# Un modelo de balance actuarial para sistemas de pensiones DB PAYG con dos contingencias[1]

Ventura Marco, Manuel y Vidal Meliá, Carlos
manuel.ventura@uv.es
carlos.vidal@uv.es
*Departament d'Economia Financera i Actuarial*
*Universitat de València*

## RESUMEN

El trabajo desarrolla los fundamentos teóricos para elaborar un balance actuarial tipo "sueco" de un sistema de prestación definida pay-as-you-go (PAYG DB) para dos contingencias: jubilación e invalidez. Nuestro modelo nos permite obtener el TD (Turnover Duration) medio del sistema, medir la solvencia del sistema y explorar el fenómeno identificado como "reclasificación de pensiones", práctica muy extendida que enmascara el estado real del sistema de pensiones, a menos que la información adicional esté disponible. Además, el modelo está claramente ligado a la práctica actuarial en materia de seguridad social y da apoyo parcial a la adaptación práctica llevada a cabo por OSFIC (2012) en la aplicación del concepto al balance del Plan de Pensiones de Canadá (CPP), que incluye otras contingencias: discapacidad y beneficios de sobrevivientes.

[1] Los autores agradecen a Ole Settergren y Jan Claude Menard sus inestimables comentarios. Una versión previa extendida en inglés está disponible en SSRN: http://ssrn.com/abstract=2064502. Los autores agradecen la asistencia financiera recibida del Ministerio de Educación y Ciencia, proyecto ECO2009-13616, y del Ministerio de Economía y Competitividad, proyecto ECO2012-36685. Cualquier error es completamente responsabilidad de los autores.

## ABSTRACT

In this paper we develop the theoretical basis for drawing up a “Swedish” actuarial balance of a defined benefit pay-as-you-go (DB PAYG) scheme with retirement and disability benefits. Our model enables us to obtain the system's expected average turnover duration, measure the scheme's solvency and explore the phenomenon identified as “pension reclassification”, a widespread practice that masks the system's real status unless further pension information becomes available. Additionally, the model is clearly linked to actuarial practice in social security and gives partial support to the practical adaptation made by OSFIC (2012) in order to apply the concept of the contribution asset to the Canadian Pension Plan (CPP) balance sheet.



***Palabras claves*:**
Balance Actuarial; Pensiones; Seguridad Social; Solvencia; Transparencia.

***Área temática*:** A2 Matemáticas financieras y actuariales.

# 1. INTRODUCCIÓN

La formulación periódica del balance actuarial es una práctica habitual en las Administraciones públicas de Seguridad Social (APSS) de países como EE.UU (BOT (2010)), Japón (AAD (2009)), Suecia, (Pensionsmyndigheten (2011)), Canadá (OSFIC (2012)), UK (GAD (2010)) o Finlandia (Elo et al (2010)).

A la hora de formular un balance actuarial en un sistema de reparto existen fundamentalmente dos opciones, el denominado modelo de "Suecia" y el modelo "EE.UU"[2]. El modelo "sueco" muestra las relaciones de (des)equilibrio actuarial de los sistemas de pensiones mediante un lenguaje comprensible materializado en conceptos de activo y pasivo sin recurrir a las proyecciones explícitas, aunque sólo se aplica a la contingencia de jubilación. Por otro lado, el modelo "EE.UU" explicita, mediante proyecciones, los desafíos futuros en el ámbito financiero que se derivan básicamente del envejecimiento, el aumento previsto de la longevidad y las fluctuaciones de la actividad económica.

El objetivo de este trabajo es desarrollar la base teórica para aplicar conjuntamente el balance actuarial modelo de "Suecia" a dos contingencias, jubilación e invalidez, en un sistema de reparto de prestación definida. En la literatura existe un hueco importante que se pretende cubrir con este trabajo, ya que hasta ahora no se ha abordado las posibilidad de formular este tipo de balance actuarial desde la perspectiva integrada de las contingencias de jubilación e invalidez que van ligadas y representan un alto porcentaje del gasto en pensiones de los sistemas de prestación definida.

Después de esta breve introducción, en el epígrafe segundo y a partir del modelo de Vidal-Meliá y Boado-Penas (2013) se deduce una nueva expresión del periodo medio de maduración del sistema en la que se incluyen ambas contingencias; lo que posibilita formular el balance actuarial para los sistemas de prestación definida en los que no hay una asignación expresa de las cotizaciones por contingencias. En el tercer epígrafe, las expresiones obtenidas se aplican bajo diversas hipótesis razonables a un

[2] Para un estudio en profundidad de sus principales semejanzas y similitudes véase los trabajos de Boado-Penas y Vidal-Meliá (2012) y Vidal-Meliá et al. (2010).

ejemplo numérico suficientemente representativo del sistema de pensiones de reparto. Asimismo, se ilustran los resultados del activo y pasivo del sistema por contingencias y se realiza especial hincapié en el fenómeno conocido como "reclasificación de pensiones". En el epígrafe cuarto se relacionan las principales conclusiones alcanzadas.

## 2. EL ACTIVO POR COTIZACIONES Y EL TD EN UN SISTEMA DE PRESTACIÓN DEFINIDA CON DOS CONTINGENCIAS

El "Activo por cotizaciones" (AC) es el máximo pasivo que se puede financiar en el largo plazo para la tasa de cotización determinada sin requerir aportaciones extraordinarias del promotor, en este caso el Estado. Se basa en el concepto de periodo medio de rotación del sistema, también llamado Turnover Duration (TD), que es el tiempo que se espera que transcurra en años para renovar o rotar totalmente el pasivo del sistema con cotizantes y pensionistas. La cuantía del AC es el producto de las cotizaciones anuales multiplicado por la diferencia entre la edad promedio ponderada de los pensionistas, Ar, y la de los cotizantes Ac.

El proceso de obtención del TD, el activo por cotizaciones del sistema y la descripción de algunas de sus particularidades se puede separar en 5 pasos a efectos de una mayor claridad expositiva:

1.- Descripción del sistema y determinación del año en el que el sistema alcanza el estado estacionario (tasa de cotización para ambas contingencias que permanecen estables en el tiempo y que mantienen el equilibrio financiero del sistema).

2.-Obtención de las expresiones analíticas del pasivo para el sistema desde el punto de vista actuarial, se distingue entre cotizantes y pensionistas, jubilación e invalidez.

3.-Obtención de la expresión analítica del TD en forma de pay-out y pay-in.

4.-Obtención de la expresión del TD como diferencia de las edades promedio ponderadas de los pensionistas y cotizantes.

5.-Obtención del TD y Activo por cotizaciones del sistema como ponderación de los TDs y Activos por cotizaciones de cada una de las contingencias.

## 2.1. Descripción del sistema y determinación del año en el que el sistema alcanza el estado estacionario

Se parte del caso desarrollado por Vidal-Meliá y Boado-Penas (2013), donde la base de cotización coincide con el salario y crece o decrece a un g anual acumulativo, la población crece o decrece en el tiempo a un $\gamma$ anual acumulativo ($\gamma \neq 0$) que afecta a todos los grupos de cotizantes por igual, por lo que el PIB real y los ingresos por cotizaciones del sistema también crecen (decrecen) a la tasa $G = (1+g)\cdot(1+\gamma)-1$.

La diferencia respecto del modelo de Vidal-Meliá y Boado-Penas (2013), es que se introduce un nuevo estado; la invalidez. Se considera un sistema de pensiones maduro con un colectivo abierto al ser un sistema de reparto. La edad que da derecho a la pensión de jubilación, "$x_e$+A", como la fórmula de cálculo de la prestación son constantes, dando origen a una tasa de sustitución fija. Para la prestación por invalidez, las edades que dan derecho son las comprendidas en el intervalo $[x_e, x_e+A-1]$[3] y que para cada una de las edades comprendidas en dicho intervalo la fórmula de cálculo es un porcentaje (o factor de ajuste) respecto de la base salarial. Posteriormente se amplía el intervalo a $[x_e+1, w-1]$.

La estructura demográfico-financiera en cualquier momento t desde el inicio del sistema viene conformada por:

1.-Edad:

$$\left\{\begin{array}{l} \overbrace{x_e,\ x_e+1,\ x_e+2,\ldots\ldots\ldots x_e+A-1}^{\text{Edades de los cotizantes}},\ \underbrace{x_e+A,\ x_e+A+1,\ldots\ldots\ldots w-1}_{\text{Edades de los pensionistas por jubilación}} \\ \underbrace{x_e+1,\ x_e+2,\ldots\ldots\ldots x_e+A-1,\ x_e+A,\ x_e+A+1,\ldots\ldots\ldots w-1}_{\text{Edades de los pensionistas por invalidez}} \end{array}\right. \quad \textbf{[1.]}$$

Se adopta la convención de que si se invalida un individuo en edad de cotización $x_e+k \in [x_e, x_e+A-1]$ cobrará la pensión de invalidez en $x_e+k+1 \in [x_e+1, x_e+A]$.

2.-Número de cotizantes por edad en t:

$$\left\{N_{(x_e,t)},\ N_{(x_e+1,t)},\ldots,N_{(x_e+A-1,t)}\right\} = \left\{N_{(x_e,0)}(1+\gamma)^t,\ N_{(x_e+1,0)}(1+\gamma)^t,\ldots,N_{(x_e+A-1,0)}(1+\gamma)^t\right\} \quad \textbf{[2.]}$$

[3] Un individuo de edad $x_e$ años se puede invalidar después de haber cotizado, por lo que empezará a cobrar la pensión de invalidez a la edad $x_e+1$ años, de igual manera el individuo de edad $x_e+A-1$ años, se puede invalidar a esa edad una vez haya cotizado, por lo que cobrará a la edad $x_e+A$ años como inválido.

donde $N_{(x_e+k,t)} = N_{(x_e,t)}\ {}_kR_{x_e}$, siendo ${}_kR_{x_e}$ la relación estable en el tiempo entre el número de individuos de edad $x_e$ y $x_e$+k años, expresada por medio de probabilidades ${}_kp_{x_e}$, que incluye tanto las bajas por fallecimiento como por invalidez asociadas a cada edad, ya que no se considera la posibilidad de retorno a la actividad (modelo práctico de invalidez). Las altas o bajas por movimientos migratorios se incluyen en el parámetro $\gamma$.

3.-Salario medio (base imponible media) por edad:

$$\left\{y_{(x_e,t)},\ y_{(x_e+1,t)},\ldots,y_{(x_e+A-1,t)}\right\}=\left\{y_{(x_e,0)}(1+g)^t,\ y_{(x_e+1,0)}(1+g)^t,\ldots,y_{(x_e+A-1,0)}(1+g)^t\right\} \quad \textbf{[3.]}$$

4.- Número de inválidos en el intervalo de edad [$x_e$+1 , $x_e$+A] en t = 1

$$\begin{aligned} & I_{(x_e+1,1)} = N_{(x_e,0)} \cdot i_{x_e}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & I_{(x_e+k,1)} = N_{(x_e+k-1,0)} \cdot i_{x_e+k-1} = N_{(x_e,0)} \cdot {}_{k-1}p_{x_e} \cdot i_{x_e+k-1}, \end{aligned} \quad \textbf{[4.]}$$

en donde $i_{x_e+k-1}$ es la probabilidad de que un individuo de edad $x_e$+k-1 se invalide de manera permanente, sin que pueda retornar a la actividad, $I_{(x_e+k,1)}$ es el número de inválidos causados en el año t de edad $x_e$+k, y $p^I_{x_e+k-1}$ es la probabilidad de supervivencia a la edad $x_e$+k-1 de un invalido, que puede diferir de las del colectivo de activos.

Para t ≥ 2 y para el intervalo de edad [$x_e$+1 , $x_e$+A] se deben considerar dos tipos de inválidos: los inválidos causados en el año en curso de edad $x_e$+k años,

$$\begin{aligned} I^N_{(x_e+k,t)} &= N_{(x_e+k-1,t-1)} \cdot i_{x_e+k-1} = N_{(x_e+k-1,1)} \cdot (1+\gamma)^{t-1} \cdot i_{x_e+k-1} = \\ &= N_{(x_e,0)} \cdot (1+\gamma)^{t-1} \cdot {}_{k-1}p_{x_e} \cdot i_{x_e+k-1} = I_{(x_e+k,1)} \cdot (1+\gamma)^{t-1} \end{aligned} \quad \textbf{[5.]}$$

y los inválidos sobrevivientes de edad $x_e$+k años que se mantienen de años anteriores,

$$\begin{aligned} & I^S_{(x_e+k,t)} = I_{(x_e+k-1,t-1)} \cdot p^I_{x_e+k-1} = \left(I^N_{(x_e+k-1,t-1)} + I^S_{(x_e+k-1,t-1)}\right) \cdot p^I_{x_e+k-1} = \\ & I_{(x_e+k-1,1)} \cdot (1+\gamma)^{t-2} \cdot p^I_{x_e+k-1} + I_{(x_e+k-2,t-2)} \cdot p^I_{x_e+k-2} \cdot p^I_{x_e+k-1} = \\ & I_{(x_e+k-1,1)} \cdot (1+\gamma)^{t-2} \cdot p^I_{x_e+k-1} + I_{(x_e+k-2,t-2)} \cdot {}_2p^I_{x_e+k-2} = \\ & I_{(x_e+k-1,1)} \cdot (1+\gamma)^{t-2} \cdot p^I_{x_e+k-1} + I_{(x_e+k-2,1)} \cdot (1+\gamma)^{t-3} \cdot {}_2p^I_{x_e+k-2} + I_{(x_e+k-3,t-3)} \cdot {}_3p^I_{x_e+k-3} = \\ & = \ldots = \sum_{s=\text{Máx}\{1,k-t+1\}}^{k-1} I_{(x_e+s,1)} \cdot (1+\gamma)^{t-1-k+s} \cdot {}_{k-s}p^I_{x_e+s} \end{aligned} \quad \textbf{[6.]}$$

El total de inválidos para cada edad en t se puede calcular por:

$$I_{(x_e+k,\,t)} = \sum_{s=\text{Máx}\{1,\,k-t+1\}}^{k} I_{(x_e+s,\,1)} \cdot (1+\gamma)^{t-1-k+s} \cdot {}_{k-s}p^{I}_{x_e+s} \qquad \textbf{[7.]}$$

Este tipo de estructura se mantiene hasta que todos los inválidos que empezaron en t = 1 se han extinguido, lo que supone que t = w-$x_e$, y por lo tanto a partir de aquí en todo este tramo de invalidez se tiene que k < t, por lo que $\text{Máx}\{1, k-t+1\}=1$. A partir de $x_e$+A+1 años ya no se consideran nuevos inválidos, así que para el intervalo de edad [$x_e$+A+1, w-1], esto es k $\in$ {1, w-1- ($x_e$+A)}, se tiene que:

$$I_{(x_e+A+k,\,t)} = I_{(x_e+A,\,t-k)} \cdot {}_k p^{I}_{x_e+A} = \left( \sum_{s=\text{Máx}\{1,\,A-t+k+1\}}^{A} I_{(x_e+s,\,1)} \cdot (1+\gamma)^{t-k-1-A+s} \cdot {}_{A-s}p^{I}_{x_e+s} \right) {}_k p^{I}_{x_e+A} \qquad \textbf{[8.]}$$

Se considera que la pensión anual de jubilación inicial es $P^{R}_{(x_e+A,1)} = \beta \cdot Y_{C,\,0}$, es decir, que la pensión se calcula como un porcentaje $\beta$ de la media de los salarios durante toda la carrera laboral (podría ser cualquier otro promedio), $Y_c$, y que las pensiones causadas crecen (decrecen) al tanto anual acumulativo real de $\lambda$.

Si $\forall$k $\in$ [1, A] la pensión anual de invalidez inicial (en t=1) es $P^{I}_{(x_e+k,1)}$, las cuantías de las pensiones para nuevos inválidos en t $\geq$ 2 y $\forall$k $\in$ [1, A] se calculan de acuerdo con la fórmula:

$$P^{I}_{(x_e+k,\,t)} = P^{I}_{(x_e+k,\,1)}(1+g)^{t-1} = b^{I}_{k}\, \bar{y}_{(x_e+k,\,1)}(1+g)^{t-1} \qquad \textbf{[9.]}$$

ya que se considera que $P^{I}_{(x_e+k,1)}$ es un porcentaje variable, $b^{I}_{k}$, de la base de cotización de todos los salarios cotizados, k años, a la edad de invalidarse.

Por su parte las cuantías de las pensiones de invalidez de sobrevivientes de periodos anteriores, $P^{S}_{(x_e+k,\,t,\,x_e+s)}$, igualmente en t $\geq$ 2, $\forall$k $\in$ [1, A] y siendo $x_e$+s, con $s \in \{\text{Max}\{1, k-t+1\}, \cdots, k-1\}$, la edad en la que inicialmente se causó la invalidez, se obtendría de acuerdo con la fórmula:

$$P^{S}_{(x_e+k,\,t,\,x_e+s)} = P^{I}_{(x_e+s,1)}(1+g)^{t-k-1+s}\,(1+\lambda)^{k-s} = b^{I}_{s}\,\bar{y}_{(x_e+s,1)}(1+g)^{t-k-1+s}\,(1+\lambda)^{k-s} \qquad \textbf{[10.]}$$

Puede observarse que para cada periodo t y para cada edad k se tiene un vector 1x(k-s) de cuantías de pensiones antiguas, tantas como la diferencia entre la edad de cálculo de la pensión, k, y la edad a la que inicialmente se causó la misma, s.

Las pensiones de invalidez para las edades [$x_e$+A+1, w-1-$x_e$-A) son todas de sobrevivientes al no considerarse nuevos inválidos, pero al retrotraerlas a la edad $x_e$+A pueden provenir de inválidos nuevos a esa edad o de inválidos sobrevivientes de edades anteriores (un vector de 1x2), de forma que:

$$P^{I}_{(x_e+A+k,\,t)} = \left(P^{I}_{(x_e+A,\,t\text{-}k)},\, P^{S}_{(x_e+A,\,t\text{-}k)}\right)\cdot(1+\lambda)^{k} \qquad \textbf{[11.]}$$

pero como, de acuerdo con **[10.]**, $P^{S}_{(x_e+A,\,t\text{-}k)}$ va a depender de la edad a la que inicialmente se causó la invalidez, por lo que se tiene que $s\in\{\text{Máx}\{1, A+1-t+k\},\cdots, A\text{-}1\}$, y al considerar $P^{I}_{(x_e+A,\,t\text{-}k)}$, la fórmula final para $s\in\{\text{Máx}\{1, A+1-t+k\},\cdots, A\}$ quedará:

$$P^{I}_{(x_e+A+k,\,t,\,x_e+s)} = P^{I}_{(x_e+A,1)}(1+g)^{t-k-A-1+s}(1+\lambda)^{A+k-s} = b^{I}_{s}\,\bar{y}_{(x_e+s,1)}(1+g)^{t-k-A-1+s}(1+\lambda)^{A+k-s} \qquad \textbf{[12.]}$$

y de manera similar a lo que se comentó para la ecuación **[11.],** $P^{I}_{(x_e+A+k,\,t)}$ es también un vector fila, en este caso de 1x(A-1-s) con $s\in\{\text{Máx}\{1, A+1-t+k\}, A\}$.

En este escenario la estabilidad de la tasa de cotización conjunta ($\theta^{I}+\theta^{R}$) depende de la estabilidad de la relación cotizantes pensionistas en ambas contingencias. Para las pensiones de jubilación el tipo de cotización a partir de "w-$x_e$-A" contado desde el inicio del sistema se puede considerar constante desde el punto de vista actuarial, porque a partir de ese momento la relación entre el número de pensionistas por jubilación y el número de cotizantes (tasa de dependencia) se estabiliza. Para los pensionistas por invalidez la relación entre cotizantes y pensionistas no se estabiliza hasta que "w-$x_e$-1". Dado que w-$x_e$-1 > w-$x_e$-A, y se asume que t >= w-$x_e$-1, se tiene que la relación cotizantes pensionistas es estable, ya que los tres colectivos evolucionan (crecen o decrecen) exactamente igual al tanto $\gamma$. A partir de este instante, las expresiones de las tasas de cotización para ambas contingencias (jubilación, R, e invalidez, I), que son separables, serán:

$$\theta^{R}_{t} = \frac{\overbrace{\beta\, Y_{C,0}\sum_{k=0}^{w-x_e-A-1} N_{(x_e+A+k,1)}\,(1+G)^{t-k}\,(1+\lambda)^{k}}^{\text{Gasto en pensionesde jubilación}}}{\underbrace{(1+G)^{t}\sum_{k=0}^{A-1} y_{(x_e+k,1)} N_{(x_e+k,1)}}_{\text{Masa salarial imponible}}} = \frac{P_{(x_e+A,1)}\sum_{k=0}^{w-x_e-A-1} N_{(x_e+A+k,1)}\left[\frac{1+\lambda}{1+G}\right]^{k}}{\sum_{k=0}^{A-1} y_{(x_e+k,1)}\, N_{(x_e+k,1)}} = \theta^{R}_{t+1} = \ldots = \theta^{R}$$

**[13.]**

con, $Y_{C,0} = \frac{\sum_{k=0}^{A-1} y_{(x_c+k,-A+k+1)}}{A}$, la base imponible media derivada de considerar toda la carrera laboral, en consecuencia $\beta Y_{C,0} = P_{(x_c+A,1)}$, y al igual que en el caso de invalidez

$$P_{(x_c+A,t)} = P_{(x_c+A,1)}\left(1+g\right)^{t-1} = \beta Y_{C,0}\left(1+g\right)^{t-1}; \qquad \textbf{[14.]}$$

mientras que para la invalidez:

$$\theta_t^I = \frac{\overbrace{\sum_{k=1}^{A}\sum_{s=1}^{k} P^I_{(x_c+s,1)}\, I_{(x_c+s,1)}\left[\frac{1+\lambda}{1+G}\right]^{k-s} {}_{k-s}p^I_{x_c+s}}^{\text{Gasto en pensiones de invalidez en edad de actividad}} + \overbrace{\sum_{k=1}^{w-x_c-A-1}\left(\sum_{s=1}^{A} P^I_{(x_c+s,1)}\, I_{(x_c+s,1)}\left[\frac{1+\lambda}{1+G}\right]^{A+k-s} {}_{A+k-s}p^I_{x_c+s}\right)}^{\text{Gasto en pensiones de invalidez en edad de jubilación}}}{\underbrace{\sum_{k=0}^{A-1} y_{(x_c+k,1)} N_{(x_c+k,1)}}_{\text{Masa salarial imponible}}} = \ldots = \theta^I$$

**[15.]**

Si se considera la pensión media del sistema para la contingencia de invalidez, la pensión media del sistema para la contingencia de jubilación, y la base imponible media, en un sistema de pensiones maduro el cociente pensión media-base imponible media, denominado ratio financiero, es ya constante en ambas contingencias debido a que numerador y denominador evolucionan al tanto de variación de los salarios.

$$\frac{\overline{P}_t^I}{\overline{W}_t} = \frac{\overline{P}_{t+1}^I}{\overline{W}_{t+1}} = \ldots\ldots = \frac{\overline{P}^I}{\overline{W}} = rf^I, \qquad \frac{\overline{P}_t^R}{\overline{W}_t} = \frac{\overline{P}_{t+1}^R}{\overline{W}_{t+1}} = \ldots\ldots = \frac{\overline{P}^R}{\overline{W}} = rf^R \qquad \textbf{[16.]}$$

Por lo que las tasas de cotización en estado estacionario son:

$$\left\{\theta^I, \theta^R\right\} = \left\{rf^I \cdot rd^I, rf^R \cdot rd^R\right\} = \left\{\frac{\overline{P}^I}{\overline{W}}\frac{I}{C}, \frac{\overline{P}^R}{\overline{W}}\frac{R}{C}\right\} \qquad \textbf{[17.]}$$

## 2.2. Obtención de las expresiones analíticas del pasivo para el sistema desde el punto de vista actuarial

El pasivo del sistema de pensiones, $V^T$ tiene dos componentes, (i) el pasivo por pensiones en curso de pago, $V^r$, (pensiones causadas) y (ii) y el pasivo con los cotizantes actuales, $V^c$. Hay que distinguir el pasivo para ambas contingencias.

El primer componente, pensiones causadas, para la contingencia de invalidez es igual a:

$$
{}^{I}V_t^{r} = \sum_{k=1}^{A}\left(\sum_{s=1}^{k} P^{I}_{(x_e+s,t)}\cdot I_{(x_e+s,t)}\left[\frac{1+\lambda}{1+G}\right]^{k-s}{}_{k\text{-}s}p^{I}_{x_e+s}\right)\cdot {}^{I}\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+k} + \\
+\sum_{k=1}^{w\text{-}x_e\text{-}A-1}\left(\sum_{s=1}^{A} P^{I}_{(x_e+s,t)}\cdot I_{(x_e+s,t)}\left[\frac{1+\lambda}{1+G}\right]^{A+k\text{-}s}{}_{A+k\text{-}s}p^{I}_{x_e+s}\right)\cdot {}^{I}\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+A+k} \qquad \textbf{[18.]}
$$

siendo ${}^{I}\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+k}$ y ${}^{I}\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+A+k}$, respectivamente, el valor actual actuarial de una renta vitalicia para inválidos prepagable que varía al tanto real $\lambda$ valorada a la edad de "$x_e$+k" años y "$x_e$+A+k" años con un tipo de interés técnico igual a d.

Para la contingencia de jubilación el primer componente, pensiones causadas, en este estado estacionario es igual a:

$$
{}^{R}V_t^{r} = P_{(x_e+A,t)}\sum_{k=0}^{w\text{-}xe\text{-}A\text{-}1} N_{(x_e+A+k,\,t)}\ \ddot{a}^{\lambda}_{x_e+A+k}\left[\frac{1+\lambda}{1+G}\right]^{k} \qquad \textbf{[19.]}
$$

siendo $\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+A+k}$ el valor actuarial de una renta vitalicia prepagable para jubilados que varía al tanto real $\lambda$ valorada a la edad de "$x_e$+A+k" años con un tipo de interés técnico igual a d.

El segundo componente es el pasivo con los cotizantes actuales, cuyo pago aún no se inicia, pero cuyas pensiones están comprometidas con los cotizantes activos en virtud de cotizaciones ya realizadas. Este segundo componente del pasivo se calcula por el método prospectivo, y será la *diferencia* entre el valor actual de las pensiones futuras, y el valor actual de las cotizaciones futuras:

$$
{}^{I}V_t^{c} = \overbrace{\sum_{k=1}^{A}\sum_{h=k}^{A} P_{(x_e+h,t)}\cdot I^{N}_{(x_e+h,t)}\,{}^{I}\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+h}\left[\frac{(1+G)}{(1+d)}\right]^{h}}^{\text{Pensiones futuras de invalidez}} - \underbrace{\theta^{I}\left(\sum_{k=0}^{A-1}\sum_{h=0}^{k} N_{(x_e+k,t)}\cdot y_{(x_e+k,t)}\left[\frac{(1+G)}{(1+d)}\right]^{h}\right)}_{\text{Cotizaciones futuras}} \qquad \textbf{[20.]}
$$

Para la contingencia de jubilación el pasivo con los cotizantes es igual a:

$$
{}^{R}V_t^{c} = \overbrace{P_{(xe+A,t)}N_{(xe+A,t)}\ \ddot{a}^{\lambda}_{xe+A}\sum_{h=1}^{A}\left[\frac{(1+G)}{(1+d)}\right]^{h}}^{\text{Pensiones futuras}} - \underbrace{\theta^{R}\left(\sum_{k=0}^{A-1}\sum_{h=0}^{k} N_{(xe+k,t)}\ y_{(xe+k,t)}\left[\frac{(1+G)}{(1+d)}\right]^{h}\right)}_{\text{Cotizaciones futuras}} \qquad \textbf{[21.]}
$$

## 2.3. Obtención de la expresión analítica del TD del sistema en forma de pay-out y pay-in

Para obtener el "Turnover Duration", por analogía con el proceso descrito en los trabajos de Settergren y Mikula (2005) o Boado-Penas et al (2008), que tratan la contingencia de jubilación, hay que dividir el pasivo total por las cotizaciones anuales, y considerar que el tipo de interés para descontar las pensiones y cotizaciones futuras es el tanto interno de rendimiento del sistema de reparto financieramente viable (Gronchi and Nisticò (2008)), con lo que para la contingencia de invalidez:

$$TD_t^I = \frac{{}^I V_t^T}{C_t^I} = \frac{\overbrace{\sum_{k=1}^{A}\left(\sum_{h=1}^{k} P^I_{(x_e+h,1)} I_{(x_e+h,1)} \left[\frac{1+\lambda}{1+G}\right]^{k-h} {}_{k\text{-}h}p^I_{x_e+h}\right) {}^I\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+k}}^{\text{valor actual pensiones de invalidez causadas}}}{\theta^I \cdot \left(\sum_{k=0}^{A-1} y_{(x_e+k,1)} N_{(x_e+k,1)}\right)} +$$

$$+ \frac{\overbrace{\sum_{k=1}^{w\text{-}x_e\text{-}A-1}\left(\sum_{h=1}^{A} P^I_{(x_e+h,1)} I_{(x_e+h,1)} \left[\frac{1+\lambda}{1+G}\right]^{A+k-h} {}_{A+k\text{-}h}p^I_{x_e+h}\right) {}^I\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+A+k}}^{\text{valor actual pensiones de invalidez causadas}}}{\theta^I \cdot \left(\sum_{k=0}^{A-1} y_{(x_e+k,1)} N_{(x_e+k,1)}\right)} +$$

$$+ \frac{\overbrace{\sum_{k=1}^{A}\sum_{h=k}^{A} P^I_{(x_e+h,1)} I^N_{(x_e+h,1)} {}^I\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+h} \left[\frac{1+G}{1+d}\right]^{h}}^{\text{valor actual pensiones invalidez futuras}}}{\theta^I \left(\sum_{k=0}^{A-1} y_{(x_e+k,1)} N_{(x_e+k,1)}\right)} - \frac{\overbrace{\sum_{k=0}^{A-1}\sum_{h=0}^{k} N_{(x_e+k,1)}\, y_{(x_e+k,1)} \left[\frac{1+G}{1+d}\right]^{h}}^{\text{valor actual cotizaciones futuras}}}{\sum_{k=0}^{A-1} y_{(x_e+k,1)} N_{(x_e+k,1)}} \quad \textbf{[22.]}$$

Si se sustituye en la ecuación anterior la expresión la tasa de cotización por invalidez y que d=G, el numerador del tercer sumando se puede expresar por:

$$\sum_{k=1}^{A} P^I_{(x_e+k,1)} \cdot I^N_{(x_e+k,1)} {}^I\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+k} \left(\sum_{h=1}^{k}\left[\frac{1+G}{1+d}\right]^{h}\right) = \sum_{k=1}^{A} P^I_{(x_e+k,1)} \cdot I^N_{(x_e+k,1)} \cdot {}^I\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+k} \cdot k \quad \textbf{[23.]}$$

y dado que el denominador de los tres primeros sumandos de la expresión **[22.]**, valor actual actuarial de las pensiones causadas por invalidez en este año, es equivalente a los al gasto en pensiones de invalidez de ese año:

$$\sum_{k=1}^{A}\left(\sum_{h=1}^{k} P^{I}_{(x_e+h,1)}\cdot I_{(x_e+h,1)}\left[\frac{(1+\lambda)}{(1+G)}\right]^{k-h} {}_{k\text{-}h}p^{I}_{x_e+h}\right)+\sum_{k=1}^{w-1-(x_e+A)}\left(\sum_{h=1}^{A} P^{I}_{(x_e+h,1)}\cdot I_{(x_e+h,1)}\left[\frac{(1+\lambda)}{(1+G)}\right]^{A+k-h} {}_{A+k\text{-}h}p^{I}_{x_e+h}\right)$$

$$=$$

$$\sum_{k=1}^{A} P^{I}_{(x_e+k,1)}\cdot I^{N}_{(x_e+k,1)}\cdot {}^{I}\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+k} \qquad \textbf{[24.]}$$

la expresión **[23.]** se puede expresar:

$$TD^{I}_{t} =$$

$$\left.\begin{array}{l}\overbrace{\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{A} {}^{I}\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+k}\left(\sum\limits_{h=1}^{k} P^{I}_{(x_e+h,1)} I_{(x_e+h,1)}\left[\dfrac{(1+\lambda)}{(1+G)}\right]^{k-h} {}_{k\text{-}h}p^{I}_{x_e+h}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{A} P^{I}_{(x_e+k,1)}\cdot I^{N}_{(x_e+k,1)}\cdot {}^{I}\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+k}}}^{1=pt^{I1}_{r}} + \\ + \overbrace{\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{w\text{-}x_e\text{-}A-1} {}^{I}\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+A+k}\left(\sum\limits_{h=1}^{A} P^{I}_{(x_e+h,1)} I_{(x_e+h,1)}\left[\dfrac{(1+\lambda)}{(1+G)}\right]^{A+k-h} {}_{A+k\text{-}h}p^{I}_{x_e+h}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{A} P^{I}_{(x_e+k,1)}\cdot I^{N}_{(x_e+k,1)}\cdot {}^{I}\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+k}}}^{2=pt^{I2}_{r}}\end{array}\right] \text{Pay out duration} = pt^{I}_{r}$$

$$+ \qquad \textbf{[25.]}$$

$$\left.\underbrace{\overbrace{\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{A} P^{I}_{(x_e+k,1)}\cdot I^{N}_{(x_e+k,1)}\cdot {}^{I}\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+k}\cdot k}{\sum\limits_{k=1}^{A} P^{I}_{(x_e+k,1)}\cdot I^{N}_{(x_e+k,1)}\cdot {}^{I}\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+k}}}^{3}}_{\bar{k}^{I}_{t}} - \overbrace{\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{A-1} N_{(x_e+k,1)}\cdot y_{(x_e+k,1)}\cdot (k+1)}{\sum\limits_{k=0}^{A-1} N_{(x_e+k,1)}\cdot y_{(x_e+k,1)}}}^{4}\right] \text{Pay in duration} = pt^{I}_{c}$$

El tercer sumando de la expresión es una media ponderada de años cotizados hasta la entrada al estado de invalidez desde la edad $x_e$ +1 para los actuales cotizantes, y queda desagregado el período medio de maduración, al igual que en jubilación, en dos subperíodos: pay-in y pay-out, que se corresponden con el tiempo que una unidad monetaria cotizada por la contingencia de invalidez forma parte del pasivo de los cotizantes y los pensionistas respectivamente. El pay-out a su vez se desglosa en dos subperíodos: la parte derivada de las edades de invalidez que se superponen con las de los cotizantes y la parte derivada de las edades de invalidez que se superponen con las de los pensionistas por jubilación.

Para la contingencia de jubilación, (Vidal-Meliá y Boado-Penas (2013)):

$$TD_t^R = \underbrace{\overbrace{\frac{\sum_{k=0}^{w-x_e-A-1} N_{(x_e+A+k,1)}\, \ddot{a}^{\lambda}_{x_e+A+k} \left[\frac{1+\lambda}{1+G}\right]^k}{N_{(x_e+A,1)}\, \ddot{a}^{\lambda}_{x_e+A}}}^{\text{Pay out duration}}}_{pt_r^R} + A - \underbrace{\frac{\overbrace{\sum_{k=0}^{A-1} N_{(x_e+k,1)}\, y_{(x_e+k,1)}\,(k+1)}^{pt_c^R}}{\sum_{k=0}^{A-1} y_{(x_e+k,1)}\, N_{(x_e+k,1)}}}_{\text{Pay in duration}} \qquad \textbf{[26.]}$$

## 2.4. Obtención de la expresión del TD como diferencia de las edades promedio ponderadas de los pensionistas y cotizantes.

Las expresiones obtenidas hasta el momento son la base para determinar el TD en función de las edades de los colectivos de cotizantes y pensionistas, lo que posibilitará el cálculo de los valores representativos de las partidas del activo por cotizaciones del sistema y, por comparación con el pasivo, la obtención de indicadores de solvencia. La edad promedio ponderada a la que se deja de cotizar por la contingencia de invalidez, es

$$\bar{x}_t^I = x_e - 1 + \bar{k}_t^I = \frac{\sum_{k=1}^{A} P^I_{(x_e+k,1)} \cdot I^N_{(x_e+k,1)} \cdot {}^I\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+k} \cdot (x_e+k-1)}{\sum_{k=1}^{A} P^I_{(x_e+k,1)} \cdot I^N_{(x_e+k,1)} \cdot {}^I\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+k}} \qquad \textbf{[27.]}$$

y para la contingencia de jubilación la determinación de la edad promedio de entrada en la jubilación no necesita mayor cálculo ya que se asume la hipótesis de que hay una única edad de jubilación, $x_e$+A, y se deja de cotizar por esa contingencia un año antes.

Si a la expresión del $TD^I_t$ se le suma y se le resta la edad promedio ponderada a la que se deja de cotizar por la contingencia de invalidez, el TD puede expresarse como la diferencia entre la edad promedio ponderada de los jubilados de invalidez y la edad promedio ponderada de los cotizantes:

$$TD_t^I = \left(pt_r^{I1} + pt_r^{I2}\right) + pt_c^I = \overbrace{\bar{x}_t^I + \left(pt_r^{I1} + pt_r^{I2}\right)}^{A_r^I} - \underbrace{\left(\bar{x}_t^I - pt_c^I\right)}_{A_c^I} \qquad \textbf{[28.]}$$

El pay-in puede tener un valor negativo en la contingencia de invalidez si la edad promedio ponderada a la que se deja de cotizar por la contingencia de invalidez es inferior a la edad promedio ponderada de los cotizantes. Es difícil, pero podría ocurrir.

Por su parte, si se agrega el primer sumando (edad promedio ponderada a la que se deja de cotizar por la contingencia de invalidez,) con el segundo y tercer sumandos (pay-out), la expresión del TD de invalidez se puede formular en función de la diferencia entre las edades promedio de los perceptores de prestaciones por invalidez, por agregación de los dos primeros sumandos, y de la edad promedio de los cotizantes:

$$TD_t^I =$$

$$\left.\left(x_e + \bar{k}_t^I - 1\right) + \frac{\left(\begin{array}{c} \sum_{k=1}^{A} k \cdot \left( \sum_{h=1}^{k} P^I_{(x_e+h,1)} \cdot I_{(x_e+h,1)} \left[\frac{(1+\lambda)}{(1+G)}\right]^{k-h} {}_{k-h}p^I_{x_e+h} \right) \\ + \\ \sum_{k=1}^{w-x_e-A-1} (A+k)\cdot \left( \sum_{h=1}^{A} P^I_{(x_e+h,1)} \cdot I_{(x_e+h,1)} \left[\frac{(1+\lambda)}{(1+G)}\right]^{A+k-h} {}_{A+k-h}p^I_{x_e+h} \right) \end{array}\right)}{\sum_{k=1}^{A} P^I_{(x_e+k,1)} \cdot I^N_{(x_e+k,1)} \cdot {}^I\ddot{a}^{\lambda}_{x_e+k}}\right\} = A_r^I$$

$$- \qquad \textbf{[29.]}$$

$$\left.\left( \frac{\sum_{k=0}^{A-1} N_{(x_e+k,1)} \cdot y_{(x_e+k,1)} \cdot (x_e + k)}{\sum_{k=0}^{A-1} N_{(x_e+k,1)} \cdot y_{(x_e+k,1)}} \right)\right\} = A_c^I$$

El segundo sumando de $A_r^I$ no es más que un promedio ponderado de los años que llevan percibiendo la pensión de invalidez los inválidos de edades comprendidas en el tramo $[x_e+1,\ x_e+A]$ y los comprendidos en el tramo $[x_e+A+1,\ w-1]$.

Vidal-Meliá y Boado-Penas (2013) obtienen las expresiones equivalentes para el caso de jubilación:

$$TD_t^R = \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{w-x_e-A-1} N_{(x_e+A+k,1)} (x_e + A + k) \left[\frac{1+\lambda}{1+G}\right]^k}{\sum_{k=0}^{w-x_e-A-1} N_{(x_e+A+k,1)} \left[\frac{1+\lambda}{1+G}\right]^k}}_{A_r^t} - \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{A-1} y_{(x_e+k,1)} N_{(x_e+k,1)} (x_e + k)}{\sum_{k=0}^{A-1} y_{(x_e+k,1)} N_{(x_e+k,1)}}}_{A_c^t} = A_r^R - A_c^R \qquad \textbf{[30.]}$$

### 2.5. Obtención del TD y Activo por cotizaciones del sistema como ponderación de los TDs y Activos por cotizaciones de cada una de las contingencias. Formulación del balance actuarial.

Determinado el TD correspondiente a cada contingencia, es el momento de formular el TD del sistema, que deriva de la ponderación de las diversas contingencias que contiene el mismo. El punto de partida para obtener la expresión es el valor de los compromisos del sistema con cotizantes y pensionistas para las dos contingencias:

$$TD_t^S=\frac{V_t^S}{C_t^S}=\frac{{}^{I}V_t^T+{}^{R}V_t^T}{C_t^R+C_t^I}=\frac{{}^{I}V_t^r+{}^{I}V_t^c+{}^{R}V_t^r+{}^{R}V_t^c}{\theta^I\cdot\left((1+G)^{t-1}\cdot\sum_{k=0}^{A-1}y_{(x_e+k,1)}N_{(x_e+k,1)}\right)+\theta^R\cdot\left((1+G)^{t-1}\cdot\sum_{k=0}^{A-1}y_{(x_e+k,1)}N_{(x_e+k,1)}\right)}=$$

$$=\underbrace{\frac{\overbrace{{}^{I}V_t^r+{}^{R}V_t^r}^{\text{valor actual total pensiones causadas}}}{(\theta^I+\theta^R)\cdot\left((1+G)^{t-1}\cdot\sum_{k=0}^{A-1}y_{(x_e+k,1)}N_{(x_e+k,1)}\right)}}_{pt_r^S}+\underbrace{\frac{\overbrace{{}^{I}V_t^c+{}^{R}V_t^c}^{\text{pasivo total con los cotizantes actuales}}}{(\theta^I+\theta^R)\cdot\left((1+G)^{t-1}\cdot\sum_{k=0}^{A-1}y_{(x_e+k,1)}N_{(x_e+k,1)}\right)}}_{pt_c^S}$$

**[31.]**

El denominador del TD del sistema, gasto total en pensiones del sistema, se puede expresar por $PT^S_t= PT^I_t+ PT^R_t$. Si se ponderan los TDs de las contingencias de invalidez y jubilación $\{TD_t^I, TD_t^R\}$ por el gasto total en pensiones correspondiente a las mismas respecto al gasto total en pensiones del sistema y dado que los denominadores de $\{TD_t^I, TD_t^R\}$ son respectivamente $\{PT^I, PT^R\}$, se obtiene:

$$TD_t^S=\frac{PT_t^I\cdot TD_t^I+PT_t^R\cdot TD_t^R}{PT_t^S}=\frac{PT_t^I\cdot\frac{NTD_t^I}{PT_t^I}+PT_t^R\cdot\frac{NTD_T^R}{PT_t^R}}{PT_t^S}=\frac{NTD_t^I+NTD_t^R}{PT_t^S}\qquad\textbf{[32.]}$$

expresión en la que el numerador es la suma de los numeradores de los TDs de invalidez y jubilación

$$NTD_t^S=NTD_t^I+NTD_t^R\qquad\textbf{[33.]}$$

y el denominador es el gasto total en pensiones del sistema, coincidiendo con la definición del TD del sistema y concluyendo que puede calcularse como una media ponderada de los TDs de ambas contingencias, siendo la ponderación el gasto en pensiones por contingencia respecto del gasto total.

Al igual que sucede con los TDs de las contingencias, el TD del total del sistema debe estar también en función de la diferencia entre las edades promedio del total de los beneficiarios por ambas contingencias y de la edad promedio de los cotizantes.

$$TD_t^S = \frac{PT_t^I \cdot \left[A_r^I - A_c^I\right] + PT_t^R \cdot \left[A_r^R - A_c^R\right]}{PT_t^S} = \\ = \frac{PT_t^I \cdot A_r^I + PT_t^R \cdot A_r^R}{PT_t^S} - \frac{PT_t^S \cdot A_c}{PT_t^S} = \frac{PT_t^I \cdot A_r^I + PT_t^R \cdot A_r^R}{PT_t^S} - A_c \qquad \textbf{[34.]}$$

Obteniéndose como diferencia entre la media ponderada de las edades promedio de invalidez y jubilación, siendo las ponderaciones a su vez el gasto en pensiones por contingencia respecto del gasto total, y la edad promedio de los cotizantes.

Todos los desarrollos anteriores permiten definir el "Activo por cotizaciones del sistema" como el máximo pasivo que se puede financiar en el largo plazo para la tasa de cotización determinada para las contingencias del sistema sin requerir aportaciones extraordinarias del promotor. Analíticamente se puede expresar como:

$$AC_t^S = AC_t^R + AC_t^I = TD_t^S \cdot C_t^S = (A_r^S - A_c^S) \cdot C_t^S = (pt_r^S + pt_c^S) \cdot C_t^S = TD_t^R \cdot C_t^R + TD_t^I \cdot C_t^I = \\ = (pt_r^R + pt_c^R) \cdot C_t^R + (pt_r^I + pt_c^I) \cdot C_t^I = (A_r^R - A_c^R) \cdot C_t^R + (A_r^I - A_c^I) \cdot C_t^I = V_t^S = {}^I V_t^T + {}^R V_t^T \qquad \textbf{[35.]}$$

El balance actuarial de este sistema actuarialmente equilibrado puede expresarse tal y como se muestra en la Tabla1:

| **Tabla 1: Balance actuarial del sistema actuarialmente equilibrado.** | |
|---|---|
| **ACTIVOS** | **PASIVOS** |
| Activo por cotizaciones de invalidez= $AC_t^I$ | Pasivo con pensionistas por Invalidez= ${}^I V_t^r$ |
| | Pasivo con cotizantes por Invalidez= ${}^I V_t^c$ |
| Activo por cotizaciones de jubilación= $AC_t^R$ | Pasivo con pensionistas por jubilación= ${}^R V_t^r$ |
| | Pasivo con cotizantes por jubilación= ${}^R V_t^c$ |
| **Suma del Activo=** $AC_t^S$ | **Suma del Pasivo=** $V_t^S$ |

en el que el índice de solvencia es 1, ya que los activos y los pasivos del sistema casan perfectamente, y se puede afirmar que razonablemente los cotizantes y pensionistas tienen expectativas fundadas de cobrar las pensiones prometidas si las condiciones económicas, financieras, demográficas y legislativas se mantienen sin cambio. Sin embargo, la realidad del sistema en la práctica conformaría un balance actuarial en el que aparecerían, o podrían aparecer, otros elementos: Activos financieros consecuencia de la acumulación de superavits de tesorería; Pasivos financieros consecuencia de la acumulación de déficits de tesorería, déficits actuariales consecuencia de la acumulación de pérdidas actuariales, o superávits actuariales consecuencia de la acumulación de beneficios actuariales. El beneficio o pérdida actuarial del sistema, que no debe confundirse con el déficit o superávit de tesorería, se determina al comparar activos y pasivos del sistema en dos períodos consecutivos, y el índice de solvencia real debe considerar estos elementos a efectos de advertir la aparición de desequilibrios.

Por último, el modelo posibilita obtener una cuenta de resultados por contingencias con lo que se enriquece la información sobre las fuentes que pueden originar los futuros desequilibrios financieros del sistema y facilita la fijación de las tasas de cotización que se deberían aplicar para cada una de las contingencias[4].

## 3. EJEMPLO NUMÉRICO

Se parte del ejemplo desarrollado en Vidal-Meliá y Boado-Penas (2013), en el que se muestra la población cotizante y pensionista por edades y su estructura de cotizaciones (salarios) y una estructura madura de pensiones, bajo el supuesto de que g crece al 1% anual acumulativo y la población lo hace al 2% anual acumulativo, la pensión que causan los pensionistas de 65 años es el 80% de las cotizaciones de los últimos 40 años, los cotizantes se incorporan al sistema a la edad de 25 años, y es contante en términos reales ($\lambda$=0%)).

Bajo estas condiciones, la Tabla 2 recoge los principales valores que configuran el equilibrio del nuevo sistema y su comparación con el anterior.

[4] Los resultados dependen principalmente de las variaciones financieras anuales (superávit os déficits de tesorería, rendimiento de los activos financieros y costes de los pasivos), de la evolución de factores económicos (cotizantes, bases de cotización, estructura de la actividad económica que influye en las tasas de invalidez), de factores demográficos (longevidad de los distintos colectivos) y de las reglas del sistema de pensiones.

| **Tabla 2: Valores seleccionados del sistema con dos contingencias. Comparación con el escenario base obtenido en el trabajo de Vidal-Meliá y Boado-Penas (2013).** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Conceptos** | **Base*** | **Jubilación + Invalidez** | | |
| | **Jubilación** | **Jubilación** | **Invalidez** | **Sistema** |
| $\theta$ | 0,16511 | 0,12461 | 0,05297 | 0,17758 |
| **rf** | 0,743 | 0,752 | 0,581 | 0,691 |
| **rd** | 0,222 | 0,166 | 0,091 | 0,257 |
| $A_r$ **(años)** | 73,316 | 73,316 | 64,890 | 70,802 |
| $A_c$ **(años)** | 45,724 | 44,954 | 44,954 | 44,954 |
| $TD_t$ **(años)** | 27,592 | 28,362 | 19,936 | 25,849 |
| $\bar{x}_t$ **(años)** | 64,000 | 64,000 | 54,614 | 61,200 |
| $pt_c$ **(años)** | 18,276 | 19,046 | 9,661 | 16,247 |
| $pt_r$ **(años)** | 9,316 | 9,316 | 10,276 | 9,602 |
| **Escenario base con G=(1,01)(1,02)-1=0,0302** | | | | |

Llama la atención dos aspectos fundamentalmente:

1.-El ligero incremento de la tasa de cotización del conjunto del sistema si se compara con el sistema base, pese a que hay una contingencia nueva. Esto es debido al trasvase de pensionistas que anteriormente se consideraban como jubilados y en el nuevo sistema tienen su origen en la invalidez. En segundo lugar, los inválidos tienen una esperanza de vida menor, lo que rebaja el coste de la contingencia.

Por otra parte, considerar como jubilados a los inválidos que alcanzan la edad de jubilación, fenómeno conocido como "reclasificación de las pensiones", aumenta notablemente el coste aparente de la jubilación. En efecto, si se supone que los inválidos que alcanza o superan la edad normal de jubilación se reclasifican como jubilados, la tasa de cotización asignable a la jubilación aumentaría de 0,12461 a 0,15177 y la de la invalidez se reduciría de 0,05297 a 0,02581. La imagen del sistema en su conjunto no cambiaría, 0,17758, pero habría trasvases poco transparentes entre contingencias al quedar alterado el periodo medio de maduración de cada una de las contingencias.

2.-La ligera variación del TD del sistema base y el de la contingencia de jubilación en el sistema integrado, ocasionado por el ligero cambio en la edad promedio de los cotizantes al considerar salidas por invalidez. El TD del sistema sí cambia de manera más notable por el efecto de la contingencia de la invalidez, que hace que la edad promedio ponderada en la que se realiza la última cotización sea casi diez años anterior a la de la contingencia de jubilación. Se puede comprobar también que el TD del sistema es un promedio ponderado de los de las contingencias, siendo el elemento de ponderación la tasa de cotización por contingencia.

En la tabla 3 figuran los valores correspondientes a cada una de las partidas que conforman el balance, y en el que se puede apreciar numéricamente el "cuadre" de las distintas masas patrimoniales del sistema que determinan un indicador de solvencia igual a la unidad.

**Tabla 3: Balance actuarial del sistema actuarialmente equilibrado con dos contingencias. Ejemplo numérico.**

| **ACTIVO** | | | **PASIVO** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Partidas** | **Importe** | **%** | **Partidas** | **Importe** | **%** |
| $AC_t^I$ | 879.191,64 | 23,005 | ${}^{I}V_t^r$ | 453.158,65 | 11,858 |
| | | | ${}^{I}V_t^c$ | 426.032,99 | 11,148 |
| $AC_t^R$ | 2.942.507,93 | 76,995 | ${}^{R}V_t^r$ | 966.488,69 | 25,289 |
| | | | ${}^{R}V_t^c$ | 1.976.019,25 | 51,705 |
| $AC_t^S$ | **3.821.699,57** | **100,000** | $V_t^S$ | **3.821.699,57** | **100,000** |
| **Escenario base con G=(1,01)(1,02)-1=0,0302** | | | | | |

## 4. CONCLUSIONES

Un elemento fundamental para mejorar la gestión de los sistemas de pensiones y acercar el horizonte de planificación de la autoridad que gobierna el sistema y la de los cotizantes y pensionistas, es la denomina información global (Regúlez-Castillo y Vidal-Meliá (2012)). El instrumento del que derivan los indicadores globales es el denominado como “balance actuarial”, que tiene sus principales manifestaciones en los modelos de “Suecia” y de “EE.UU”.

En este trabajo se ha desarrollado la base teórica para aplicar conjuntamente el balance actuarial modelo de Suecia a las contingencias de jubilación e invalidez en un sistema de reparto de prestación definida, iniciando la posibilidad de evaluar el grado de solvencia desde la perspectiva integrada de las contingencias de jubilación e invalidez que van ligadas y representan un porcentaje muy alto del gasto en pensiones El elemento fundamental que posibilita formular el balance actuarial es el denominado “Activo por cotizaciones del sistema” que resulta ser una media ponderada de los activos por cotizaciones de las dos contingencias que conforman el sistema y que dependen de las estructuras económico-demográficas que alcanzan los colectivos del sistema, cotizantes y pensionistas.

En el ámbito práctico, el ejemplo numérico desarrollado permite abrir un debate sobre la idoneidad de una práctica generalizada realizada por muchas APSS denominada reclasificación de pensiones, fenómeno que enmascara la realidad del sistema ya que imposibilita obtener de manera correcta los resultados actuariales por contingencias y entorpece la realización de proyecciones al “mezclar” dos colectivos (pensionistas de jubilación, y pensionistas de invalidez en edad de jubilación) con tasas de mortalidad diferentes.

Uno de los puntos en los que esta investigación podría extenderse de manera más natural es formulando el balance actuarial para ambas contingencias en sistemas NDCs, integrando una de las particularidades del modelo sueco de cuentas nocionales: el denominado dividendo por supervivencia. La representatividad del mismo aumentaría y reforzaría la legitimidad en la aplicación del MFA al basarse en un indicador de solvencia más fidedigno.

El modelo desarrollado se puede extender/refinar al menos por cuatro vías adicionales por las que podrían discurrir otras investigaciones futuras:

1.-Considerar diversos grados de invalidez y/o considerar la posibilidad del retorno a la actividad.

2.-Extender el modelo (balance actuarial) con la incorporación de la contingencia de viudedad y/o contingencias de supervivientes lo que permitiría incluir prácticamente la totalidad del gasto en pensiones en los sistemas de prestación definida.

3.- Extender el modelo (balance actuarial) con la incorporación de la dependencia como una contingencia contributiva tal y como se ofrece desde mediados de los años noventa del pasado siglo en el sistema de pensiones contributivo de Alemania.

4.- Considerar un modelo de valoraciones actuariales estocásticas en lugar de valoraciones actuariales deterministas, bien mediante aproximación analítica (Iyer (2008)), o bien a través de modelos de simulación (Buffin (2007) y OACT (2009)).

## 5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


- ACTUARIAL AFFAIRS DIVISION, PENSION BUREAU AAD (2009), "Summary of the 2009 Actuarial Valuation of the Employees' Pension Insurance and the National Pension". Ministry of Health, Labour and Welfare, http://www.mhlw.go.jp/english/org/policy/p36-37a.html
- BOADO-PENAS, C, VALDÉS-PRIETO, S. y VIDAL-MELIÁ, C. (2008). "An Actuarial Balance Sheet for Pay-As-You-Go Finance: Solvency Indicators for Spain and Sweden". Fiscal Studies, 29, pp. 89-134.
- BOADO-PENAS, C. y VIDAL-MELIÁ, C. (2012). "The Actuarial Balance of the Pay-As-You-Go Pension System: the Swedish NDC model versus the US DB model". Chapter 14 in Holzmann, R., E. Palmer and D. Robalino. 2012, eds. NDC Pension Schemes in a Changing Pension World, Volume 2: Gender, Politics, and Financial Stability. The World Bank & Swedish Social Insurance Agency, Washington D.C.
- BOARD OF TRUSTEES, FEDERAL OLD-AGE AND SURVIVORS INSURANCE AND DISABILITY INSURANCE TRUST FUNDS (BOT) (2010). 2009 Annual Report. Government Printing Office, Washington, D.C. http://www.ssa.gov/oact/pubs.html
- BUFFIN, K.G. (2007). "Stochastic projection methods for social security systems". PBSS Colloquium, International Actuarial Association, Helsinki.
- ELO, K., KLAAVO, T., RISKU, I. y SIHVONEN, H. (2010), "Statutory Pensions in Finland. Long-term projections 2009". Finnish Centre for Pensions, Reports 2010, 6. http://www.etk.fi/en/service/home/770/publications
- GOVERNMENT ACTUARY'S QUINQUENNIAL REVIEW OF THE NATIONAL INSURANCE FUND AS AT APRIL 2005 GAD (2010). HMSO, London. http://www.gad.gov.uk/services/Social%20Security/UK_social_security.html

- GRONCHI, S. y NISTICÒ, S. (2008). "Theoretical Foundations of Pay-as-You-Go Defined-Contribution Pension Schemes". Metroeconomica, 59, pp. 131-159.
- IYER, S. (2008). "Stochastic Actuarial Modelling of a Defined-Benefit social security pension Scheme: An Analytical Approach". Annals of Actuarial Science, 3(1-2), pp. 127-185.
- OFFICE OF THE CHIEF ACTUARY (OACT) SOCIAL SECURITY ADMINISTRATION (2009). Long-Range OASDI Projection Methodology. http://www.ssa.gov/oact/pubs.html
- OFFICE OF THE SUPERINTENDENT OF FINANCIAL INSTITUTIONS CANADA (OSFIC) (2012). "Measuring the Financial Sustainability of the Canada Pension Plan". Actuarial study nº 10. Office of the Chief Actuary. http://www.osfi-bsif.gc.ca
- REGÚLEZ-CASTILLO, M. y VIDAL-MELIÁ, C. (2012). "Individual pension information. Recommendations for the case of Spain based on the experiences of other countries". International Social Security Review, 65 (2), pp. 1-27.
- SETTERGREN, O. (2001). "The Automatic Balance Mechanism of the Swedish Pension System – a non-technical introduction". Wirtschaftspolitische Blätter, 4/2001, pp. 339-349.
- SETTERGREN, O. y MIKULA, B.D. (2005). "The rate of return of pay-as-you-go pension systems: a more exact consumption-loan model of interest". The Journal of Pensions Economics and Finance, 4 (2), pp. 115–138.
- THE SWEDISH PENSION SYSTEM (2011). Orange Annual Report 2010. Ed. Gudrun Ehnsson, Swedish Pensions Agency (Pensionsmyndigheten), Stockholm. http://www.pensionsmyndigheten.se/Publications_en.html
- VENTURA-MARCO, M. y VIDAL-MELIÁ, C. (2012). "An Actuarial Balance Model for DB PAYG Pension System with Disability and Retirement Contingencies". SSRN: http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2064502
- VIDAL-MELIÁ, C. y BOADO-PENAS, M.C. (2013). "Compiling the actuarial balance for pay-as-you-go pension systems. Is it better to use the hidden asset or the contribution asset?". Applied Economics, 45, 10, pp. 1303-1320.
- VIDAL-MELIÁ, C., BOADO-PENAS, M.C. y SETTERGREN, O. (2010). "Instruments for Improving the Equity, Transparency and Solvency of Pay-As-You-Go Pension Systems: NDCs, ABs and ABMs". Chapter 18 in M. Micocci, G. N. Gregoriou and G. B. Masala, eds., Pension Fund Risk Management. Financial and Actuarial Modelling. Chapman & Hall/CRC Finance Series.
- VIDAL-MELIÁ, C., BOADO-PENAS, M.C. y SETTERGREN, O. (2009). "Automatic Balance Mechanisms in Pay-As-You-Go Pension Systems". The Geneva Papers on Risk and Insurance: Issues and Practice, 33, 4, pp. 287-317.