

Sobre el uso de un algoritmo híbrido para la regulación óptima de los semáforos de un cruce en A Coruña e impacto medioambiental

Pedreira Andrade, Luís Pedro [lucky@udc.es]
*Dpto. Economía Aplicada II
Universidade da Coruña*

Villamil Serrano, Armando [avillamil@ub.edu]
*Dpto. Política Económica y Estructura Económica Mundial
Universidad de Barcelona*

Bouza Allende, Gemayqzel [gema@matcom.uh.cu]
Allende Alonso, Sira [sira@matcom.uh.cu]
Universidad de La Habana (La Habana-Cuba)

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es resolver un problema de control óptimo que consiste en asignar tiempos a las luces de los ocho semáforos (seis fases en cada ciclo) que regulan un cruce de dos calles con los dos sentidos de circulación (con dos o más carriles en cada sentido) situado en la ciudad de A Coruña en el que existen frecuentes embotellamientos, con el fin de conseguir disminuir el largo de las colas, los tiempos de espera, el consumo de carburantes y la contaminación ambiental. El criterio de comparación se expresa en una función objetivo a minimizar que puede ser: longitud media de las colas, cantidad de vehículos en el peor de los casos, tiempo medio de espera, una combinación de las anteriores, entre otras posibilidades. Así obtenemos un modelo tipo problema de optimización con restricciones de complementariedad lineal. Para su solución, proponemos usar un método híbrido que combina una heurística, basada en la metaheurística de recocido simulado con un algoritmo quasi-Newton para problemas de optimización no suaves.

ABSTRACT

The objective of this paper is to solve the problem of finding the switch times of eight traffic lights (six phases in each cycle) that regulate an intersection of two two-ways streets (with two or more lanes in each direction) in the city of Corunna which suffer from frequent congestions, in order to reduce the length of the queues, waiting times, fuel consumption and environmental pollution. The criterion used for comparison is shown by minimizing the objective function which can be by: the average length of the queues, the number of vehicles at the worst queue, average waiting time, a combination. The resulting model is an optimization problem with linear complementarity constraints. In order to solve it, we propose a hybrid solution strategy where an approximation to the solution is computed by means of a simulated annealing algorithm and then it is improved by a quasi-Newton method for non-smooth optimization problems.

Palabras clave:

Control óptimo de semáforos; recocido simulado; método quasi-Newton; método híbrido; impacto medioambiental.

Área temática: Optimización

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la mayor parte de las ciudades del mundo muestran serios problemas de congestión de tráfico en sus carreteras, provocados por la demanda de tránsito cada vez más alta frente a la insuficiente capacidad vial. Los efectos de esta congestión son el mayor consumo de combustible, mayores tiempos de viaje, mayor contaminación, entre otros. Se puede abordar esta problemática desde diferentes perspectivas, una de las cuales es la gestión de los semáforos con el fin de tener una óptima capacidad de las vías. El problema radica en hallar un sistema que controle estos semáforos de manera adecuada, en especial en los casos en los que las rutas se encuentran fuertemente congestionadas.

En este trabajo se proponen un modelo y un método para encontrar un sistema de control óptimo para los semáforos que regulan un cruce con embotellamientos frecuentes en la ciudad de A Coruña, haciendo uso de una heurística basada en la metaheurística de recocido simulado y un algoritmo tipo quasi-Newton. Se busca que tras la aplicación del método (para una gran cantidad de casos y bajo los sistemas de restricción de tránsito reales) se puedan obtener sucesiones de tiempos para las luces de los semáforos que permitan que éstos funcionen de manera coordinada y que rebasen la intersección un gran número de vehículos, llegando así a reducir los tiempos de espera y el largo de las colas. También se busca que el modelo propuesto sirva de base para enfocar problemas similares y para crear mejores métodos.

Por otro lado, queremos poner de relieve como, en la solución de ese problema de control, subyace una cuestión medioambiental relacionada con la necesidad de regular el tráfico racionalmente, con el fin de reducir las emisiones de gases de efecto invernadero. Como es bien sabido, éstos generan impactos medioambientales provocadores del cambio climático cuyos efectos nocivos ya se dejan traslucir. Al hablar de la regulación del tráfico estamos centrados en una parcela muy importante relacionada con el transporte en general y, en concreto, al aludir a la coordinación en el uso de los semáforos, siguiendo las directrices de esta investigación, nos referimos a la necesidad de realizar revisiones en los proyectos de inversión aplicados a la

planificación del transporte (tanto público como privado), cuestión ésta que corresponde a las autoridades públicas.

Si de verdad queremos alcanzar una plena sostenibilidad en el transporte, hemos de someternos a tres retos:

1. Que las emisiones de gases de efecto invernadero, producidas por el transporte, crezcan a un ritmo inferior al crecimiento del Producto Interior Bruto.
2. Aplicar unas tecnologías verdes al transporte que supongan una ayuda a la disminución de gases y ruidos.
3. Reducir los costes externos del transporte que, a través de los impactos medioambientales, originan accidentes, atascos, congestión del tráfico, ruidos e incluso, desde el punto de vista de la salud pública, una disminución de las enfermedades crónicas por exposición a la contaminación atmosférica (partículas en suspensión, etc.).

Por ello, la implantación del sistema de regulación de semáforos que proponemos, ha de constituir uno de los instrumentos que, uniéndose a otros, sirvan para mitigar las deseconomías externas que el tráfico rodado y su mala regulación generan sobre el cambio climático.

Los resultados están organizados así: en la próxima sección se presenta una descripción del cruce de la avenida de Arteixo con la Ronda de Outeiro en la ciudad de A Coruña (número de carriles y de semáforos, sentidos de circulación, etc.), se hace hincapié en los motivos que provocan las retenciones de tráfico (proximidad de centros comerciales, polígonos industriales, vías de acceso y salida de la ciudad, doble fila, pasos de peatones, etc.) y en la regulación de los semáforos fijada por las autoridades de tráfico. A continuación se expone un modelo matemático para dicho problema en el cual los tiempos de las luces son variables, pero sólo dependen de los flujos de llegada, análogo al formulado en [Pedreira, L. et al. (2012)] como variante del de [de Schutter, B. and de Moor, B. (1998)] pero para seis fases en cada ciclo. En la siguiente se detalla nuestra propuesta de solución: un algoritmo híbrido que combina una heurística basada en la metaheurística de recocido simulado con un algoritmo tipo quasi-Newton para

problemas de optimización no suaves. A continuación se muestran algunos resultados numéricos obtenidos mediante la programación con MATLAB de dicha estrategia y se comparan con los resultados que se dan en la realidad mediante la regulación diseñada por las autoridades de tráfico y para finalizar se enumeran algunas conclusiones y líneas futuras de investigación.

2. CRUCE DE LA AVENIDA DE ARTEIXO CON LA RONDA DE OUTEIRO EN LA CIUDAD DE A CORUÑA

El cruce de la avenida de Arteixo con la ronda de Outeiro de la ciudad de A Coruña (ver figura 1) es una intersección a la que confluyen dos calles, ambas doble vía (con 2, 3 ó 4 carriles en cada sentido de circulación) en las que se puede circular de frente, girar a derecha e izquierda. En cada sentido, antes de rebasar el cruce hay dos semáforos, por tanto es un cruce con ocho semáforos. Los semáforos T_1 , T_3 , T_5 y T_7 permiten seguir de frente o girar a la derecha, y los semáforos T_2 , T_4 , T_6 y T_8 sólo permiten girar a la izquierda. Con nuestro modelo y algoritmo solución se quieren hallar los períodos en que deben permanecer en verde o rojo las luces de los semáforos T_i , $i=1, \dots, 8$ para evitar la congestión de las vías, descrita por el número de vehículos en espera (longitud de la cola) en cada vía (se consideran las longitudes de las colas como variables continuas). Para ello se usan distintos criterios: la suma de las longitudes medias de las colas de cada vía, longitud de la cola más larga, tiempo medio de espera o una combinación de ellas. Basándonos en la coordinación de los semáforos establecida por las autoridades de tráfico (a ciclo fijo), hemos de modelar y resolver un problema que en cada ciclo tiene seis fases:



Figura 1

En la **primera fase** (ver figura 2) los semáforos T_1 y T_2 situados en la Ronda de Outeiro están en verde (los demás semáforos están en rojo), por tanto los vehículos que circulan por dicha Ronda (por los carriles L_1' , L_1'' y L_2), rebasan el cruce siguiendo de frente o giran a la derecha o a la izquierda hacia la avenida de Arteixo.

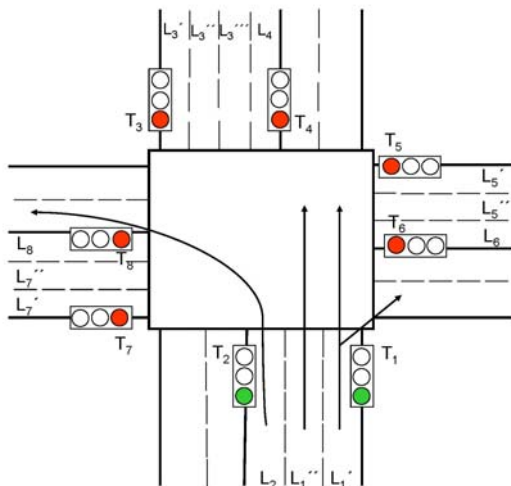


Figura 2

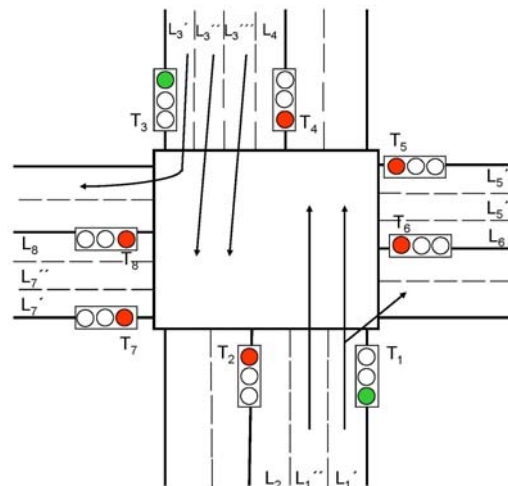


Figura 3

En la **segunda fase** (ver figura 3) el semáforo T_1 sigue en verde (T_2 ha cambiado de verde a rojo), por tanto siguen rebasando el cruce (para continuar de frente o girar a la derecha) los vehículos que circulan por los carriles L_1' y L_1'' . T_3 cambia de rojo a

verde, permitiendo a los vehículos situados en los carriles $L_{3''}$ y $L_{3'''}$ iniciar la marcha por la Ronda de Outeiro en sentido hacia la salida de la ciudad y a los situados en el carril $L_{3'}$ girar a la derecha hacia la avenida de Arteixo.

En la **tercera fase** (ver figura 4) el semáforo T_3 sigue en verde (T_1 ha cambiado de verde a rojo), por tanto siguen rebasando el cruce (para continuar de frente o girar a la derecha) los vehículos que circulan por los carriles $L_{3'}$, $L_{3''}$ y $L_{3'''}$. T_4 cambia de rojo a verde, por tanto los vehículos que estaban esperando en el carril L_4 rebasan el cruce girando a la izquierda hacia la avenida de Arteixo.

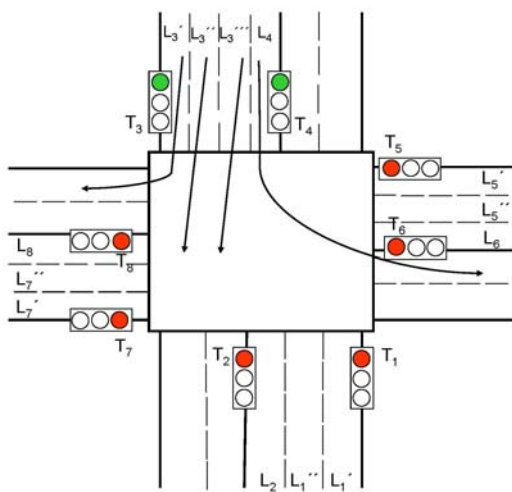


Figura 4

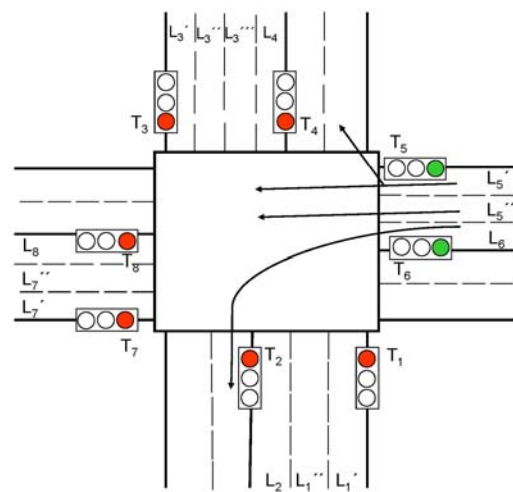


Figura 5

En la **cuarta fase** (ver figura 5) los semáforos T_5 y T_6 situados en la avenida de Arteixo cambian de rojo a verde (T_3 y T_4 cambian de verde a rojo), por tanto los vehículos que circulan por dicha avenida (por los carriles $L_{5'}$, $L_{5''}$ y L_6) rebasan el cruce siguiendo de frente o giran a la derecha o a la izquierda hacia la Ronda de Outeiro.

En la **quinta fase** (ver figura 6) el semáforo T_5 sigue en verde (T_6 ha cambiado de verde a rojo), por tanto siguen rebasando el cruce (para continuar de frente o girar a la derecha) los vehículos que circulan por los carriles $L_{5'}$ y $L_{5''}$. T_7 cambia de rojo a verde, permitiendo a los vehículos situados en los carriles $L_{7'}$ y $L_{7''}$ iniciar la marcha por la avenida de Arteixo en sentido hacia el centro de la ciudad, o girar a la derecha hacia la Ronda de Outeiro.

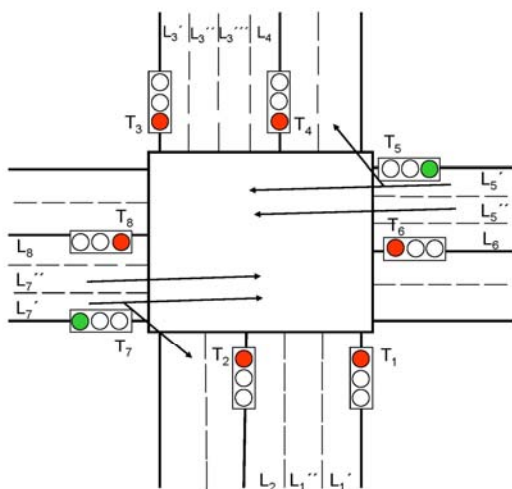


Figura 6

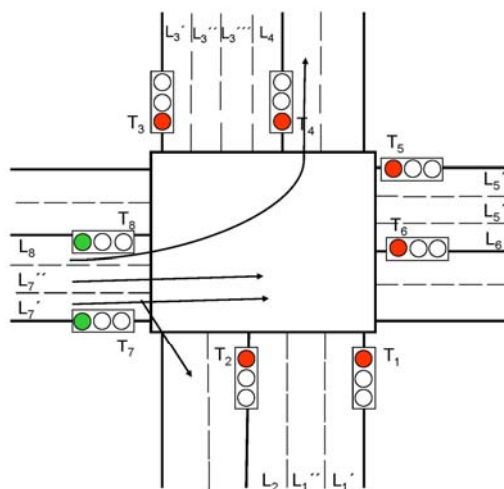


Figura 7

En la **sexta fase** (ver figura 7) el semáforo T₇ sigue en verde (T₅ ha cambiado de verde a rojo), por tanto siguen rebasando el cruce (para continuar de frente o girar a la derecha) los vehículos que circulan por los carriles L₇' y L₇''. T₈ cambia de rojo a verde, por tanto los vehículos que estaban esperando en el carril L₈ rebasan el cruce girando a la izquierda hacia la Ronda de Outeiro.

Los tiempos de luz verde que rigen los semáforos de la intersección son: para los semáforos T₂, T₄, T₆ y T₈ que permiten el giro a la izquierda es de 10s, para los semáforos T₁ y T₃ que permiten la circulación por la Ronda de Outeiro o giro a la derecha, es de 40s y para los semáforos T₅ y T₇ que permiten la circulación por la avenida de Arteixo o giro a la derecha es de 25s. Por tanto la duración de las fases es: primera fase 10s, segunda fase 30s, tercera fase 10s, cuarta fase 10s, quinta fase 15s y sexta fase 10s. Como consecuencia la duración del ciclo completo es de 85s, tiempo que está según se indica en [Sánchez-Toscano Barbero, J.] dentro del rango que se acomoda a la mentalidad del conductor.

Los embotellamientos en este cruce son debidos a que se trata de una intersección con mucha densidad de circulación durante todo el día y fundamentalmente en horas punta, ya que absorbe el tráfico de entrada y salida de la ciudad en dos direcciones diferentes y el tráfico de entrada y salida de un polígono industrial en donde se encuentra una de las superficies comerciales más grandes de España. Además y

debido a la proximidad de viviendas, en muchas ocasiones hay coches en doble fila que provocan problemas en la circulación por los carriles situados a la derecha. Otros problemas surgen por la mala colocación en las vías de los vehículos que pretenden realizar un determinado movimiento al llegar al cruce. Debido a todo ello, se ha podido observar que en ciertos intervalos de tiempo, se produce una pequeña variación en la duración de las fases, ya que, los vehículos que circulan por la Ronda de Outeiro lo hacen durante 50s y los que circulan por la avenida de Arteixo, durante 40s. Por tanto la duración del ciclo completo sería, en este caso, de 110s tiempo que también está dentro del rango que se acomoda a la mentalidad del conductor [Sánchez-Toscano Barbero, J.].

3. MODELACIÓN DEL PROBLEMA

En esta sección presentamos un modelo matemático para el problema de control de tráfico en un cruce con las características del de la sección anterior. Para que el modelo sea más sencillo, sin pérdida de generalidad, se pueden considerar dos carriles en cada sentido de circulación (uno para continuar de frente o girar a la derecha y otro para girar hacia la izquierda), de ahí que en las figuras 8, 9, 10, 11, 12 y 13 (que representan los movimientos en cada una de las seis fases del ciclo) se nombren con subíndice par (L_2, L_4, L_6 y L_8) los carriles por los que se circula para girar hacia la izquierda, y con subíndice impar (L_1, L_3, L_5 y L_7) los carriles por los que se circula de frente o se gira hacia la derecha.

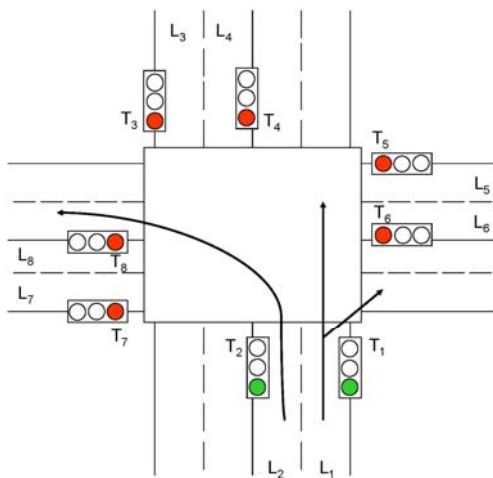


Figura 8

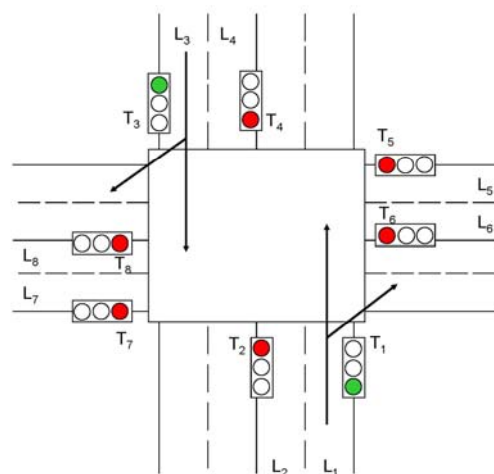


Figura 9

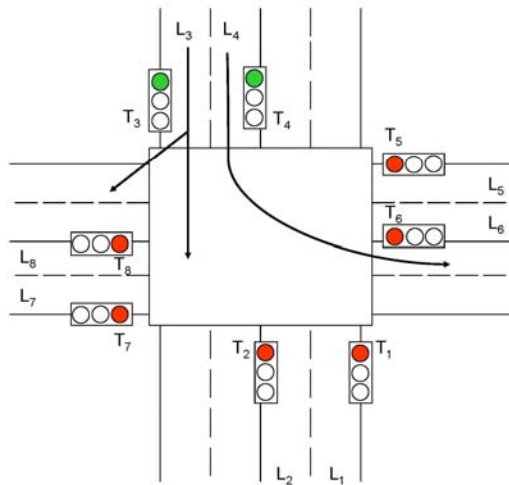


Figura 10

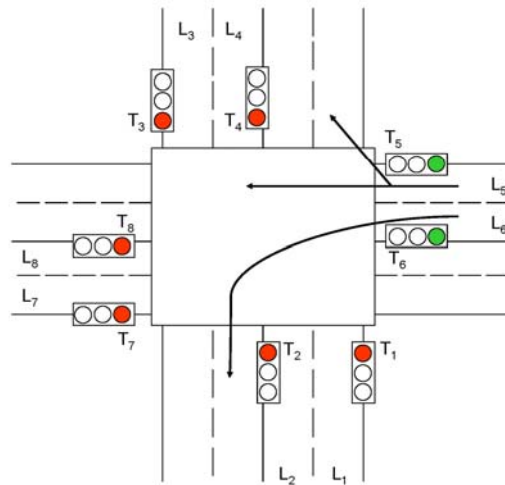


Figura 11

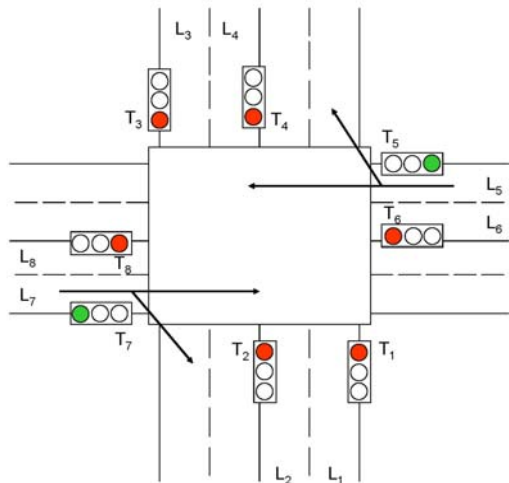


Figura 12

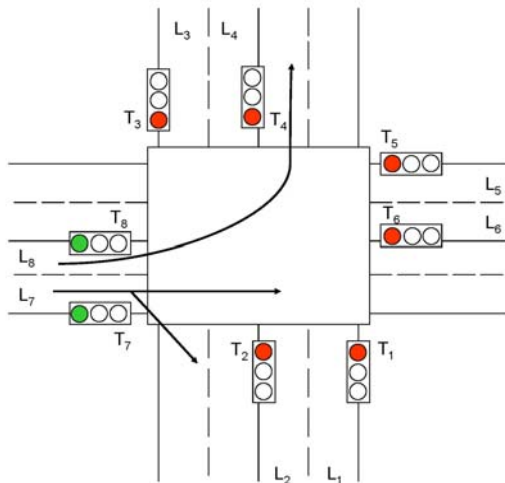


Figura 13

El ciclo comienza al principio de las luces verde de los semáforos T_1 y T_2 y acaba al final de sus luces rojas.

Datos: N es el número de veces que los semáforos tienen la luz verde (es un entero dado), δ_{amb} es el tiempo de duración de la luz ámbar (3s), $\delta_{min.verde,i}$, $\delta_{max.verde,i}$ son (respectivamente) las cotas mínima y máxima de duración de la luz en la fase i ; $i=1, \dots, 6$, en cada ciclo.

Variables: Describimos el problema *con las variables de control* δ_k tiempo de duración de la luz verde en el k -ésimo cambio de luz (incluyendo el ámbar), es decir,

duración de la k-ésima fase y las variables de estado $x_k=(x_{k1},x_{k2},x_{k3},x_{k4},x_{k5},x_{k6},x_{k7},x_{k8})^t$, cantidad promedio de vehículos en los carriles $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_8$ en el momento del k-ésimo cambio de luz, es decir, al finalizar la k-ésima fase, $k = 1, \dots, 6N$.

Para cada carril L_j se definen las tasas medias de llegada y salida de los vehículos bajo las luces verde y ámbar y se denotan:

λ_j : tasa media de llegada de vehículos en el carril L_j (dada en vehículos por segundo).

μ_j : tasa media de salida en el carril L_j cuando el semáforo está en verde.

κ_j : tasa media de salida en el carril L_j cuando el semáforo está en ámbar.

Definimos (basándonos en [de Schutter, B. and de Moor, B. (1998)] pero considerando ocho carriles y seis fases en cada ciclo) los vectores $b_i, i=1, \dots, 18$ que representan el número de vehículos en cada carril teniendo en cuenta los movimientos asociados a cada fase:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \begin{bmatrix} \lambda_1 - \mu_1 \\ \lambda_2 - \mu_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 \end{bmatrix}, & b_2 &= \begin{bmatrix} \lambda_1 - \mu_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 - \mu_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 \end{bmatrix}, & b_3 &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 - \mu_3 \\ \lambda_4 - \mu_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 \end{bmatrix}, & b_4 &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 - \mu_5 \\ \lambda_6 - \mu_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 \end{bmatrix}, & b_5 &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 - \mu_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 - \mu_7 \\ \lambda_8 \end{bmatrix}, \\
 b_6 &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 - \mu_7 \\ \lambda_8 - \mu_8 \end{bmatrix}, & b_7 &= \begin{bmatrix} 0 \\ (\mu_2 - \kappa_2)\delta_{amb} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & b_8 &= \begin{bmatrix} (\mu_1 - \kappa_1)\delta_{amb} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & b_9 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\mu_3 - \kappa_3)\delta_{amb} \\ (\mu_4 - \kappa_4)\delta_{amb} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{10} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\mu_6 - \kappa_6)\delta_{amb} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & b_{11} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\mu_5 - \kappa_5)\delta_{amb} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & b_{12} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\mu_7 - \kappa_7)\delta_{amb} \\ (\mu_8 - \kappa_8)\delta_{amb} \end{bmatrix}, \\
 b_{13} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \max((\lambda_2 - \kappa_2)\delta_{amb}, 0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & b_{14} &= \begin{bmatrix} \max((\lambda_1 - \kappa_1)\delta_{amb}, 0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & b_{15} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \max((\lambda_3 - \kappa_3)\delta_{amb}, 0) \\ \max((\lambda_4 - \kappa_4)\delta_{amb}, 0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 b_{16} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \max((\lambda_6 - \kappa_6)\delta_{amb}, 0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & b_{17} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \max((\lambda_5 - \kappa_5)\delta_{amb}, 0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & b_{18} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \max((\lambda_7 - \kappa_7)\delta_{amb}, 0) \\ \max((\lambda_8 - \kappa_8)\delta_{amb}, 0) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 x_{6k+1} &= \max(x_{6k} + b_1\delta_{6k+1} + b_7, b_{13}) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1, \\
 x_{6k+2} &= \max(x_{6k+1} + b_2\delta_{6k+2} + b_8, b_{14}) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1, \\
 x_{6k+3} &= \max(x_{6k+2} + b_3\delta_{6k+3} + b_9, b_{15}) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1, \\
 x_{6k+4} &= \max(x_{6k+3} + b_4\delta_{6k+4} + b_{10}, b_{16}) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1, \\
 x_{6k+5} &= \max(x_{6k+4} + b_5\delta_{6k+5} + b_{11}, b_{17}) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1, \\
 x_{6k+6} &= \max(x_{6k+5} + b_6\delta_{6k+6} + b_{12}, b_{18}) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1,
 \end{aligned}$$

ya que para calcular, por ejemplo, la cantidad promedio de vehículos en cada carril al final de la primera fase de cada ciclo (x_{6k+1}), hemos de usar los vectores b_1 , b_7 y b_{13} , pues en el carril L_1 durante esa fase, la luz del semáforo T_1 está en verde y por tanto sólo hay llegadas y salidas con luz verde, mientras que en el carril L_2 hay llegadas y salidas con luz verde y con luz ámbar y en los demás carriles sólo hay llegadas, pues los respectivos semáforos están en rojo.

El problema de regulación de los semáforos puede representarse a través del siguiente modelo (basándonos en [Pedreira, L. et al (2012)] pero considerando seis fases en cada ciclo):

$$\text{Minimizar } J \tag{1}$$

sujeto a:

$$\delta_{\min.verde,1} \leq \delta_{6k+1} - \delta_{amb} \leq \delta_{\max.verde,1} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1, \tag{2}$$

$$\delta_{\min.verde,2} \leq \delta_{6k+2} - \delta_{amb} \leq \delta_{\max.verde,2} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1, \tag{3}$$

$$\delta_{\min.verde,3} \leq \delta_{6k+3} - \delta_{amb} \leq \delta_{\max.verde,3} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1, \tag{4}$$

$$\delta_{\min.verde,4} \leq \delta_{6k+4} - \delta_{amb} \leq \delta_{\max.verde,4} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1, \tag{5}$$

$$\delta_{\min.verde,5} \leq \delta_{6k+5} - \delta_{amb} \leq \delta_{\max.verde,5} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1, \tag{6}$$

$$\delta_{\min.verde,6} \leq \delta_{6k+6} - \delta_{amb} \leq \delta_{\max.verde,6} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1, \tag{7}$$

$$x_{6k+1} = \max(x_{6k} + b_1 \delta_{6k+1} + b_7, b_{13}) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1, \tag{8}$$

$$x_{6k+2} = \max(x_{6k+1} + b_2 \delta_{6k+2} + b_8, b_{14}) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1, \tag{9}$$

$$x_{6k+3} = \max(x_{6k+2} + b_3 \delta_{6k+3} + b_9, b_{15}) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1, \tag{10}$$

$$x_{6k+4} = \max(x_{6k+3} + b_4 \delta_{6k+4} + b_{10}, b_{16}) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1, \tag{11}$$

$$x_{6k+5} = \max(x_{6k+4} + b_5 \delta_{6k+5} + b_{11}, b_{17}) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1, \tag{12}$$

$$x_{6k+6} = \max(x_{6k+5} + b_6 \delta_{6k+6} + b_{12}, b_{18}) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1. \tag{13}$$

La función J a minimizar puede ser:

- **Suma (ponderada) de las longitudes medias de las colas en todos los carriles**

$$J_1 = \sum_{j=1}^8 w_j \frac{\sum_{i=1}^{6N} x_{ij} \delta_i}{\sum_{i=1}^{6N} \delta_i} \tag{14}$$

- **Longitud (ponderada) media de las colas en el carril con mayores colas**

$$J_2 = \max_j w_j \frac{\sum_{i=1}^{6N} x_{ij} \delta_i}{\sum_{i=1}^{6N} \delta_i} \quad (15)$$

- **Longitud (ponderada) de la cola más larga**

$$J_3 = \max_{i,j} w_j x_{ij} \quad (16)$$

- **Suma (ponderada) de los tiempos medios de espera considerando las colas de todos los carriles**

$$J_4 = \sum_{j=1}^8 \frac{w_j}{\lambda_j} \frac{\sum_{i=1}^{6N} x_{ij} \delta_i}{\sum_{i=1}^{6N} \delta_i} \quad (17)$$

- **Tiempo (ponderado) medio de espera en el carril con mayor tiempo de espera**

$$J_5 = \max_j \frac{w_j}{\lambda_j} \frac{\sum_{i=1}^{6N} x_{ij} \delta_i}{\sum_{i=1}^{6N} \delta_i} \quad (18)$$

donde $w_j > 0$ para todo j . Los factores peso w_j se pueden usar para dar una importancia mayor o peso a algunos carriles.

Se puede analizar una sexta opción que consiste en considerar una combinación de los criterios anteriores. Esto nos lleva a un modelo multi-objetivo que podemos resolver tomando una combinación positiva de las distintas funciones objetivo.

$$J_6 = \sum_{i=1}^5 \alpha_i J_i \quad (19)$$

donde los valores α_i corresponden a los pesos que se les dan a los anteriores criterios.

Como consecuencia de lo anteriormente expuesto, conocido δ (vector de los tiempos de cada luz), la cantidad de autos en cada carril queda determinado mediante las ecuaciones (8) – (9) – (10) – (11) – (12) – (13). Denotamos por $x(\delta)$ la matriz de $6N$ filas y 8 columnas donde $x_{ij}(\delta)$ indica la cantidad de autos en el carril j en el momento del cambio de luz i .

Como habíamos mencionado anteriormente, ya introducimos una aproximación extra al considerar las longitudes de cola continuas. Además, en la práctica, hay también alguna incertidumbre y variación en el tiempo de las tasas de llegada y de salida, lo que hace recomendable obtener una buena aproximación de la solución óptima que sea calculable en un tiempo corto y fácilmente ajustable a los cambios en los valores de los parámetros. De hecho [de Schutter, B. and de Moor, B. (1998)] se trata de un problema de optimización con restricciones de complementariedad lineal (problema NP-duro), que involucra $54N$ variables, $12N$ restricciones suaves y $48N$ no suaves, lo que haría muy costoso la aplicación de un algoritmo iterativo [de Schutter, B. (2002)].

4. PROPUESTA DE SOLUCIÓN

Debido a las dificultades arriba expuestas, se propone un método híbrido de solución. Este algoritmo comienza buscando una buena aproximación a la solución mediante una heurística basada en la metaheurística de recocido simulado y luego se mejora el comportamiento en una vecindad del punto mediante un algoritmo quasi-Newton (método del gradiente discreto) para funciones no suaves.

4.1. Método heurístico basado en la metaheurística de recocido simulado

Algoritmo de búsqueda por entornos con un criterio probabilístico de aceptación de soluciones basado en Termodinámica, que permite movimientos ascendentes para evitar quedar atrapado prematuramente en un óptimo local.

El pseudo-código de este algoritmo para el problema de sincronización de semáforos es:

- 0) Fijar $t_0 > 0$ (temperatura inicial), $0 < \Delta t < I$ (variación de la temperatura). Escoger J_i , $i=1, \dots, 6$, y construir F , función objetivo del problema. Q cantidad de pasos con igual temperatura. T menor temperatura a alcanzar por el sistema.
- 1) Construir un vector δ_0 y la solución $x(\delta_0)$ asociada. $F_{mejor} = F(x(\delta_0), \delta_0)$, $\delta_{mejor} = \delta_0$ temperatura $t=t_0$, $i=0$.
- 2) Mientras $t > T$,
 - 2.1) $q = 1$

2.2) Mientras $q < Q$

2.2.1) Tomar δ un punto vecino de δ_i y hallar $x(\delta)$. Si $F(x(\delta), \delta) < F_{mejor}$, $\delta_{i+1} = \delta$, $\delta_{mejor} = \delta$ e ir a **2.2.4)**

2.2.2) Generar r , número aleatorio de acuerdo a la ley uniforme en $(0,1)$.

2.2.3) Si $r < \exp\left(\frac{F_{mejor} - F(x(\delta), \delta)}{t}\right)$, $\delta_{i+1} = \delta$, si no, $\delta_{i+1} = \delta_i$, $\delta_{mejor} = \delta_{i+1}$ y

construir la solución $x(\delta_{i+1})$ asociada.

2.2.4) $q = q+1$ e ir a **2.2)**

2.3) $t = t \cdot \Delta t$ e ir a **2)**.

3) Mejor solución δ_{mejor} con valor de la función objetivo $F(x(\delta_{mejor}), \delta_{mejor})$. Fin

Se dice que δ es vecino de δ^* si difieren en solo una componente y $\|\delta - \delta^*\| = 1$, es decir existe i tal que $\delta_i = \delta_i^* \pm 1$ y $\delta_j = \delta_j^*$ para todo $j \neq i$. En aras de mantener factibilidad se tiene en cuenta que el nuevo punto cumpla las restricciones de acotación en (2) - (3) - (4) - (5) - (6) - (7). Claramente las vecindades así definidas, son un subconjunto discreto del conjunto de soluciones factibles, pero es una forma rápida de explorar soluciones factibles.

4.2. Método del gradiente discreto

Teniendo en cuenta las restricciones (8) - (9) - (10) - (11) - (12) - (13), podemos reducir el modelo implícitamente y calcular los valores de las funciones involucradas y sus derivadas de forma iterativa. Así resolvemos el problema con un algoritmo determinístico tipo quasi-Newton para funciones no suaves [Bagirov, A.M., Karasözen, B. y Sezer, M. (2008)]. La estrategia es:

1. Escoger un vector inicial δ_0 y la solución $x(\delta_0)$ asociada y $k=0$. Fijar sucesiones $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \zeta_k \rightarrow 0^+, k \rightarrow \infty$ y números $c_1 > c_2 > 0$.
2. Fijar $s=0$, $\delta_{k,s} = \delta_k$.
3. Buscar una dirección de descenso d , estimando ∇F por el método de gradiente discreto [Bagirov, A.M., Karasözen, B. y Sezer, M. (2008)], con $(\alpha, \beta, \gamma, \zeta, c) = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \zeta_k, c_1)$.
4. Si $|d| \leq \alpha_k$, $\delta_{k+1} = \delta_{k,s}$, $k=k+1$ ir a 2

5. Sea $\sigma_s = \operatorname{argmax}\{\sigma \geq 0, F(\delta_{k,s} + \sigma d/|d|) - F(\delta_{k,s}) \leq -c_2 \cdot \sigma/|d|\}$.
6. $\delta_{k, s+1} = \delta_{k,s} + \sigma_s d/|d|$.
7. $s = s+1$. Ir a 3.

La dirección de descenso se calcula de la siguiente manera

1. Fijar $g, |g_1|=1$ y fijar e , vértice del cubo unitario en \mathbb{R}^n .
2. Calcular el gradiente discreto $v_1 = \Gamma^i(\delta, g_1, e, \beta, \gamma, \zeta)$. $D = \{v_1\}, |g_i| > \sqrt{\frac{1}{2n}} \quad k=1$.
3. Hallar $w_k = \operatorname{argmin}\{|w| / w \in D\}$
4. Si $|w_k| < \alpha$ fin
5. Hallar $g_{k+1} = w_k/|w_k|$. Si $F(\delta + \gamma g_{k+1}) - F(\delta) \leq c\gamma|w_k|$ fin.
6. Calcular el gradiente discreto $v_{k+1} = \Gamma^i(\delta, g_{k+1}, e, \beta, \gamma, \zeta), |g_i| > \sqrt{\frac{1}{2n}} \quad D = D \cup \{v_k\}$ e ir a 3.

Es decir: se fija una dirección inicial, se calcula el gradiente discreto con respecto a dicha dirección inicial, se halla la distancia entre el cono convexo de todos los gradientes discretos calculados y el origen. Si la distancia es menor que la tolerancia, se acepta el punto como punto estacionario aproximado, en otro caso, se calcula una nueva dirección de búsqueda y se comprueba si esta dirección es una dirección de descenso. Si lo es se para, y ya tenemos calculada la dirección de descenso, en otro caso, se calcula otro gradiente discreto en esta nueva dirección y se actualiza el cono convexo.

El gradiente discreto $\Gamma^i(\delta, g_i, e, \beta, \gamma, \zeta)$ se calcula componente a componente mediante un esquema de diferencias divididas entre puntos consecutivos que difieren en $\zeta^j \beta$ unidades en la componente j , a lo que se agrega una combinación de las componentes $j \neq i$ para la i -ésima componente.

5. RESULTADOS COMPUTACIONALES

El algoritmo y método de resolución propuesto ha sido programado en MATLAB y se ha implementado en un ordenador con procesador Intel Core i7, 950 que trabaja a 307 GHz.

Por mediciones directas -en el cruce de la Ronda de Outeiro con la avenida de Arteixo- en observaciones de varios días durante diferentes momentos del día y principalmente durante el horario pico, se estimaron las tasas de llegada y salida en los carriles, las cuales se recogen en la siguiente tabla:

Carriles	1	2	3	4	5	6	7	8
Tasa llegada (λ)	0.35	0.1	0.4	0.09	0.26	0.09	0.35	0.1
Tasa salida verde (μ)	1.05	0.7	1.1	0.6	1	0.7	1	0.6
Tasa salida ámbar (κ)	0.25	0.25	0.45	0.2	0.25	0.25	0.45	0.2

Se han considerado 5 ciclos ($N = 5$). En cuanto a las cotas del tiempo de las luces, se tomaron: $\delta_{\min.verde,i} = 5s$, para $i = 1, 3, 4, 6$; $\delta_{\min.verde,2} = 20s$; $\delta_{\min.verde,5} = 10s$; $\delta_{\max.verde,i} = 15s$, para $i = 1, 3, 4, 6$; $\delta_{\max.verde,2} = 40s$; $\delta_{\max.verde,5} = 20s$. $\delta_{amb} = 3s$. Solución inicial: $\delta_0 = [10\ 30\ 10\ 10\ 15\ 10\ 10\ 30\ 10\ 10\ 15\ 10\ 10\ 30\ 10\ 10\ 15\ 10\ 10\ 30\ 10\ 10\ 15\ 10\ 10\ 30\ 10\ 10\ 15\ 10]$. Todos los carriles son iguales, o sea, $w = [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$. Todos los usuarios tienen el mismo peso, es decir $\alpha_i = 1, \forall i = 1, \dots, 5$. Temperatura inicial $t_0 = 100000000$. $\Delta t = 0.001$. Número de iteraciones con igual temperatura $Q = 20$. Criterio de parada $T < 0.0001$.

Los resultados obtenidos al minimizar la función J_3 aparecen en la tabla siguiente:

Carriles	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8
Ciclo 1º-1ª fase	0	0	2	0.45	1.3	0.45	1.75	0.5
Ciclo 1º-2ª fase	0.3	1	0	1.35	3.9	1.35	5.25	1.5
Ciclo 1º-3ª fase	3.45	1.9	0	0	6.24	2.16	8.4	2.4
Ciclo 1º-4ª fase	5.2	2.4	2	0.45	2.54	0.46	10.15	2.9
Ciclo 1º-5ª fase	8	3.2	5.2	1.17	0.03	1.18	4.95	3.7
Ciclo 1º-6ª fase	11.15	4.1	8.8	1.98	2.37	2	0.75	0.4
Ciclo 2º-1ª fase	7.65	2.45	10.8	2.43	3.67	2.44	2.5	0.9
Ciclo 2º-2ª fase	0.3	3.85	1	3.69	7.31	3.7	7.4	2.3
Ciclo 2º-3ª fase	2.4	4.45	0	1.83	8.87	4.24	9.5	2.9

Ciclo 2º-4ª fase	5.55	5.35	3.6	2.64	2.2	0.1	12.65	3.8
Ciclo 2º-5ª fase	8.7	6.25	7.2	3.45	0.03	0.91	6.8	4.7
Ciclo 2º-6ª fase	12.9	7.45	12	4.53	3.15	2	0.65	0
Ciclo 3º-1ª fase	2.4	0	18	5.88	7.05	3.34	5.9	1.5
Ciclo 3º-2ª fase	0.3	1.7	6.1	7.4	11.47	4.87	11.85	3.2
Ciclo 3º-3ª fase	4.15	2.8	0.35	3	14.33	5.86	15.7	4.3
Ciclo 3º-4ª fase	9.75	4.4	6.75	4.4	2.49	0	21.3	5.9
Ciclo 3º-5ª fase	16	6.2	14	6	0.03	1.62	9.6	7.7
Ciclo 3º-6ª fase	22	7.9	20.75	7.59	4.45	3.15	0.2	0.4
Ciclo 4º-1ª fase	13.6	2.05	25.5	8.67	7.57	4.23	4.4	1.6
Ciclo 4º-2ª fase	2.7	4	12.25	10.38	12.5	6	11	3.5
Ciclo 4º-3ª fase	7.6	5.35	4.4	4.4	16.15	7.2	16	4.9
Ciclo 4º-4ª fase	10	6	7.2	5	11	4.28	18.4	5.6
Ciclo 4º-5ª fase	13.9	7.15	11.6	6	5	5.27	11.25	6.7
Ciclo 4º-6ª fase	17.75	8.25	16	7	8	6.26	5.75	2.4
Ciclo 5º-1ª fase	8.65	1.8	21.2	8.22	11.3	7.43	10.3	3.7
Ciclo 5º-2ª fase	0.3	3.4	10	9.6	15.48	8.87	15.9	5.3
Ciclo 5º-3ª fase	5.2	4.8	2.15	3.72	19.12	10.1	20.8	6.7
Ciclo 5º-4ª fase	8.7	5.8	6.15	4.62	11.7	5.38	24.3	7.7
Ciclo 5º-5ª fase	12.55	6.9	10.5	5.6	5.83	6.37	17.1	8.8
Ciclo 5º-6ª fase	17.1	8.2	15.7	6.78	9.2	7.54	10.35	3.5

Promedio de vehículos en el momento del cambio de luz

En resumen, los resultados obtenidos al minimizar la función J_3 , en cuanto al largo (número de vehículos) de la cola más larga en cada carril son: $L_1 - 22$, $L_2 - 8$, $L_3 - 26$, $L_4 - 10$, $L_5 - 19$, $L_6 - 10$, $L_7 - 24$ y $L_8 - 9$. Los resultados obtenidos al minimizar la función J_3 en cuanto al número máximo de vehículos en el momento del cambio a luz roja en cada carril son: $L_1 - 3$, $L_2 - 2$, $L_3 - 4$, $L_4 - 4$, $L_5 - 6$, $L_6 - 5$, $L_7 - 6$ y $L_8 - 3$.

Teniendo en cuenta las características adversas del cruce, por varias razones podemos sentirnos satisfechos con los resultados obtenidos con nuestro algoritmo, pues,

según se observa en la tabla anterior, hay fases en las que rebasan la intersección todos los vehículos que están esperando y además, estos resultados mejoran a los que se obtienen en la realidad con la regulación de los semáforos a ciclo fijo determinada por las autoridades de tráfico, ya que, si nos basamos en las observaciones realizadas durante horas punta, por ejemplo, en los carriles impares existen colas que superan los 30 vehículos, algunos de los cuales han de esperar dos o tres ciclos para rebasar el cruce.

6. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

- En este trabajo hemos estudiado un problema de control óptimo de semáforos para un cruce de dos calles con los dos sentidos de circulación, con dos o más carriles en cada sentido, regulado por ocho semáforos con seis fases en cada ciclo, situado en la ciudad de A Coruña (España), en el que existen frecuentes embotellamientos por ser un cruce que absorbe el tráfico de entrada y salida de la ciudad en dos direcciones diferentes, y el tráfico de entrada y salida de un polígono industrial y de una zona en donde se encuentra una de las superficies comerciales más grandes de España.
- Hemos presentado un modelo para dicho problema en el cual los tiempos de las luces son variables, pero sólo dependen de los flujos de llegada.
- Hemos propuesto un método híbrido de solución que combina una heurística basada en la metaheurística de recocido simulado con un algoritmo quasi-Newton (método del gradiente discreto) para funciones no suaves. Con él se obtienen valores para los períodos de luz verde que permitieron colas sensiblemente más cortas en horas críticas del cruce, con un tiempo computacional adecuado, si las comparamos con las que se dan en la realidad mediante la regulación de los semáforos a ciclo fijo, diseñada por las autoridades de tráfico. Para ello se usaron las tasas medias estimadas de llegada y salida de vehículos en el cruce, obtenidas mediante observaciones directas durante diferentes días, principalmente en las horas punta.

- El modelo que hemos diseñado y aplicado a la intersección regulada, impregna a nuestra investigación de un carácter interdisciplinario al incorporar no sólo referencias económicas y sociales, sino también los aspectos medioambientales que pretende resolver, como la congestión, la generación de accidentes, los ruidos y la contaminación atmosférica.
- Corresponde a las autoridades públicas basarse en esta investigación para tomar decisiones en lo tocante a una buena regulación del tráfico.
- Las emisiones de gases de efecto invernadero que produce el transporte, han de crecer a un ritmo inferior al crecimiento del Producto Interior Bruto.
- En el futuro se tratará de seguir trabajando en dicha intersección incluyendo en nuestro estudios diferencias entre los distintos carriles, un mayor número de ciclos y en el caso del problema multiobjetivo, vectores peso que ponderen más un objetivo que otro.
- También se tratará de relatar y esbozar otras líneas de investigación, como por ejemplo; el uso de otros métodos heurísticos: colonias de hormigas, algoritmos genéticos, etc. o extensión de la teoría propuesta al caso de las rotondas o de cruces concatenados.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAGIROV, A.M., KARASÖZEN, B. y SEZER, M. (2008) “Discrete gradient method: Derivative-free method for non-smooth optimization”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 137, 2, pp. 317-334.
- DE SCHUTTER, B. y DE MOOR, B. (1998) “Optimal traffic light control for a single intersection”. *European Journal of Control*, 4, 3, pp. 260-276.
- DE SCHUTTER, B. (2002) “Optimizing acyclic traffic signal switching sequences through an extended linear complementarity problem formulation”, *European Journal of Operational Research*, 139, 2, pp. 400-415.

- PEDREIRA, L. et al. (2012) “Regulación óptima de las fases de los semáforos en un cruce e impacto medioambiental”. Anales de ASEPUMA n° 20: 103, pp. 103.1-103.22.
- SÁNCHEZ-TOSCANO BARBERO, J. (2003). “Temario específico ESTT-OEP 2005, tema 82”, pp. 1-19.