

SELECCIÓN DE CARTERAS CON CRITERIOS DE RESPONSABILIDAD SOCIAL*

CLARA CALVO

*Universidad de Valencia
Departamento de Matemáticas para la Economía y la Empresa
Avda. Los Naranjos s/n 46022 Valencia.*

Recibido 05/06/2013

Revisado 02/09/2013

Aceptado 11/10/2013

RESUMEN: Presentamos un modelo fuzzy para el problema de selección de carteras que, aparte de restricciones de diversificación de variables semicontinuas y de cardinalidad, incorpora un objetivo no financiero que consiste en maximizar la responsabilidad social. Este objetivo se trata como un objetivo secundario respecto de los objetivos principales, es decir, maximizar la rentabilidad y minimizar el riesgo. Esto significa que el inversor fija ciertos rangos de rentabilidades y riesgos aceptables y el modelo proporciona dentro de estos rangos carteras no necesariamente eficientes con la mejor responsabilidad social teniendo en cuenta lo lejos que se encuentran de la frontera eficiente. Por tanto, el inversor conoce siempre el coste financiero que está asumiendo a causa del criterio de responsabilidad social. El método propuesto se discute mediante un ejemplo de selección de una cartera de fondos.

Palabras Clave: Selección de cartera, Inversión socialmente responsable, Optimización borrosa.

ABSTRACT: We present a fuzzy model for the portfolio selection problem that besides cardinality and semicontinuous variable diversification constraints, incorporates a non-financial goal consisting of maximizing social responsibility. This goal is treated as a secondary goal with regard to the main financial goals, i.e maximizing the expected return and minimizing the risk. This means that the investor fixes certain ranges of acceptable returns and risks and the model provides non-necessarily efficient portfolios within these ranges with best social responsibility taking into account how far they are from the efficient frontier. Hence the investor always knows the financial cost he or she is assuming due to the social responsibility criteria. The proposed method is discussed my means of an example about the selection of a portfolio of mutual funds.

Keywords: Portfolio selection, Socially responsible investing, Fuzzy optimization.

*Este trabajo ha sido financiado en parte por el Ministerio de Ciencia e Innovación (proyectos TIN2008-06872-C04-02 y ECO2011-28927).

1. Introducción

La teoría moderna de selección de carteras se inicia con los trabajos de Markowitz (1952, 1959) y se ha convertido en una herramienta fundamental en la gestión de carteras, así como en otras teorías económicas como la valoración de activos (Sharpe, 1964). Su núcleo central es esencialmente un problema biobjetivo que trata de elegir la composición de una cartera a partir de un conjunto de activos prefijado maximizando la rentabilidad esperada y minimizando el riesgo. Más concretamente, las variables de decisión del problema son los pesos de los activos en la cartera que se quiere seleccionar. La rentabilidad de cada activo se considera como una variable aleatoria y la rentabilidad de la cartera es la correspondiente suma ponderada de las rentabilidades de sus activos componentes. Así, la rentabilidad esperada de una cartera se define como la esperanza de dicha rentabilidad (que también es una variable aleatoria) y en la práctica se estima mediante la media de las rentabilidades históricas. En el modelo original de Markowitz el riesgo se mide mediante la forma cuadrática asociada a la matriz de varianzas-covarianzas de las rentabilidades. En la práctica el vector de medias y la matriz de varianzas-covarianzas se estiman a partir de las rentabilidades históricas de los activos.

A partir de este modelo básico se pueden considerar muchas variantes. Por una parte, existen otras medidas del riesgo que pueden ser más adecuadas, como el Valor en Riesgo (VaR) (Jorion, 2006) u otras medidas asimétricas que distinguen si las rentabilidades son superiores o inferiores a la media (Estrada, 2000, 2007; Jondeau y Rockinger, 2006; Joro y Na, 2006; León et al. 2004). Por otra parte, es posible añadir restricciones al modelo que reflejen condiciones del mercado o preferencias del inversor. Hay muchos contextos en los que se vuelven necesarias restricciones que pueden llegar a ser técnicamente complejas. Por ejemplo, es frecuente exigir unos valores mínimos para los pesos de los activos que incluye la cartera para reducir los costes de transacción, y también es habitual que los gestores de carteras impongan una cota superior al número de activos que componen la cartera (también por los costes de transacción) o una cota inferior para aumentar la diversificación. Esto se formaliza mediante modelos con variables semicontinuas y restricciones de cardinalidad.

Cuando se empezó a desarrollar la teoría de selección de carteras las técnicas computacionales no permitían tratar problemas con este tipo de restricciones, pero en las últimas décadas se ha avanzado mucho en este aspecto (Horniman et al., 2001; Calvo et al. 2009, 2012).

En este artículo presentamos una forma de incorporar junto con estas restricciones un tercer objetivo de naturaleza no financiera, a saber, el deseo del inversor de destinar una parte sustancial de su inversión a activos correspondientes a empresas que satisfacen ciertos requisitos de responsabilidad social, es decir, empresas que desarrollan de forma voluntaria determinadas políticas basadas en criterios éticos, de respeto al medio ambiente o de interés social. De acuerdo con el informe de 2012 del Social Investment Forum (SIF, 2012), el 11.23% de todos los activos gestionados profesionalmente en EEUU aplicaron diversos criterios de responsabilidad social en sus análisis de inversión. Los inversores que aplicaron criterios de responsabilidad social representaron 3.74 trillones de dólares sobre un total de 33.3 trillones invertidos. Esto supone un incremento de un 22% desde 2009, lo que muestra el auge que está teniendo este tipo de inversión. Paralelamente han aparecido muchas publicaciones académicas que presentan diferentes propuestas para gestionarla (Hirschberger et al., 2012).

El enfoque más simple consiste en introducir las preferencias del inversor sobre responsabilidad social como nuevas restricciones, aunque resulta mucho más apropiado introducirlas como un tercer objetivo junto con la maximización de la rentabilidad y la minimización del riesgo en un contexto de optimización multiobjetivo. El aspecto más delicado a la hora de modelizar satisfactoriamente esta situación es que el inversor puede no tener un criterio claro a priori sobre el peso que quiere dar a la responsabilidad social de su inversión frente a los objetivos puramente financieros. Por ello,

Tabla 1. Grado de responsabilidad social de los 10 fondos de inversión seleccionados para el ejemplo.

	Fondo	rs_i
1	Calvert Large Cap Growth A	0.3621
2	Calvert Social Investment Equity A	0.33256
3	Domini Social Equity I	0.98
4	MMA Praxis Core Stock Fund A	0.538
5	Neuberger Berman Socially Resp Inv	0.312
6	MassMutual Select Large Cap Value A	0
7	Westcore Blue Chip	0
8	Rydex Dynamic NASDAQ-100 2X Strategy H	0
9	Wells Fargo Advantage Growth I	0
10	Transamerica Focus P	0

el enfoque que aquí presentamos se distingue de otras alternativas en que tratamos al objetivo de responsabilidad social de forma diferenciada como un objetivo secundario, no en el sentido de que sea menos importante para el inversor, sino que termina proporcionando las mejores soluciones en cuanto a responsabilidad social dentro del conjunto de las que satisfacen sus requisitos de índole financiera y mostrando claramente el coste financiero que conlleva el potenciar la responsabilidad social.

Para precisar estas ideas, en la sección siguiente presentamos un ejemplo de problema de selección de fondos de inversión cuyo análisis motivará los conceptos que presentaremos en la sección 3. En la sección 4 aplicaremos al ejemplo la teoría desarrollada en la sección 3. Terminaremos con una sección de conclusiones.

2. Análisis de un problema de selección de una cartera de fondos

Presentamos aquí los datos relativos a 10 fondos de inversión tomados de la base de datos Morningstar correspondiente a 2007 (véase tabla 1). Los 5 primeros corresponden a fondos que se presentan a sí mismos como socialmente responsables, mientras que los 5 últimos aunque en el periodo considerado invertían mayoritariamente en empresas que adoptan una política de responsabilidad social corporativa, no tienen ningún compromiso al respecto, por lo que en cualquier momento podrían cambiar radicalmente su política de inversión. A cada fondo se le ha asignado un índice de responsabilidad social rs_i calculado mediante las técnicas de agregación descritas en Pérez-Gladish et al. (2013a) y Pérez-Gladish et al. (2013b). Notemos que a los 5 últimos se les ha asignado un índice de 0. En general el índice se ha calculado mediante criterios de expertos basados a su vez en información extraída de la base de datos KLD que evalúa la responsabilidad social de los activos que componen cada fondo según Morningstar.

Más concretamente, KLD proporciona valoraciones binarias sobre diferentes aspectos de interés en lo referente a la responsabilidad social divididos en fortalezas (strengths) y debilidades (concerns). Por simplificar el análisis, únicamente hemos considerado los aspectos correspondientes al respeto al medio ambiente.

Partimos del modelo de cartera SCP descrito en Calvo et al. (2012), en el que las variables x_i representan los pesos de los fondos en la cartera, \mathbf{V} es la matriz de varianzas-covarianzas y \mathbf{e} es el vector de rentabilidades esperadas. Además, se incluyen restricciones de cardinalidad que establecen un mínimo y un máximo para el número de fondos que componen la cartera. Las variables son semicontinuas, y esto se plasma mediante las variables binarias y_i , que toman el valor 1 sobre los activos que realmente forman parte de la cartera y 0 si no están incluidos en ella.

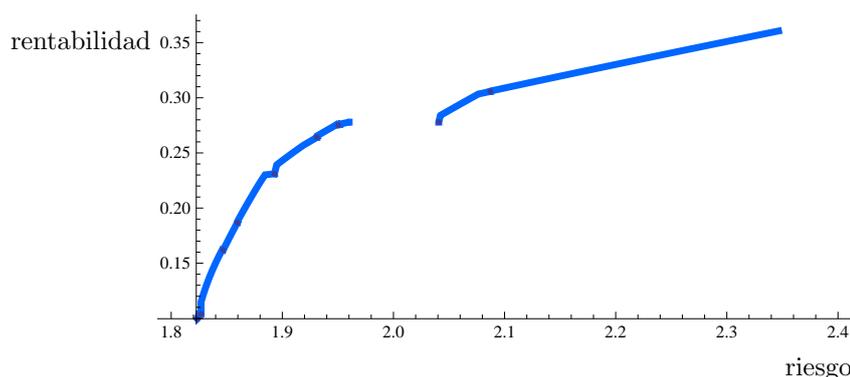


Figura 1. Frontera eficiente del ejemplo considerado del problema SCP.

$$\begin{array}{ll}
 \text{SCP Min. } \mathbf{x}^t \mathbf{V} \mathbf{x} & \text{Min. } \mathbf{x}^t \mathbf{V} \mathbf{x} \\
 \text{s.a } \mathbf{e}^t \mathbf{x} \geq r & \text{s.a } \mathbf{e}^t \mathbf{x} \geq r \\
 \mathbf{1}^t \mathbf{x} = 1 & \mathbf{1}^t \mathbf{x} = 1 \\
 m \leq \sum_{i=1}^n y_i \leq M & 3 \leq \sum_{i=1}^{10} y_i \leq 6 \\
 l_i y_i \leq x_i \leq u_i y_i, 1 \leq i \leq n & 0.05 y_i \leq x_i \leq 0.25 y_i, 1 \leq i \leq 5 \\
 y_i \in \{0, 1\}, & 0.05 y_i \leq x_i \leq 0.15 y_i, 6 \leq i \leq 10 \\
 & y_i \in \{0, 1\},
 \end{array} \tag{1}$$

A la derecha particularizamos el modelo para el ejemplo concreto que estamos considerando. De entre los 10 fondos queremos seleccionar una cartera que comprenda entre 3 y 6 de ellos, y hemos fijado pesos mínimos del 5% para todos los fondos, mientras que los máximos son del 25% para los fondos socialmente responsables y del 15% para los 5 restantes. Estas cotas permiten alcanzar un 100% de inversión socialmente responsable y hasta un 75% de inversión convencional. El vector de rentabilidades es

$$\mathbf{e} = (0.275, 0.213, 0.062, 0.082, 0.007, 0.099, 0.094, 0.644, 0.519, 0.394).$$

Por brevedad no mostramos la matriz de varianzas-covarianzas, pero indicamos que \mathbf{e} y \mathbf{V} están calculados a partir de datos semanales proporcionados por Morningstar correspondientes al periodo comprendido entre el 31-12-2006 y el 31-12-2007.

La figura 1 muestra la frontera eficiente del problema. En todas las figuras el riesgo representado es la desviación típica en lugar de la varianza, es decir, la función $\sqrt{\mathbf{x}^t \mathbf{V} \mathbf{x}}$. Como es habitual al considerar este tipo de restricciones, presenta irregularidades y saltos bruscos. Ello se debe a que está formada por fragmentos de las fronteras eficientes de distintos subproblemas obtenidos al fijar unos valores concretos para las variables y_i , es decir, unas composiciones concretas para la cartera. La figura 2 muestra dichas fronteras eficientes. Si nos fijamos, por ejemplo, en la zona recuadrada, observamos la frontera eficiente correspondiente a una determinada composición de la cartera que resulta globalmente eficiente (es decir, que sus pares rentabilidad-riesgo no están dominados por ninguna otra cartera con la misma o diferente composición) para unos ciertos intervalos de rentabilidad y riesgo, pero que a partir de un punto deja de ser globalmente eficiente porque es dominada por la frontera eficiente correspondiente a otra composición posible de la cartera. El subproblema correspondiente a dicha composición se vuelve infactible a partir de cierto nivel de rentabilidad y de ahí en adelante la composición inicial vuelve a ser globalmente eficiente. Vemos así que la estructura de la frontera eficiente global puede ser muy complicada, incluso en

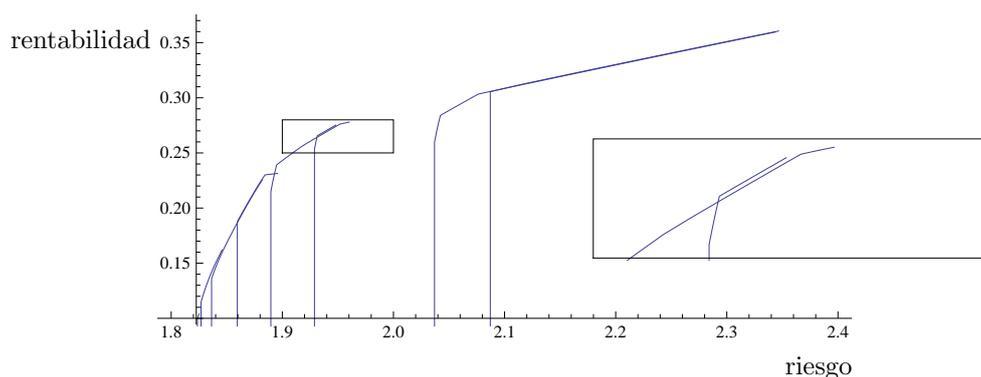


Figura 2. Fronteras eficientes de los problemas cuadráticos que conforman la frontera eficiente de la figura 1 junto con el detalle de la parte recuadrada.

problemas pequeños como el que estamos considerando. Por otro lado, para el problema que nos ocupa es interesante observar que tenemos dos composiciones distintas de la cartera con valores de rentabilidad y riesgo muy similares. Si se diera el caso de que fueran muy diferentes en cuanto a su responsabilidad social, un inversor interesado en la inversión socialmente responsable (para el que esa zona de rentabilidad-riesgo sea aceptable) podría preferir una cartera de la composición no globalmente eficiente si es mejor desde el punto de vista de la responsabilidad social dado que la diferencia desde el punto de vista financiero es insignificante.

Esto ilustra uno de los objetivos principales de este trabajo: las técnicas usuales de selección de cartera terminan proporcionando al inversor una o varias carteras eficientes en las que invertir, sin detectar carteras no eficientes que podrían ser más interesantes para inversores no interesados exclusivamente en los aspectos puramente financieros de la inversión. Naturalmente sus preferencias respecto a objetivos no financieros podrían estar plasmadas en las restricciones del problema, de modo que las carteras eficientes ya fueran aceptables para el inversor, pero entonces se pierde la información sobre cuánto nos estamos alejando de las carteras eficientes desde el punto de vista estrictamente financiero por el hecho de exigir un nivel de responsabilidad social. Nuestro propósito es proporcionar una herramienta de decisión a los inversores que desean sopesar el coste de incorporar criterios de responsabilidad social. Para ello trataremos de encontrar las mejores opciones no sólo entre las fronteras correspondientes a composiciones que son eficientes en algún intervalo de rentabilidades o riesgos, sino en todas las fronteras eficientes correspondientes a cada composición posible de la cartera. La figura 3 muestra dichas fronteras en el ejemplo que estamos considerando. Naturalmente, la mayor parte de ellas no serán aceptables para el inversor por razones financieras. Por ello el primer paso que daremos será seleccionar una zona del plano de rentabilidades-riesgos que incluya todas las posibilidades aceptables para el decisor en cuanto a los criterios financieros para a continuación considerar los fragmentos contenidos en la zona de las distintas fronteras eficientes. Estableceremos una valoración borrosa de las carteras eficientes correspondientes que combine el índice de responsabilidad social con una estimación de lo alejadas que quedan de la frontera eficiente global.

Para ilustrar con más detalle la situación supongamos que, a la vista de la frontera eficiente, el inversor fija en 0.25 la mínima rentabilidad que está dispuesto a aceptar y en 2 el máximo riesgo que está dispuesto a asumir. Esto supone restringirnos a la región de rentabilidades y riesgos que muestra la figura 4. Observamos que en ella se encuentran fragmentos de 13 fronteras eficientes correspondientes a otra tantas composiciones de la cartera, de las cuales 2 forman parte de la frontera eficiente global. Aunque parezcan lineales a trozos, en realidad cada segmento es un arco

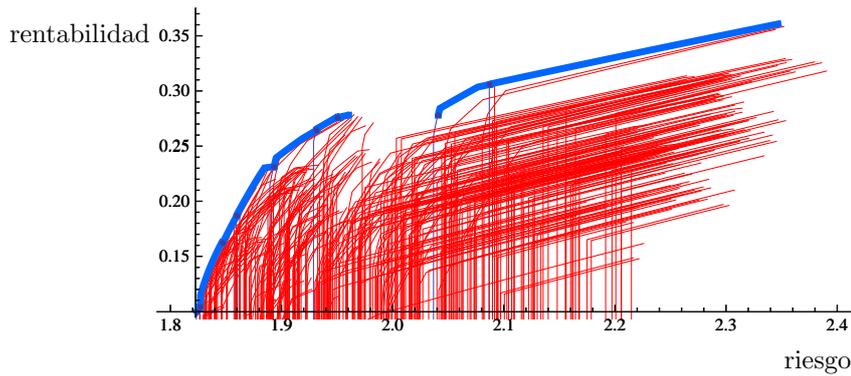


Figura 3. Fronteras eficientes de todos los subproblemas correspondientes a todas las composiciones posibles de la cartera en el ejemplo considerado

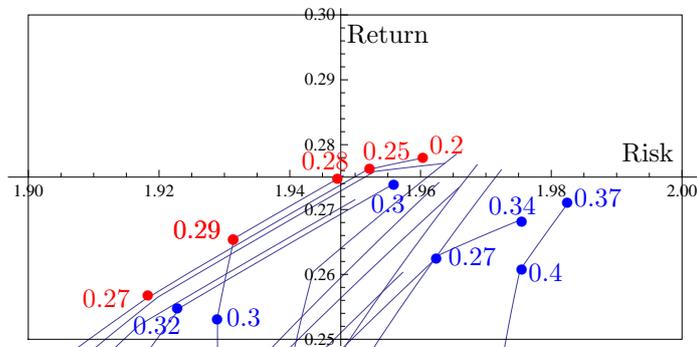


Figura 4. Región aceptable según las preferencias financieras del inversor. Se muestra el índice de responsabilidad social en la frontera eficiente global y en las fronteras eficientes de los subproblemas donde se alcanzan valores superiores a los de la frontera global.

de hipérbola. La figura muestra también los valores de responsabilidad social en la frontera global y en las fronteras eficientes correspondientes a composiciones que permiten superar el índice de responsabilidad social alcanzable en la frontera eficiente global. Concretamente, en la región considerada, hay 4 composiciones alternativas que permiten mejorar la responsabilidad social que puede obtenerse en la frontera eficiente global y que recogemos en la tabla 2. Vemos que la composición 4 es la que proporciona la mayor responsabilidad social, pero al mismo tiempo es la más alejada de la frontera eficiente.

Los cálculos correspondientes a este ejemplo han sido realizados mediante el algoritmo exacto descrito en Calvo et al. (2012) y, dado que al final quedan sólo 4 composiciones que pueden interesar al inversor, a éste le resultaría fácil tomar una decisión simplemente a partir de la información que hemos mostrado. Pero nuestro objetivo es dar un procedimiento general que, para problemas de mayor tamaño, nos permita explorar la región seleccionada por el inversor en busca de carteras con el mayor índice posible de responsabilidad social que no se alejen demasiado de la frontera eficiente global, donde “demasiado” es un concepto borroso que debe ajustarse razonablemente a las preferencias del inversor, es decir, al coste que está dispuesto a asumir para mejorar el índice de responsabilidad social de su inversión. En la sección siguiente veremos cómo desarrollar este objetivo.

	Composición	RS máx.
1	1, 2, 4, 9, 10	0.3
2	1, 2, 3, 4, 9, 10	0.32
3	1, 2, 3, 5, 9, 10	0.34
4	1, 2, 3, 9, 10	0.4

Tabla 2. Composiciones de cartera (según la numeración de los fondos establecida en la tabla 1) que mejoran el índice de responsabilidad social alcanzable en la frontera eficiente global. Se indica también el máximo índice de responsabilidad social que puede alcanzarse con dicha composición dentro de la región considerada

3. Un modelo borroso para maximizar la responsabilidad social

La discusión de la sección anterior nos lleva al problema de cómo valorar en general una posible cartera atendiendo a tres criterios:

- (1) Que la rentabilidad y el riesgo de la cartera tomen valores admisibles según las preferencias del inversor.
- (2) Que la cartera no esté excesivamente lejos de la frontera eficiente del problema, siempre según las preferencias del inversor.
- (3) Que la responsabilidad social de la cartera sea lo más alta posible.

Para ello vamos a plasmar estos tres criterios mediante tres conjuntos borrosos oportunamente definidos y después veremos cómo relacionarlos entre sí.

El caso más simple es el planteado por el criterio 1. Para plasmarlo definimos dos conjuntos borrosos. El primero, \tilde{S}_r , determina el conjunto de rentabilidades aceptables, mientras que el segundo, \tilde{S}_R , especifica el conjunto de riesgos aceptables. Para ello pediremos al inversor un nivel de rentabilidad r_0^+ tal que las rentabilidades superiores serán consideradas completamente satisfactorias y, por tanto, tendrán asignado un grado de pertenencia igual a 1. Asimismo necesitaremos otro nivel r_0^- por debajo del cual las rentabilidades serán consideradas totalmente inaceptables y por tanto con grado de pertenencia 0. Si tomamos una función de pertenencia lineal a trozos, el resultado es:

$$\mu_{\tilde{S}_r}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \geq r_0^+, \\ \frac{r-r_0^-}{r_0^+-r_0^-} & \text{si } r_0^- \leq r \leq r_0^+, \\ 0 & \text{si } r \leq r_0^-. \end{cases}$$

Similarmente la función de pertenencia a \tilde{S}_R queda determinada por un valor R_0^- que determina los riesgos completamente aceptables, es decir, aquellos que tendrán asignado un grado de pertenencia 1, y un valor R_0^+ que determine los riesgos completamente inaceptables. De este modo:

$$\mu_{\tilde{S}_R}(R) = \begin{cases} 1 & \text{si } R \leq R_0^-, \\ \frac{R_0^+-R}{R_0^+-R_0^-} & \text{si } R_0^- \leq R \leq R_0^+, \\ 0 & \text{si } R \geq R_0^+. \end{cases}$$

Con esto ya podemos definir el conjunto de rentabilidades y riesgos factibles mediante la función de pertenencia $\mu_{\tilde{S}}(r, R) = \mu_{\tilde{S}_r}(r)\mu_{\tilde{S}_R}(R)$. La figura 5 muestra esta función para el ejemplo que hemos expuesto en la sección anterior. Vemos así que desde un punto de vista financiero estamos considerando completamente aceptables las carteras cuyo par rentabilidad-riesgo está dentro del

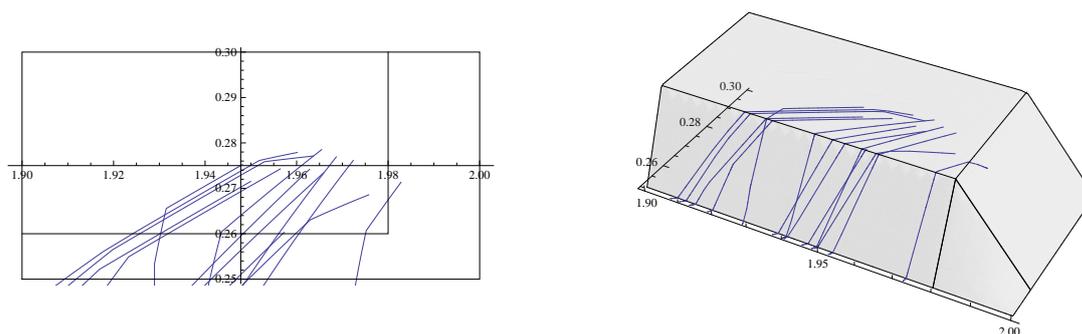


Figura 5. Tolerancias para la rentabilidad y riesgo en el ejemplo de la sección anterior. Hemos tomado $r_0^+ = 0.26$, $r_0^- = 0.25$, $R_0^+ = 2$ y $R_0^- = 1.98$. La figura de la derecha muestra la gráfica de la función de pertenencia $\mu_{\tilde{S}}$ y las elevaciones de las fronteras eficientes contenidas en la región considerada.

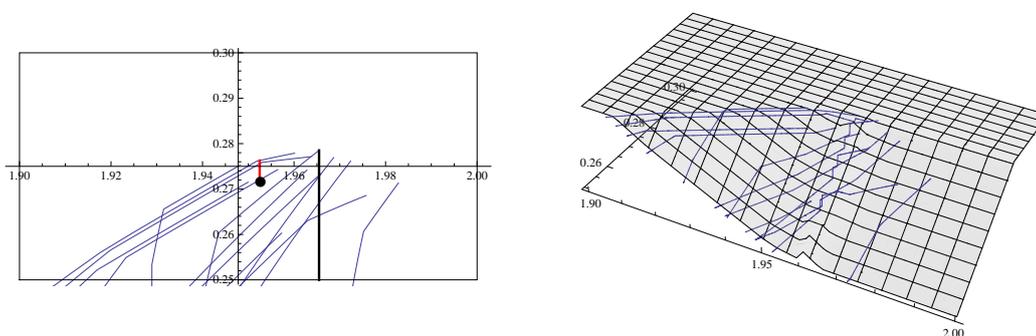


Figura 6. Cálculo de la eficiencia respecto a la rentabilidad (en el ejemplo de la sección anterior): para el punto señalado en la gráfica de la izquierda, $1 - \mu_{\tilde{E}_r}(r, R)$ es el cociente entre la distancia señalada del punto a la frontera eficiente y la longitud del segmento destacado más a la derecha. La figura de la derecha muestra la gráfica de $\mu_{\tilde{E}_r}$.

rectángulo pequeño mostrado en la parte izquierda de la figura y descartamos todas aquellas correspondientes a puntos externos al rectángulo grande. No obstante, a esta primera condición de tipo financiero falta añadirle la valoración de la eficiencia que pasaremos a considerar a continuación.

Definimos ahora el conjunto borroso \tilde{E} correspondiente al criterio 2. En primer lugar medimos la eficiencia en relación a la rentabilidad mediante el conjunto borroso \tilde{E}_r dado por la función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{E}_r}(r, R) = \begin{cases} 1 - \frac{r_{ef}(R) - r}{t_r} & \text{si } r \geq r_{ef}(R) - t_r, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $r_{ef}(R)$ es la rentabilidad eficiente para el riesgo R y t_r es una tolerancia fijada por el inversor aunque podemos tomar como un valor estándar la máxima distancia de r_0^- a la máxima rentabilidad que se alcanza en la frontera eficiente (véase la figura 6).

La eficiencia respecto al riesgo se define de forma similar, es decir, a través del conjunto borroso \tilde{E}_R determinado por la función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{E}_R}(r, R) = \begin{cases} 1 - \frac{R - R_{ef}(r)}{t_R} & \text{si } R \leq R_{ef}(r) + t_R, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

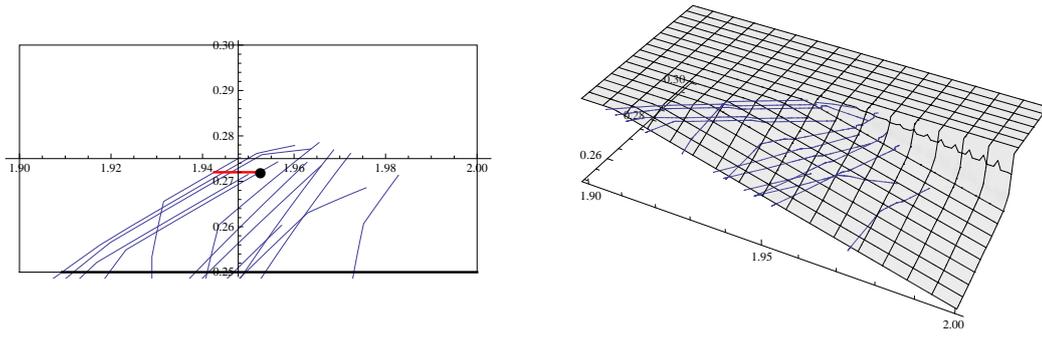


Figura 7. Cálculo de la eficiencia respecto al riesgo: para el punto señalado en la gráfica de la izquierda, $1-\mu_{\tilde{E}_R}(r, R)$ es el cociente entre la distancia señalada del punto a la frontera eficiente y la longitud del segmento destacado más abajo. La figura de la derecha muestra la gráfica de $\mu_{\tilde{E}_R}$.

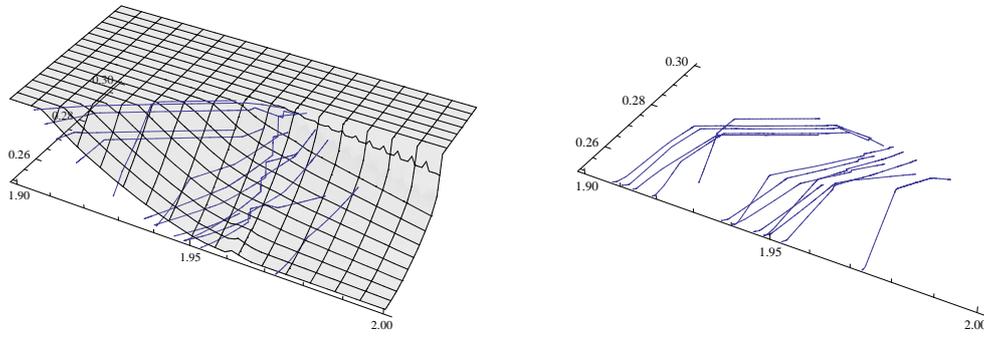


Figura 8. (A) Gráfica de la función $\mu_{\tilde{E}}$. (B) Gráfica de la función $\mu_{\tilde{D}}$.

donde $R_{ef}(r)$ es el riesgo eficiente para la rentabilidad r y t_R es una tolerancia fijada por el inversor aunque podemos tomar como un valor estándar la máxima distancia de R_0^+ al mínimo riesgo que se alcanza en la frontera eficiente (véase la figura 7).

El conjunto \tilde{E} que determina el grado de eficiencia de una cartera se define como la intersección borrosa de los conjuntos \tilde{E}_r y \tilde{E}_R , es decir, mediante la función de pertenencia $\mu_{\tilde{E}} = \mu_{\tilde{E}_r} \mu_{\tilde{E}_R}$, que, para el ejemplo de la sección anterior está representada en la figura 8A. Vemos en la gráfica que, como tiene que suceder, el grado de eficiencia es 1 sobre la frontera eficiente y disminuye al alejarse de ella.

Finalmente representamos el grado de responsabilidad social de una cartera mediante el grado de pertenencia a un tercer conjunto borroso \tilde{RS} cuya función de pertenencia es simplemente

$$\mu_{\tilde{RS}}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_i rs_i x_i}{rs^*},$$

donde rs_i es el índice de responsabilidad social del fondo i -ésimo y el término rs^* se introduce para normalizar el grado de pertenencia y que quede entre 0 y 1. Aquí lo tomamos como el mayor índice de responsabilidad social posible, si bien podemos tomar también el máximo restringido a la región factible determinada por r_0^- y R_0^+ , o incluso un valor determinando por las aspiraciones del inversor.

Así tenemos ya definidos los tres conjuntos borrosos \tilde{S} , \tilde{E} y \tilde{RS} , que ahora tenemos que agregar en un único conjunto de decisión \tilde{D} que represente la satisfacción global de una cartera para el

inversor. Para ello introducimos un peso w_{rs} que mide lo interesado que está el inversor en favorecer la responsabilidad frente a la eficiencia de la cartera en términos financieros. Equivalentemente, un valor de w_{rs} cercano a 1 indicará que el inversor está dispuesto a alejarse mucho de la frontera eficiente para conseguir más responsabilidad social, mientras que un valor cercano a 0 indicará su intención de permanecer cerca de la frontera eficiente. Concretamente utilizamos w_{rs} para combinar la responsabilidad social y la eficiencia y finalmente multiplicamos por $\mu_{\tilde{S}}$ la combinación lineal de estos factores para garantizar que las soluciones infactibles tengan grado de pertenencia 0 respecto del conjunto de decisión. Así pues, definimos

$$\mu_{\tilde{D}}(\mathbf{x}) = \mu_{\tilde{S}}(r(\mathbf{x}), R(\mathbf{x})) \left(w_{rs} \mu_{\tilde{RS}}(\mathbf{x}) + (1 - w_{rs}) \mu_{\tilde{E}}(r(\mathbf{x}), R(\mathbf{x})) \right).$$

La figura 8B muestra las fronteras eficientes de los subproblemas que están contenidas en la región factible elevadas según la función $\mu_{\tilde{D}}$. En estos términos el problema que proponemos es maximizar el grado de pertenencia al conjunto \tilde{D} . Como hemos indicado los cálculos para el ejemplo de la sección anterior han sido realizados mediante un algoritmo de enumeración exacto, pero para problemas de mayor envergadura se puede emplear cualquier procedimiento heurístico que no requiera derivar la función objetivo (por ejemplo, algoritmos genéticos).

4. Una aplicación a fondos de inversión

Veamos ahora qué obtenemos cuando buscamos las carteras con mayor satisfacción global en el caso del ejemplo discutido en la sección 2 con un peso $w_{rs} = 0.8$, es decir, $\mu_{\tilde{D}}(\mathbf{x}) = \mu_{\tilde{S}}(r(\mathbf{x}), R(\mathbf{x})) \left(0.8 \mu_{\tilde{RS}}(\mathbf{x}) + 0.2 \mu_{\tilde{E}}(r(\mathbf{x}), R(\mathbf{x})) \right)$.

Para ofrecer al inversor un mayor número de opciones podemos buscar la cartera con mayor satisfacción global para cada frontera eficiente dentro de la región factible.

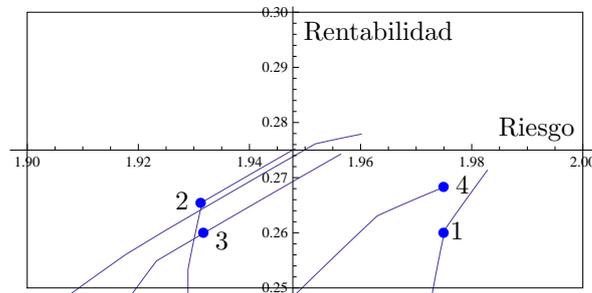


Figura 9. Las 4 mejores carteras en sus respectivas fronteras eficientes ordenadas según su satisfacción global.

La figura 9 muestra las cuatro mejores posibilidades, que se detallan en la tabla 3. Debemos tener presente que la segunda solución que aparece en la tabla no es la segunda mejor solución del problema, ya que alrededor de la primera cartera hay infinitas que son mejores que aquella. Lo que podemos decir es que, si buscamos una cartera con una composición diferente de la primera, la mejor opción es la que presentamos en segundo lugar.

Vemos que la mejor solución tiene un índice de responsabilidad social de 0.4 y vemos que está bastante alejada de la frontera eficiente (sobre todo respecto al riesgo), lo cual está relacionado con el valor alto que hemos fijado para el peso w_{rs} . La segunda mejor es eficiente pero tiene el peor índice de responsabilidad social de entre las cuatro. La tercera es algo menos eficiente, pero mejora un poco el índice de responsabilidad social y la cuarta aumenta un poco dicho índice a costa de alejarse de nuevo bastante de la frontera.

	Composición	Satisfacción	rs	r	R
1	(0.2, 0.25, 0.25, 0, 0, 0, 0, 0, 0.15, 0.15)	0.619	0.40	0.2607	1.9752
2	(0.2, 0.25, 0, 0.25, 0, 0, 0, 0, 0.15, 0.15)	0.613	0.29	0.2656	1.9315
3	(0.17, 0.25, 0.05, 0.22, 0, 0, 0, 0, 0.15, 0.15)	0.611	0.32	0.2600	1.9318
4	(0.25, 0.25, 0.15, 0, 0.05, 0, 0, 0, 0.15, 0.15)	0.560	0.34	0.2685	1.9757

Tabla 3. La mejor cartera para cada una de las cuatro mejores composiciones posibles. Se indican los pesos de los activos en cada cartera, su índice de satisfacción global, su índice de responsabilidad social, su rentabilidad y su riesgo.

5. Conclusiones

El modelo que presentamos de selección de cartera permite captar de forma muy ajustada las preferencias del inversor tanto financieras como en cuanto a la responsabilidad social, gracias a los distintos parámetros que intervienen en él, cada uno con un papel específico. Sin embargo, estos criterios no descartan a priori ninguna solución que pueda resultar interesante en cuanto a los criterios financieros, sino que el inversor tiene siempre en el último momento la posibilidad de reconsiderar sus propias preferencias a la hora de elegir entre las distintas opciones que se le presentan.

El método propuesto admite restricciones complejas y se puede adaptar para incorporar nuevos objetivos a los que dar un tratamiento similar al que hemos dado a la responsabilidad en un contexto general de optimización multicriterio.

Referencias

1. Markowitz, H.M. (1952). Portfolio selection, *Journal of Finance* 7, 79–91.
2. Markowitz, H.M. (1959). *Portfolio selection: Efficient Diversification of Investments*. New York: John Wiley.
3. Sharpe, W. F. (1964) Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, 19 (3), 425–442.
4. Jorion, P. (2006) *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk* (3rd ed.). McGraw-Hill.
5. Estrada, J. (2000) The cost of equity in emerging markets: a downside risk approach, *Emerging Markets Quarterly*, Fall, 19–30.
6. Estrada, J. (2007) Mean-semivariance behavior: Downside risk and capital asset pricing. *International Review of Economics and Finance* 16 (2) 169–185.
7. Jondeau, E., Rockinger, M (2006) Optimal Portfolio Allocation under Higher Moments, *European Financial Management*, 12, 29–55.
8. Joro, T., Na, P. (2006) Portfolio Performance Evaluation in Mean-Variance-Skewness Framework, *European Journal of Operational Research*, 175 (1) 446–461.
9. León, T., Liern, V., Marco, P., Segura, J.V., Vercher, E. (2004) A downside risk approach for the portfolio selection problem with fuzzy returns. *Fuzzy Econom. Rev.* (9) 61–77.
10. Horniman, M.D. Jobst, N.J., Lucas, C.A., Mitra, G. (2001) Computational aspects of alternative portfolio selection models in the presence of discrete asset choice constraints, *Quantitative Finance*, 1, 489–501.
11. Calvo, C., Ivorra, C., Liern, V. (2012) On the Computation of the Efficient Frontier of the Portfolio Selection Problem. *Journal of Applied Mathematics*, Volume 2012. DOI: -??
12. Calvo, C., Ivorra, C., Liern, V. (2009) Las condiciones de Kuhn y Tucker en el cálculo de fronteras eficientes. *Rect@ 10* 145–158.
13. SIF. (2012) Report on Socially Responsible Investing Trends in the United States. Social Investment Forum: Washington DC.
14. Hirschberger, M., Steuer, R.E., Utz, S., Wimmer, M. Is socially responsible investing just screening? Evidence from mutual funds. SFB 649 discussion paper, No. 2012-025.

15. Pérez-Gladish, B., Méndez-Rodríguez, P., M'Zali, B., Lang, P. (2013a) Mutual funds efficiency measurement under financial and social responsibility criteria, *Journal of Multicriteria Decision Analysis*, 20, 109–125.
16. Pérez-Gladish, B., Méndez-Rodríguez, P., García-Bernabeu, A., Balaguer, R. (2013b) A compromise programming model for mutual funds socially responsible selection with fuzzy data, *Information Systems and Operational Research*. (en revisión).