

# **Una aproximación a la variación del óptimo de un problema lineal de variable entera bajo incertidumbre difusa en los recursos**

Pérez García, Fátima ([f\\_perez@uma.es](mailto:f_perez@uma.es))<sup>1</sup>

Gómez Núñez, Trinidad ([trinidad@uma.es](mailto:trinidad@uma.es))<sup>1</sup>

Caballero Fernández, Rafael ([r\\_caballero@uma.es](mailto:r_caballero@uma.es))<sup>1</sup>

Liern, Vicente ([vicente.liern@uv.es](mailto:vicente.liern@uv.es))<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas)  
Universidad de Málaga*

<sup>2</sup>*Departamento de Matemáticas para la Economía y la Empresa  
Universidad de Valencia*

## **RESUMEN**

Cuando se resuelve un modelo de programación lineal entera, la solución viene determinada, en primera instancia, por el conjunto de oportunidades del problema. Así, cualquier modificación de este conjunto puede conllevar un cambio en la solución obtenida, lo que da lugar a la necesidad de que todos los elementos que aparecen en las restricciones del problema estén bien definidos. Sin embargo, en aplicaciones reales, esta definición exacta es compleja. Debido a esto, en este trabajo realizamos un estudio acerca de la variación que sufre el óptimo de un problema de variable entera cuando los recursos cambian. Para ello, hacemos uso de las técnicas de análisis difuso que permiten la inclusión de la incertidumbre en dichos parámetros. Así, ofrecemos en primer lugar el modelo teórico que proponemos y, a continuación, lo ejemplificamos a través de un problema que nos permite analizar la potencialidad inicial del trabajo propuesto.

***Palabras clave:***

Programación lineal entera; números difusos; programación multiobjetivo.

**ABSTRACT**

When solving an integer linear programming model, the solution is determined initially, by the feasible set of the problem. Thus any change of this set may involve a change in the solution obtained. Therefore, all items that appear in the constraints of the problem should be well defined. However, in real problems, it is a complex task. Because of this, in this paper we analyze the variation resulting in the optimum point when resources change. For this, we use fuzzy analysis to include uncertainty in these parameters. So, first, we provide the theoretical model we propose and then exemplify it through a problem that allows us to analyze the preliminary potential of the proposed work.

***Keywords:***

Integer linear programming; fuzzy numbers; multiobjective programming.

***Área temática:*** A1 Optimización.

## 1. INTRODUCCIÓN

Un problema de optimización o de programación matemática consiste en la selección de aquel elemento, dentro de un conjunto, que representa la mejor opción. Ello conlleva la especificación, por un lado, del conjunto dentro del cual se está haciendo la elección, el cual viene dado por un conjunto de inecuaciones y ecuaciones, y que se denomina región factible y, por otro, de una medida que indique lo mejor, lo cual se recoge mediante una función que se conoce como función objetivo. En un contexto real, a la hora de modelizar un problema de este tipo hay una serie de parámetros cuyos valores se han de estimar, y que pueden experimentar variaciones, por muy diversas razones: desconocimiento del dato exacto, condiciones de incertidumbre, etc.

Una alternativa para ello consiste en resolver el problema con los datos que se disponen y estudiar cómo afecta a la solución óptima obtenida y a la función objetivo el cambio de uno de los parámetros, manteniendo fijo los restantes. Ello es lo que se conoce como *análisis de sensibilidad* o análisis a posteriori. Otra alternativa sería incorporar la incertidumbre en la modelización y, para ello, se han desarrollado distintas técnicas. Caben destacar la *programación estocástica* (Kall, 1982) en la que tales parámetros son considerados variables aleatorias de las que se supone conocida su distribución de probabilidad, la *programación difusa* (Delgado, et al., 1989) en la que tales parámetros se definen como números difusos de los que se conocen sus funciones de pertenencia, o bien la *programación intervalar* en la que se supone que los valores de los parámetros pueden variar dentro de ciertos intervalos (Jiang et al., 2008, Gabriel and Murat, 2010).

En este trabajo, nuestro enfoque tiene más puntos en común con el segundo planteamiento. Consideraremos que algunos parámetros pueden variar de manera simultánea y esa variación la incorporaremos en la modelización, de manera que el resultado obtenido muestre los distintos escenarios que se pueden originar de acuerdo con las distintas realizaciones de dichos parámetros. Para ello nos apoyaremos en la filosofía difusa como herramienta que nos va a permitir modelizar la variabilidad que

pueden experimentar tales parámetros, y en la programación multiobjetivo, la cual nos va a facilitar realizar un barrido de todas las opciones que se pueden producir.

Nos centraremos en problemas donde tanto la función objetivo como las funciones restricción son lineales, es decir, en problemas de programación lineal, y consideraremos que las variables de decisión han de ser enteras. En este trabajo mostramos una primera aproximación al problema, en el que nos hemos centrado en la variabilidad de los términos independientes de las restricciones (Right-Hand-Side), que usualmente recogen las disponibilidades de recursos (mano de obra, maquinaria, etc.).

Hemos de tener en cuenta que los cambios que se pueden producir en los valores que reflejan tales disponibilidades afectarán a la forma de la región factible y, por extensión, al valor de la solución óptima. Pero si los parámetros varían dentro de un rango, seremos capaces de predecir cómo este cambio va a afectar a la función objetivo y a los valores de las variables de decisión.

Tras esta introducción, desarrollaremos en el siguiente epígrafe el modelo propuesto para alcanzar nuestro propósito, analizando la metodología de comparación de números difusos que utilizamos. A continuación, en el epígrafe tres, utilizamos un ejemplo ilustrativo para mostrar la funcionalidad del modelo. Y, por último, en el epígrafe cuatro analizamos las conclusiones que obtenemos así como las líneas futuras de investigación que vamos a seguir.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideremos, sin pérdida de generalidad, el problema de programación lineal entera de  $n$  variables y  $m$  restricciones, donde se pretende minimizar la función objetivo:

$$\begin{aligned} & \text{Min } C^t x && \text{(P1)} \\ & \text{s. a. : } Ax \leq b \\ & && x \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

donde,  $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$  es el vector de coeficientes de la función objetivo,  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$  es la matriz de coeficientes de las restricciones y  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  es el vector de términos independientes (recursos) de las restricciones. Obsérvese que cualquier otra variante (función a maximizar, restricciones de igualdad...) puede ser transformada, a fin de obtener un problema de este tipo.

La resolución de este tipo de problemas ha sido ampliamente estudiada en la literatura pero, en la mayor parte de las técnicas que se utilizan habitualmente, es usual considerar que todos los elementos que intervienen en el problema son conocidos con exactitud. Sin embargo, es habitual que en las aplicaciones reales, tal y como hemos comentado anteriormente, este conocimiento pueda no resultar completo, debido a condiciones de mercado, de datos disponibles,...

En nuestro caso, centraremos nuestro estudio en el desconocimiento que puede existir sobre los recursos de las restricciones, abordándolo desde la perspectiva de los números difusos. Así, si consideramos que dicha incertidumbre puede ser formulada a través de éstos, bastaría con conocer algunas características (valor más posible y rango de variación, principalmente) de dichos números para realizar el estudio. Además, dentro de la variedad de números difusos existente, y al ser este trabajo una primera aproximación al problema, utilizaremos números difusos triangulares, los cuales son números *LR*-difusos tales que  $m^L = m^R$ , y  $L$  y  $R$  son funciones lineales, con  $L(\xi) = R(\xi) = 1 - \xi$ .

Así, si notamos por  $C$  el valor más cierto<sup>1</sup> ofrecido por el experto, de forma que su intervalo de variación asociado es  $[C - DI, C + DS]$ , entonces podemos construir un número triangular difuso  $\tilde{C}$  que expresamos como la terna  $(C, DI, DS)$ , y cuya función de pertenencia es la siguiente (Zimmermann (1996)):

---

<sup>1</sup> Cuando decimos “valor más cierto” es una forma de abreviar “valor que los expertos consideran más posible”.

$$\mu_{\tilde{C}}(\xi) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{DI}(C - \xi) & \text{si } \xi \in [C - DI, C) \\ 1 - \frac{1}{DS}(\xi - C) & \text{si } \xi \in [C, C + DS] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A partir de dicha función de pertenencia podemos construir la gráfica que se aprecia en la Figura 1, en la que el número triangular  $\tilde{C}$  puede ser descrito por el nivel de confianza<sup>2</sup>  $\alpha \in [0, 1]$  de forma que, si  $\alpha = 1$ , el número triangular se reduce al parámetro original ( $C$ ), mientras que, si  $\alpha = 0$ , obtendremos el intervalo de variación completo ( $[C - DI, C + DS]$ ).

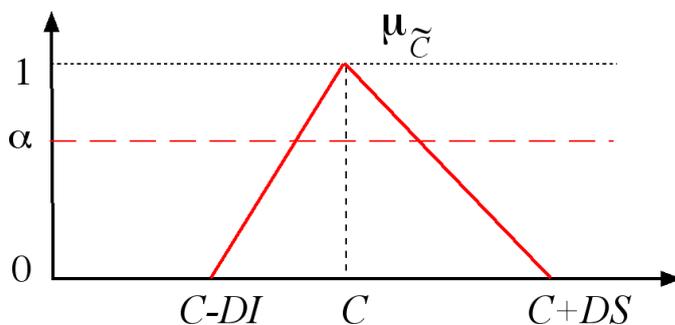


Figura 1. Número triangular difuso

De esta forma, si consideramos que cada recurso es un número difuso triangular  $\tilde{b}_i$ , cuya terna asociada es  $(b_i, \underline{b}_i, \overline{b}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , nuestro problema (P1) quedaría definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Min } C^t x & \qquad \qquad \qquad (P2) \\ \text{s. a. : } Ax & \leq \tilde{b} \\ x & \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ahora bien, operar con las restricciones con coeficientes difusos que se obtienen pasa, necesariamente, por realizar comparaciones entre los números difusos con los que

<sup>2</sup> En este trabajo preferimos hablar de nivel de confianza porque es un término que resulta natural a los que trabajan en programación matemática desde ámbitos ajenos a la lógica difusa. Sin embargo, en Zimmermann (1996), por ejemplo, pueden encontrarse otras acepciones para referirse al parámetro alfa, tales como “grado de verdad” o, simplemente, “grado de pertenencia” a un conjunto difuso.

se trabaja. Es decir, dada la variabilidad que presentan dichos coeficientes, hay que determinar una forma de poder compararlos. En general, en la literatura podemos encontrar una amplia variedad de técnicas que afrontan dichas comparaciones desde diferentes puntos de vista, de forma que ofrecen diferentes alternativas según sean las características del problema a tratar (Campos y Verdegay (1989)).

En esta línea y considerando que, en el marco de nuestro problema, la definición de los números difusos que utilizamos la basamos en los distintos niveles de confianza otorgados por el centro decisor, realizamos dicha comparación utilizando una de las aproximaciones que existen por  $\alpha$ -cortes, tal y como las clasifican Chang y Lee (1994). Así, aunque este tipo de aproximaciones no utiliza toda la información almacenada en los conjuntos difusos y, a veces, parecen ser restrictivas en su utilización, como contrapartida tenemos que proporcionan rápidos resultados, lo que ha llevado a que sean ampliamente utilizadas (León et al. (2003)). En esta línea, utilizaremos la comparación, introducida por Tanaka et al. (1984), la cual permite comparar números difusos a través de los  $\alpha$ -cortes sin crear elementos que no puedan ser comparados entre sí o que creen ambigüedad en la comparación, y de una forma lo más general posible. En consecuencia, dados los niveles de confianza  $\alpha_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, m$ , nuestras restricciones del problema (P2) pasan a ser las siguientes:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 + (1 - \delta_1)\bar{b}_1 \\
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 - (1 - \delta_1)\underline{b}_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 + (1 - \delta_2)\bar{b}_2 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 - (1 - \delta_2)\underline{b}_2 \\
 &\dots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m + (1 - \delta_m)\bar{b}_m \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m - (1 - \delta_m)\underline{b}_m
 \end{aligned}$$

para todo  $\delta_i \in [\alpha_i, 1]$ .

La mayor desventaja que posee este tipo de comparación de elementos difusos es que el número de restricciones de partida queda duplicado al aplicar la transformación. Sin embargo, para cada grupo de niveles de confianza que se fije, obtendremos un conjunto de oportunidades diferente, de forma que la solución del

problema a resolver irá cambiando. Ahora bien, dichas soluciones pueden presentar una dependencia muy alta con respecto a los niveles de confianza elegidos, de forma que, si dichos niveles sufren una ligera modificación, la solución puede pasar a ser otra cuyo valor óptimo sea diferente. En este sentido, nuestro objetivo es resolver el problema, con independencia de los niveles de confianza elegidos, es decir, obtener el conjunto de todas las soluciones que se obtienen variando, dentro de su rango, el conjunto de los  $m$  niveles de confianza. Para ello, haremos uso del procedimiento descrito en Pérez (2012), aplicándolo a nuestro problema, de forma que el problema (P2) es transformado al problema multiobjetivo (P3) siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } (C^t x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) && \text{(P3)} \\
 & \text{s. a.: } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 + (1 - \delta_1)\bar{b}_1 \\
 & \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 - (1 - \delta_1)\underline{b}_1 \\
 & \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 + (1 - \delta_2)\bar{b}_2 \\
 & \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 - (1 - \delta_2)\underline{b}_2 \\
 & \quad \dots \\
 & \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m + (1 - \delta_m)\bar{b}_m \\
 & \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m - (1 - \delta_m)\underline{b}_m \\
 & \quad x \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

para todo  $\delta_i \in [\alpha_i, 1]$ .

Así, (P3) nos permite calcular tanto las soluciones que podemos obtener al variar los niveles de confianza dentro de sus rangos, como los niveles de confianza mínimos para los que cada una de estas soluciones sigue siendo óptima. Es decir, con una única resolución obtenemos todas las posibles soluciones del problema, junto con los intervalos de variación de cada uno de los recursos para los que dichas soluciones son óptimas.

Por tanto, una vez visto el modelo teórico que resolvemos, pasemos a continuación a mostrar los resultados que se obtienen sobre un ejemplo ilustrativo.

### 3. EJEMPLO ILUSTRATIVO

Utilicemos el ejemplo propuesto a continuación, a fin de ilustrar, por un lado, el procedimiento descrito y, por otro, analizar los resultados que se obtienen:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } 2x + 5y && \text{(P4)} \\
 & \text{s. a. : } 2x + 3y \leq 95 \\
 & 40 \leq x + 2y \leq 55 \\
 & 5 \leq x \leq 40 \\
 & 0 \leq y \leq 20 \\
 & x \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Y supongamos que, cada uno de los recursos de las restricciones, es un número difuso triangular cuyo valor más posible es el dado, y cuya desviación superior es igual a su desviación inferior, siendo éstas del 10% del valor dado como más posible. Es decir, por ejemplo, para  $b_1 = 95$ , tendríamos que  $\overline{b_1} = \underline{b_1} = 9.5$ .

De esta forma, según el procedimiento descrito en el epígrafe anterior, (P4) se transformaría en:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } 2x + 5y & \quad \text{Min } (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) & \quad \text{(P5)} \\
 & \text{s. a. : } 2x + 3y \leq 95 \pm (1 - \delta_1)9.5 \\
 & 40 \pm (1 - \delta_2)4 \leq x + 2y \leq 55 \pm (1 - \delta_3)5.5 \\
 & 5 \pm (1 - \delta_4)0.5 \leq x \leq 40 \pm (1 - \delta_5)4 \\
 & 0 \leq y \leq 20 \pm (1 - \delta_6)2 \\
 & x \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

para todo  $\delta_i \in [\alpha_i, 1], i = 1, 2, \dots, 6$ , cuya frontera eficiente está formada por los 21 puntos que pueden verse en la Tabla 1 (donde mostramos redondeos a dos decimales para los niveles de confianza).

Así, según podemos apreciar, el mejor valor de la función objetivo inicial que puede alcanzarse es de 130 unidades, que coincide con el vértice (15, 20) que, además, es el óptimo del problema cuando no se considera incertidumbre alguna en los recursos. Ahora bien, este óptimo no lo es para cualesquiera valores de los recursos, sino que,

cuando éstos varían dentro del rango completo que les hemos dado, este punto deja de ser un punto factible del problema en algún momento y, por tanto, óptimo.

En particular, para el punto (15,20), los valores mínimos que obtenemos para los distintos niveles de confianza son, respectivamente, (0.48, 0, 1, 0, 0, 1), de forma que los únicos recursos que no pueden cambiar de valor ( $b_3, b_6$ ), dado que sus niveles de confianza mínimos son iguales a 1, son justo los correspondientes a las dos restricciones activas del problema en dicho vértice.

Sin embargo, en relación al resto de restricciones, el punto (15,20) seguirá siendo óptimo del problema si  $b_1 \in [90, 104.5]$ , dado que  $\alpha_1 = 0.48$ , pudiendo variar el resto de recursos en todo su intervalo dado, puesto que el valor mínimo que toman el resto de niveles de confianza siempre es 0.

F. Objetivo	x	y	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$
130	15	20	0,48	0	1	0	0	1
129	17	19	0,58	0	1	0	0	0,5
128	14	20	0,27	0	0,82	0	0	1
128	19	18	0,69	0	1	0	0	0
127	16	19	0,37	0	0,82	0	0	0,5
126	13	20	0,06	0	0,64	0	0	1
126	18	18	0,48	0	0,82	0	0	0
125	15	19	0,16	0	0,64	0	0	0,5
124	12	20	0	0	0,46	0	0	1
124	17	18	0,27	0	0,64	0	0	0
123	14	19	0	0	0,46	0	0	0,5
122	11	20	0	0	0,28	0	0	1
122	16	18	0,06	0	0,46	0	0	0
121	13	19	0	0	0,28	0	0	0,5
120	10	20	0	0	0,1	0	0	1
120	15	18	0	0	0,28	0	0	0
119	12	19	0	0	0,1	0	0	0,5
118	9	20	0	0	0	0	0	1
118	14	18	0	0	0,1	0	0	0
117	11	19	0	0	0	0	0	0,5
116	13	18	0	0	0	0	0	0

Tabla 1. Puntos eficientes obtenidos

De igual forma, puede analizarse el resto de puntos que aparecen en la Tabla 1, obteniéndose, para cada uno de los 21 puntos eficientes, los intervalos de variación de los recursos que pueden apreciarse en la Tabla 2.

Cabe mencionar que, en este caso, el óptimo correspondiente al punto (13, 18), que obtiene un valor de 116 en la función objetivo de (P3), es el punto óptimo para el que todos los recursos pueden tomar cualquier valor de entre sus intervalos de variación dados. O, dicho de otra forma, podemos asegurar que 116 es el menor valor que la función objetivo va a alcanzar para el problema (P3) en el que los recursos pueden tomar valores de un 10% por encima y por debajo de los dados.

<b>F. Obj.</b>	<b>x</b>	<b>y</b>	<b><math>b_1</math></b>	<b><math>b_2</math></b>	<b><math>b_3</math></b>	<b><math>b_4</math></b>	<b><math>b_5</math></b>	<b><math>b_6</math></b>
<b>130</b>	15	20	[90, 104.5]	[36, 44]	55	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[18, 22]
<b>129</b>	17	19	[91, 104.5]	[36, 44]	55	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[19, 22]
<b>128</b>	14	20	[88, 104.5]	[36, 44]	[54, 60.5]	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[18, 22]
<b>128</b>	19	18	[92, 104.5]	[36, 44]	55	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[18, 22]
<b>127</b>	16	19	[89, 104.5]	[36, 44]	[54, 60.5]	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[19, 22]
<b>126</b>	13	20	[86, 104.5]	[36, 44]	[53, 60.5]	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[18, 22]
<b>126</b>	18	18	[90, 104.5]	[36, 44]	[54, 60.5]	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[18, 22]
<b>125</b>	15	19	[87, 104.5]	[36, 44]	[53, 60.5]	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[19, 22]
<b>124</b>	12	20	[85.5, 104.5]	[36, 44]	[52, 60.5]	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[18, 22]
<b>124</b>	17	18	[88, 104.5]	[36, 44]	[53, 60.5]	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[18, 22]
<b>123</b>	14	19	[85.5, 104.5]	[36, 44]	[52, 60.5]	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[19, 22]
<b>122</b>	11	20	[85.5, 104.5]	[36, 44]	[51, 60.5]	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[18, 22]
<b>122</b>	16	18	[86, 104.5]	[36, 44]	[52, 60.5]	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[18, 22]
<b>121</b>	13	19	[85.5, 104.5]	[36, 44]	[51, 60.5]	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[19, 22]
<b>120</b>	10	20	[85.5, 104.5]	[36, 44]	[50, 60.5]	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[18, 22]
<b>120</b>	15	18	[85.5, 104.5]	[36, 44]	[51, 60.5]	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[18, 22]
<b>119</b>	12	19	[85.5, 104.5]	[36, 44]	[50, 60.5]	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[19, 22]
<b>118</b>	9	20	[85.5, 104.5]	[36, 44]	[49.5, 60.5]	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[18, 22]
<b>118</b>	14	18	[85.5, 104.5]	[36, 44]	[50, 60.5]	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[18, 22]
<b>117</b>	11	19	[85.5, 104.5]	[36, 44]	[49.5, 60.5]	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[19, 22]
<b>116</b>	13	18	[90, 104.5]	[36, 44]	[49.5, 60.5]	[4.5, 5.5]	[36, 44]	[18, 22]

Tabla 2. Intervalos de variación de los recursos en cada solución

Es importante hacer notar que los intervalos obtenidos en la Tabla 2 para los 6 recursos, no coinciden entre sí para cualesquiera dos puntos que comparemos entre sí. Es decir, si, por ejemplo, tomamos los dos primeros puntos obtenidos en la Tabla 2,

podemos comprobar que los intervalos de variación de los recursos  $b_2, b_3, b_4$  y  $b_5$  son iguales pero, sin embargo, los correspondientes a  $b_1$  y  $b_6$  son distintos entre sí.

Además, dada la forma en la que hemos calculado estos puntos, cuando se tenga certeza acerca de, bien los valores que toman los niveles de confianza, bien los intervalos o valores concretos que toman los recursos, siempre habrá que buscar, dentro de los puntos eficientes obtenidos, aquél que reporte un mejor valor de la función objetivo. Por ejemplo, supongamos que el usuario proporciona unos ciertos niveles de confianza para cada uno de los recursos, a saber  $(0.5, 0, 0.7, 0, 0, 0.5)$ . Esto nos llevaría a que, dentro de los 21 puntos eficientes obtenidos anteriormente, sólo los 10 que aparecen en la Tabla 3 serían susceptibles de ser tomados. Sin embargo, dentro de éstos, y dado que todos son soluciones que se verifican a los niveles de confianza deseados por el usuario, el punto que le indicaríamos como solución que más se adecua a sus requerimientos y que, además, le proporciona un mejor rendimiento en la función objetivo propuesta, es el punto  $(15, 19)$ , que reporta un valor de 125 en dicha función objetivo.

<b>F. Objetivo</b>	<b>x</b>	<b>y</b>	<b><math>\alpha_1</math></b>	<b><math>\alpha_2</math></b>	<b><math>\alpha_3</math></b>	<b><math>\alpha_4</math></b>	<b><math>\alpha_5</math></b>	<b><math>\alpha_6</math></b>
<b>125</b>	15	19	0,16	0	0,64	0	0	0,5
<b>124</b>	17	18	0,27	0	0,64	0	0	0
<b>123</b>	14	19	0	0	0,46	0	0	0,5
<b>122</b>	16	18	0,06	0	0,46	0	0	0
<b>121</b>	13	19	0	0	0,28	0	0	0,5
<b>120</b>	15	18	0	0	0,28	0	0	0
<b>119</b>	12	19	0	0	0,1	0	0	0,5
<b>118</b>	14	18	0	0	0,1	0	0	0
<b>117</b>	11	19	0	0	0	0	0	0,5
<b>116</b>	13	18	0	0	0	0	0	0

Tabla 3. Puntos que verifican los niveles de confianza dados

De esta forma, la información que se obtiene con la resolución del modelo que hemos propuesto, permite conocer de forma más exhaustiva el funcionamiento interno del problema cuando los recursos presentan incertidumbre en su formulación.

## **4. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS**

Los problemas de programación lineal entera han sido ampliamente estudiados en cuanto a las metodologías que se utilizan para su resolución. Existen, además, metodologías que se encargan de determinar las variaciones que pueden sufrir los elementos del problema (coeficientes y términos independientes) para seguir asegurando que la solución obtenida sea óptima (análisis de sensibilidad).

En este trabajo, pretendemos dar otro enfoque diferente a las variaciones que pueden sufrir ciertos parámetros del problema. En particular, como primera aproximación, nos hemos centrado en las variaciones asociadas a los recursos de las restricciones. Así, hemos modelizado dichas variaciones a partir de números difusos triangulares, posibilitando esta opción hacer uso de las técnicas de comparación de números difusos existentes.

De esta forma, hemos transformado el problema lineal de programación entera determinista, en otro no determinista en el que los elementos inciertos presentan modelización difusa a partir de niveles de confianza. Ahora bien, los valores que tomen estos niveles de confianza determinarán la solución obtenida del problema, por lo que éstos se convierten en eje central y determinante de la resolución. En este trabajo, apoyándonos en un resultado previo, hemos transformado el problema en otro multiobjetivo cuya frontera eficiente nos permite conocer, para cualesquiera valores que tomen los niveles de confianza de los recursos, cuál es el óptimo del problema original. Además, el resultado teórico obtenido lo hemos ejemplificado utilizando un problema sencillo de 7 restricciones, en el que hemos calculado el conjunto de las 21 posibles soluciones en función a los valores que se otorguen a los niveles de confianza.

Los buenos resultados obtenidos, así como la abundante información proporcionada por la solución, nos permiten tomar este trabajo como una primera aproximación al estudio que nos ocupa. Así, y dentro de las vías de continuidad que surgen, podemos destacar: utilizar otro tipo de números difusos para formular la incertidumbre; realizar otras comparaciones de números difusos en las restricciones; ampliar la incertidumbre a otros parámetros del problema; así como extenderlo al caso en el que las variables que intervengan sean continuas.

## 5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CAMPOS, L, Y VERDEGAY, J. L. (1989) "Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers". *Fuzzy Sets and Systems*, 32 (1), pp. 1-11.
- CHANG, P. T. y LEE, E. S. (1994). "Fuzzy arithmetics and comparison of fuzzy numbers. *Fuzzy optimization: recent advances*". New York, Springer.
- DELGADO, M., VERDEGAY, L., VILA, M.A. (1989). "A general model for fuzzy linear programming". *Fuzzy Sets and Systems*, 29, pp. 21-29.
- GABREL, V., MURAT, C. (2010). "Robustness and duality in linear programming". *Journal of the Operational Research Society*, 61, pp. 1288-1296.
- JIANG, C., HAN, X., LIU, G.R., LIU, G.P. (2008). "A nonlinear interval number programming method for uncertain optimization problems". *European Journal of Operational Research*, 188, pp. 1-13.
- KALL, P. (1982). "Stochastic programming". *European Journal of Operational Research*. 10, pp. 125-130.
- LEÓN, T., LIERN, V., RUIZ, J. L. y SIRVENT, I. (2003). "A fuzzy mathematical programming approach to the assessment of efficiency with DEA models". *Fuzzy Sets and Systems*, 139(2), pp. 407-419.
- PÉREZ, F. (2012). "Incertidumbre en la selección y planificación temporal de carteras de proyectos. Un sistema de ayuda a la decisión". Tesis Doctoral. Universidad de Málaga.
- TANAKA, H., ICHIHASHI, H. y ASAI, K. (1984). "A formulation of fuzzy linear programming problems based on comparison of fuzzy numbers". *Control and Cybernet*, 13, pp. 185-194.
- ZIMMERMANN, H. J. (1996). "Fuzzy set theory and its application". Boston, Kluwer Academic Publishers.