COEFICIENTES POLINOMIALES PARA FUNCIONES LÍMITE DE SERIES DE POTENCIAS, UNA ANALOGÍA CON EL TRIANGULO DE PASCAL.

Polynomial coefficients for functions of power series limit, an analogy with Pascal's Triangle

RESUMEN
En este trabajo se muestra un resultado sobre los coeficientes de las funciones polinómicas hacia las cuales convergen cierto tipo de series infinitas. Dicho resultado está relacionado con una forma encontrada para hallar estos coeficientes y la demostración de su validez. La analogía que se pretende mostrar tiene que ver con la forma como estos coeficientes se distribuyen en un triangulo numérico, a la manera como los coeficientes binomiales lo hacen en el triangulo de Pascal.

PALABRAS CLAVES: Coeficientes polinomiales, serie infinita, triángulo numérico.

ABSTRACT
In this work is shown a result on the coefficients of the polynomial functions toward which they converge certain type of infinite series. It is relationate with a form that was found to find that coefficients and the demonstration of its validity. The analogy that intends to show has to do with the form as these coefficients are distributed in a numerical triangle, to the way like the binomial coefficients do it in the Pascal´s triangle.

KEYWORDS: *Polynomial coefficients, infinite series, numerical triangle.*

OSCAR FERNÁNDEZ S.
Licenciado en Matemáticas, M. Sc.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
oscarf@utp.edu.co

LORENZO MARTÍNEZ H.
Licenciado en Matemáticas, Mg.
Profesor Asistente
Universidad de Caldas
ljmarti69@hotmail.com

ALVARO SALAS S.
Matemático, M. Sc.
Profesor Asistente
Universidad de Caldas
Profesor Asociado
Universidad Nacional de Colombia
asalash2002@yahoo.com

1. INTRODUCCIÓN

En algún momento del curso de matemática fundamental se estudia el desarrollo del binomio $(x+a)^n$ y en ese desarrollo se encuentran ciertos coeficientes llamados *coeficientes binomiales*, los cuales se denotan como $\binom{n}{k}$, que en realidad es una manera de representar los cocientes $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, para k = 0, 1,…, n, lo cual se puede expresar simbólicamente como $(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$. Ahora, esos coeficientes forman un triángulo numérico conocido en el ámbito de la Matemática como el Triángulo de Pascal, en honor al matemático y filósofo francés Blaise Pascal (1622 – 1662), cuyas primeras filas, aparecen enseguida en la figura 1.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Fig. 1 Triángulo de Pascal generado por los coeficientes binomiales y la suma de sus filas

Cada fila k del triángulo es obtenida con los términos de la fila anterior k–1 así: Cualquier número la fila k es la suma del número situado encima de él y el que está a la izquierda de éste en la fila k-1, por ejemplo los números de la fila 7 correspondientes a los coeficientes en el desarrollo de $(x + a)^6$ son 6 = 5 + 1; 15 = 10 + 5; 20 = 10 + 10; 15 = 5 + 10; 6 = 1 + 5. En general se puede demostrar usando la definición $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ el hecho que

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Fecha de Recepción: 15 de Septiembre de 2009.
Fecha de Aceptación: 12 de Noviembre de 2009

En este trabajo se demuestra la validez de una expresión similar a la que se utiliza para el desarrollo del binomio mencionada antes, se obtiene una fórmula para determinar los coeficientes asociados de manera explícita, así mismo se muestra que estos coeficientes forman un triángulo numérico.

2. CONTENIDO

2.1 Series de potencias y función generatriz

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y sea la serie de potencias g(z) = $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, si resulta que ésta serie converge absolutamente en cierto intervalo (-R, R) y además se conoce la expresión de g(z), entonces se puede evaluar la función y cualquiera de sus derivadas en valores de z que satisfagan |z| < R. A la función g(z) se le conoce como función generatriz de la sucesión $\{a_n\}$ y esta función define la transformada geométrica de a_n denotada $Z[a_n] = g(z)$. Un ejemplo clásico que sirve de base para obtener otras series de potencias a partir de sus derivadas es la función generatriz o transformada geométrica de la sucesión $\{a_n\} = \{1, 1, 1, 1, 1,...\}$. Esto es,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k = \lim_{n\to\infty}\frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \frac{1}{1-z}, \text{ si } |z| < 1.$$

Se tiene entonces el siguiente resultado básico

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\text{ ; si } |z| < 1 \qquad (1)$$

Se puede obtener la función generatriz para otras sucesiones a partir de esta simplemente derivando con respecto a z y luego multiplicando por z a ambos lados de la igualdad. Así, si se deriva (1) y se multiplican ambos miembros por z, se obtiene,

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}\text{ ; si } |z| < 1. \qquad (2)$$

Al derivar (2) y multiplicar por z,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z^2+z}{(1-z)^3}\text{ ; si } |z| < 1. \qquad (3)$$

Si se deriva (3) y se multiplica por z,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n = \frac{z^3+4z^2+z}{(1-z)^4}\text{ ; si } |z| < 1. \qquad (4)$$

Derivando (4) y multiplicando por z,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 z^n = \frac{z^4+11z^3+11z^2+z}{(1-z)^5}\text{ ; si } |z| < 1. \qquad (5)$$

A partir de los resultados (1) a (5) se puede conjeturar una fórmula genérica para las funciones generatrices de la forma $\{a_n\} = \{n^k\}$, es decir una fórmula genérica para la expresión $\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}\sum_{m=1}^{k} a_{km} z^m\text{ ; } k = 1, 2, \ldots\text{; si } |z| < 1. \qquad (6)$$

Los coeficientes $a_{k1}, a_{k2}, \Lambda, a_{km}$ son constantes a determinar explícitamente.

2.2 Coeficientes polinomiales y un triangulo numérico

Teorema La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ converge para |z| < 1 a $\frac{1}{(1-z)^{k+1}}\sum_{m=1}^{k} a_{km} z^m$; k = 1, 2,… con $a_{km} = (k-m+1)a_{(k-1)(m-1)} + m a_{(k-1)m}$.

Demostración. Consideremos la expresión básica (1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\text{ ; si } |z| < 1.$$

Al derivar y multiplicar por z ambos lados de esta expresión, se obtiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ converge para |z| < 1 a $\frac{1}{(1-z)^2}(z)$.

Supóngase que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} z^n$ converge para |z| < 1 a $\frac{1}{(1-z)^k}\sum_{m=1}^{k-1} a_{(k-1)m} z^m$. Es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} z^n = \frac{1}{(1-z)^k}\sum_{m=1}^{k-1} a_{(k-1)m} z^m$$

Al derivar con respecto a z ambos lados de esta expresión, se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^{2k}}\left((1-z)^k \sum_{m=1}^{k-1} m a_{(k-1)m} z^{m-1} + k(1-z)^{k-1}\sum_{m=1}^{k-1} a_{(k-1)m} z^m\right)$$

Se cancela $(1-z)^{k-1}$ y se multiplica por z a ambos lados de la igualdad, para obtener

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}\left((1-z)\sum_{m=1}^{k-1} ma_{(k-1)m} z^m + k\sum_{m=1}^{k-1} a_{(k-1)m} z^{m+1}\right)$$

Se efectúa el producto para obtener

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}\left(\sum_{m=1}^{k-1} ma_{(k-1)m} z^m - \sum_{m=1}^{k-1} ma_{(k-1)m} z^{m+1} + k\sum_{m=1}^{k-1} a_{(k-1)m} z^{m+1}\right)$$

Ahora por la invarianza ante una traslación se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}\left(\sum_{m=1}^{k-1} ma_{(k-1)m} z^m - \sum_{m=2}^{k} (m-1)a_{(k-1)(m-1)} z^m + k\sum_{m=2}^{k} a_{(k-1)(m-1)} z^m\right)$$

Si se tiene que $a_{(k-1)0} = a_{(k-1)k} = 0$, la expresión anterior queda

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}\left(\sum_{m=1}^{k}((k-m+1)a_{(k-1)(m-1)} + ma_{(k-1)m})z^m\right)$$

Se hace $a_{km} = (k-m+1)a_{(k-1)(m-1)} + ma_{(k-1)m}$ para concluir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ converge para |z| < 1 a $\frac{1}{(1-z)^{k+1}}\sum_{m=1}^{k} a_{km} z^m$; k = 1, 2,…. □

Los coeficientes a_{km} obtenidos mediante la expresión $(k-m+1)a_{(k-1)(m-1)} + ma_{(k-1)m}$ para los polinomios de z en los numeradores del lado derecho de la igualdad cada vez que se deriva y se multiplica por z forman un triángulo numérico a la manera del triangulo que forman los coeficientes binomiales en el Triangulo de Pascal

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & & & & \\
 & & & 0 & 1 & & 1 & 0 & & & \\
 & & 0 & 1 & & 4 & & 1 & 0 & & \\
 & 0 & 1 & 11 & & & 11 & 1 & 0 & & \\
\vdots & & & & & \vdots & & & & & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & & & \cdots & & & & & a_{km}
\end{array}$$

Fig. 2 Triángulo numérico generado por los coeficientes a_{km}

Cada fila k del triángulo es obtenida con los términos de la fila anterior k–1 así: En la fila k hay k+2 números incluyendo los ceros de los extremos y en la fila k-1 hay k+1 números de la forma $a_{(k-1)0}, a_{(k-1)1}, a_{(k-1)2} \Lambda\ a_{(k-1)(k-1)}, a_{(k-1)k}$ y se tiene que $a_{km} = (k-m+1)a_{(k-1)(m-1)} + ma_{(k-1)m}$ para m = 1, 2,…, k con $a_{(k-1)0} = a_{(k-1)k} = 0$. Por ejemplo si se quieren obtener los coeficientes de la quinta fila el procedimiento es el siguiente: Los términos de la fila 4 son $a_{41} = 1$, $a_{42} = 11$, $a_{43} = 11$, $a_{44} = 1$. Con estos se obtiene los términos de la fila 5 considerando que $a_{40} = a_{45} = 0$. De modo que

$$a_{51} = (5-1+1)a_{40} + a_{41} = 5(0)+1 = 1,$$
$$a_{52} = (5-2+1)a_{41} + 2a_{42} = 4(1)+2(11) = 26,$$
$$a_{53} = (5-3+1)a_{42} + 3a_{43} = 3(11)+3(11) = 66,$$
$$a_{54} = (5-4+1)a_{43} + 4a_{44} = 2(11)+4(1) = 26,$$
$$a_{55} = (5-5+1)a_{44} + 5a_{45} = 1(1)+5(0) = 1.$$

3. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se ha logrado hacer una analogía con dos hechos ligados al desarrollo de la potencia n-ésima de un binomio. Estos hechos son, primero, la generación de los coeficientes en el desarrollo del binomio mediante una expresión; segundo, los coeficientes así generados conforman un triangulo numérico llamado el Triángulo de Pascal.

Las analogías correspondientes a cada hecho en particular se enuncian a continuación. Primero, se obtuvo la forma de los coeficientes de la función a la cual converge una sucesión infinita convergente de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$, la cual expresa una fórmula genérica para las funciones generatrices de la forma $\{a_n\} = \{n^k\}$, es decir una fórmula genérica para la expresión $\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}\sum_{m=1}^{k} a_{km} z^m$; k = 0, 1, 2,⋯, si |z| < 1, y se demostró su validez.

Segundo, se mostró que los coeficientes a_{nk} generados con la fórmula $a_{nk} = (n-k+1)a_{(n-1)(k-1)} + ka_{(n-1)k}$ con $a_{n1} = a_{nn} = 1$ conforman un triangulo numérico.

4. BIBLIOGRAFÍA

[1] Apostol T. Calculus volumen I. Editorial Reverté. 1977.

[2] Grimaldi R. Matemáticas discreta y combinatoria. Pearson Editores. 1997.

[3] Jiménez, R. Gordillo, E., Rubiano, G. Teoría de números para principiantes. Universidad Nacional de Colombia 1999.

[4] Luque, C. Mora, L., Torres, J. Una construcción de los números reales positivos. Universidad Pedagógica Nacional. 2004.

[5] Ross, K., Wright, R. Matemáticas Discretas. Prentice-Hall. Hispanoamericana S.A. 1990.

[6] Spivak, M. Calculus, Cálculo infinitesimal. Editorial Reverté, s.a. 1977.

[7] Vinogradov, I. Fundamentos de la teoría de los números. Editorial Mir.1977.