha inmediatamente después de la respuesta de Pablo.

Analizados en su conjunto, los comentarios “dos metros delante de Tania” (L26), “ella no camina 4 metros” (véase L27) y “ella caminó 2 metros” (véase L29), no sólo permitieron que Beatriz dirigiera su atención a la Gráfica (L30), sino también puso en evidencia la fusión de Tania con el CBR (L31). Sus intervenciones son ejemplos de aspectos que los estudiantes deben tomar en cuenta con el fin de objetivar la relación entre el origen matemático y el fenomenológico. En este sentido, en el momento de la conversación entre el profesor y el equipo, Beatriz logró tomar conciencia de la correspondencia que debe haber entre los orígenes mostrados en el Dibujo (las ubicaciones de los detectives) y el origen de coordenadas.

La toma de conciencia de Beatriz fue aún más evidente cuando ella ayudó a Clara a responder una pregunta que el profesor hizo momentos después de L31. Él le pidió a Clara que le dijera cuál era el punto de referencia del movimiento de Martha; Clara, aún confundida, insistió en señalar el punto de inicio de Martha como el lugar fenomenológico desde el cual se miden los 4 metros recorridos por esta sospechosa. Beatriz la interrumpió con un comentario que identificó a Tania con el CBR. Pero esta identificación no sólo fue verbal, sino también escrita: Beatriz encerró en un círculo el CBR dibujado en las manos de Tania (Figura 9, izquierda). La marca de Beatriz reafirmó aún más el vínculo de Tania con el CBR y permitió identificar con precisión porqué Tania debe considerarse como el origen fenomenológico.

Nueve segundos después del comentario de Beatriz, el profesor realizó el mismo gesto que ella. Este gesto fue acompañado con señalizaciones sobre los dibujos de Martha y Tania con el fin de convencer a Clara que Martha no podía caminar 4 metros si esa distancia era medida desde el lugar de Tania (Figura 9, derecha). Tanto las acciones de Beatriz como las del profesor contribuyeron a que Clara tomara conciencia de que Tania y el CBR, en el contexto del problema, desempeñan el mismo papel en la descripción del movimiento de Martha.

En este momento de la discusión, los estudiantes del equipo pudieron considerar a Tania y al CBR como un mismo objeto: el origen fenomenológico.

Una vez que Beatriz, Clara y Pablo comprendieron que la descripción del movimiento de Martha tenía que hacerse desde el lugar ocupado por Tania, el profesor pidió a Clara que identificara los cuatro metros de su

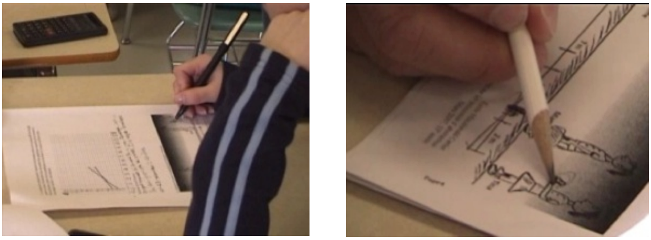


Figura 9. Izquierda: Beatriz corrige a Clara: “No, tu punto de partida está aquí [señala a Tania] porque el CBR está aquí [encierra el CBR de Tania]”. Derecha: El profesor reafirma lo dicho por Beatriz: “Bien, observa [se dirige a Clara] que se mide de allá [señala a Tania], cuando ella [Martha] está a 4 metros, ¿crees que siempre son 4 metros? [Encierra el CBR de Tania]”.

respuesta en el Dibujo. En esta ocasión, a diferencia de lo que hizo antes de la intervención del profesor, en la que el equipo identificó este punto en medio de la separación entre Martha y Pedro (Figura 6), Clara marcó los 4 metros cerca del dibujo de Martha. El profesor confirmó la respuesta de Clara al trazar dos líneas verticales con el fin de enfatizar que los 4 metros son entre Tania y Martha (las marcas del profesor están encerradas por el óvalo, en la Figura 10).

Después de estas marcas, el profesor dirigió la atención de Clara al caso del otro detective. Él le preguntó a ella respecto de quién deben medirse los 4 metros avanzados por Pedro y le pidió identificarlos en el Dibujo. En comparación con el tiempo empleado en identificar el lugar donde llegó Martha, en esta ocasión Clara identificó más rápido el lugar donde llegó Pedro cuando éste avanzó 4 metros respecto de Andrés (la marca de Clara está encerrada por el rectángulo de la Figura 10). Esta reducción en el tiempo de respuesta de Clara significa que, en ese momento, Clara pudo diferenciar entre dos tipos de distancias: una que refiere al espacio recorrido por Pedro y otra que refiere al espacio entre él y un punto fijo. Así, Clara tuvo conciencia de que las caminatas de Pedro y Martha son movimientos descritos desde dos lugares fijos, diferentes uno del otro.

Las marcas que Clara hizo en el Dibujo le permitieron hacer presente ante su conciencia los lugares fenomenológicos donde llegaron los sospechosos en su caminata de 2.3 segundos, según su primera

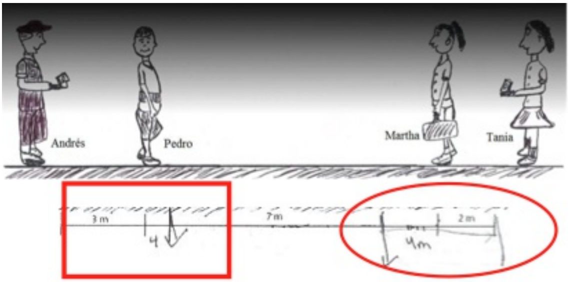


Figura 10. El rectángulo y el óvalo encierran marcas hechas por Clara y el profesor, respectivamente. Éstas indican el lugar donde Martha y Pedro tendrían que encontrarse después de caminar durante 2.3 segundos.

respuesta. Esta visualización era necesaria para que Clara, junto con sus compañeros de equipo, se dieran cuenta de la contradicción ocasionada al interpretar, en la Gráfica, el movimiento simultáneo de los sospechosos. Es precisamente esta contradicción a la que el profesor quiso llegar desde el momento en que intervino en la discusión con el equipo.

Habiéndose asegurado de que las marcas en el Dibujo evidencian la imposibilidad de que Martha y Pedro se encuentren en un tiempo de 2.3 segundos, el profesor se alejó del equipo para atender dudas de otros estudiantes. Sin embargo, la ayuda que él proporcionó a Clara, Pablo y Beatriz propició que estos estuvieran en condiciones diferentes para responder la pregunta 7 de aquellas en la que se encontraban antes de la intervención del profesor. Al final del episodio 5, los estudiantes comprendieron que la intersección de las dos rectas de la gráfica propuesta en la pregunta 5 no era la adecuada para dar cuenta de lo que sucedía con los sospechosos. La propuesta de la nueva gráfica, necesariamente, debía considerar el rol de los sospechosos y su relación con el origen de coordenadas.

Síntesis y Comentarios Finales

En este artículo hemos descrito la evolución de las formas de interpretar el origen de coordenadas, elaboradas por estudiantes de grado 10, de una gráfica cartesiana que contiene información sobre el movimiento simultáneo de dos objetos. En el análisis se muestra que interpretar el origen como un punto desde el cual se puede, por un lado, describir el movimiento simultáneo de los sospechosos y, por otro, informar sobre el lugar y el momento en el que estos se encuentran, no se produce de manera simultánea, sino de forma progresiva. Tal evolución estuvo caracterizada por distintos niveles de toma de conciencia identificados por los medios semióticos puestos en juego por los estudiantes. En efecto, durante los episodios 1 y 2, antes de la intervención del profesor, la forma como los estudiantes objetivaron el encuentro de los sospechosos estuvo caracterizada por gestos y palabras que ignoraron el papel de los detectives en la descripción del movimiento de Martha y de Pedro. Posteriormente, durante los episodios 3, 4 y 5, después de la intervención del profesor, los medios semióticos de los estudiantes involucraron en su análisis del problema a los detectives. Es indudable que la presencia del profesor contribuyó al cambio que tuvieron los estudiantes respecto de la forma de pensar el origen.

Con sus intervenciones, el profesor facilitó el surgimiento de la toma de conciencia de los estudiantes. Con acciones e interacciones cada vez más finas, el profesor y los alumnos crearon las condiciones necesarias para toparse con la forma cartesiana de pensar las gráficas. Ese saber no aparece o se desvela automáticamente a los alumnos. Para "verlo", para tomar conciencia del mismo, se requiere de una actividad que lo mediatice. Esta actividad obedece a un diseño de preguntas de complejidad conceptual cada vez más grande y de formas de interacción que, a través del uso de artefactos variados, permiten que la forma de saber en cuestión (el saber "en si-mismo") se convierta en objeto de conciencia (saber "para-la-conciencia"). Esta transformación del saber en si-mismo en saber para la conciencia requiere una objetivación. En este caso, para describir el movimiento de los sospechosos con el uso de una gráfica cartesiana, fue necesario elegir únicamente un detective y asociarlo con el origen de la gráfica. La arbitrariedad de esta elección puede ser un punto de partida para sugerir a los profesores que, al ser la fórmula de distancia de un movimiento lineal uniforme un caso particular de la función $f(x)=mx+b$, enfaticen que el valor de la ordenada al origen es un valor dependiente de la colocación del origen de coordenadas. Esto motivaría a una reflexión exhaustiva sobre la importancia de comprender que los signos utilizados en matemáticas son dependientes del contexto en el que se utilicen.

References

Clagett, M. (1959). *The science of mechanics in the middle ages*. Wisconsin, EE.UU.: The University of Wisconsin Press.

Lefebvre, H. (1981). *Lógica formal, lógica dialéctica*. (Traducido por Ma. Esther Benitez Eiroa). México, D.F.: Siglo XXI. (Trabajo original publicado en 1969).

Leontiev, A. (1993). *Actividad, conciencia y personalidad*. México: Cartago.

Miranda, I., Radford, L. & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática, 19*(3), 5-30.

Nemirovsky, R. (1994). On ways of symbolizing: The case of Laura and the velocity sign. *Journal of Mathematical Behavior, 13*, 389-422.

Nemirovsky, R. & Ferrara, F. (2009). Mathematical imagination and embodied cognition. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 159-174.

Nemirovsky, R., Tierney, C. & Wright, T. (1998). Body motion and graphing. *Cognition and Instruction, 16*(2) , 119-172.

Perraudeau, M. (1999). *Piaget hoy. Respuesta a una controversia*. México, D.F.: Fondo de Cultura Económica

Radford, L. (2009a). "No! He starts walking backwards!: interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM, 41*(4), 467-480.

Radford, L. (2009b). Signifying Relative Motion: Time, Space and the Semiotics of Cartesian Graphs. In W.-M. Roth (Ed.), *Mathematical Representations at the Interface of the Body and Culture* (pp. 45-69). Charlotte, NC: Information Age Publishers.

Radford, L. (2009c). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 11-126.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Número Especial*, pp. 103-129.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: a semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics, 22*(2), 14-23.

Radford, L, Demers, S. & Miranda, I. (2009). *Processus d'abstraction en mathématiques.* Ontario, Canada: Université Laurentienne.

Radford, L., Demers, S., Guzmán, J. & Cerulli, M. (2003). Calculators, graphs, gestures and the production of meaning. En N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.)., *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 135-138). University of Hawaii: PME27-PMENA 25.

Radford, L., Demers, S., Guzmán, J. & Cerulli, M. (2004). The sensual and the conceptual: artefact-mediated kinesthetic actions and semiotic activity. En M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 73-80). Norway: Bergen University of College.

Sherin, B. (2000). How students invent representations of motion: A genetic account. *Journal of Mathematical Behavior , 19*(4), 399-441.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA, E.U.: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. & Luria, A. (1994). Tool and Symbol in Child Development. En R. Van der Veer & J. Valsiner (Eds.), *The Vygotsky Reader* (pp. 99-174). Oxford: Blackwell Publishers.

Isaias Miranda Viramontes es profesor titular en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, del Instituto Politécnico Nacional (Cicata-IPN, Unidad Legaria), México.

Luis Radford es profesor titular de la Universidad Laurentienne, Canadá, y profesor de *education* de Manchester University, UK, y ganador de la Medalla *Hans Freudenthal* concedida por el ICMI en 2011.

José Guzmán Hernández es investigador de tiempo completo, categoría: Investigador Cinvestav-3C, en el Departamento de Matemática Educativa, del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México.

Contact Address: La correspondencia sobre este artículo debe dirigirse a Isaias Miranda Viramontes, Calzada Legaria No. 694, Col. Irrigación, Del. Miguel Hidalgo, México D.F., C.P.: 11500, Tel. 57296000 Ext. 67771. Dirección de correo electrónico: imirandav@ipn.mx