*ILUIL*, *vol. 24, 2001, 649-684*

# UNA INTERPRETACIÓN DE LAS FRACCIONES EGIPCIAS DESDE EL RECTO DEL PAPIRO DE RHIND

JOSÉ MARÍA GAIRÍN SALLÁN
Universidad de Zaragoza

*RESUMEN*

*Admitiendo como premisa que los entes numéricos deben asociarse a la realidad social en que aparecen, en este artículo se significan las fracciones del antiguo Egipto como expresiones de las cantidades de magnitud obtenidas al efectuar repartos igualitarios.*

*Desde este posicionamiento, un exhaustivo análisis de los distintos casos recogidos en la tabla del recto del Papiro de Rhind nos ha permitido la reconstrucción del proceso de reparto utilizado por el escriba Ahmés; proceso sin duda complejo porque, para cada una de las situaciones recogidas en dichas tablas, el escriba debe tomar aquellas decisiones que favorezcan la realización de un reparto real en las condiciones más favorables.*

*Esta reconstrucción nos ha permitido interpretar las fracciones egipcias como la suma de los resultados parciales obtenidos al efectuar el reparto en fases sucesivas, así como elaborar dos posibles alternativas sobre el modo en*

*ABSTRACT*

*Accepting as a premise that numerical entities must be associated to the social reality in which they appear, this article exposes that Old Egypt fractions are considered to be expresions of the magnitude quantities which have been obtained after being equally shared-out.*

*Taking into account this view, an exhausting analysis of the different cases collected in the table which appears in the Recto of Rhind's Papyrus has allowed us the reconstruction of the shared-out proccess used by scribe Ahmés; such a proccess has been undoubtly complex, due to the fact that, for each one of the situations collected in this table, the scribe must make those decisions which will help the realization of a real share-out under the most suitable conditions.*

*This reconstruction has enabled us to interpret Egyptian fractions as the addition of the partial results obtained when the share-out must be carried out following consecutive stages, as well as*

*Recibido el 26 de mayo del 2000*

*I.S.S.N. 0210-8615*

*que el escriba realizaría los cálculos numéricos asociados al proceso de reparto.*

*to devise two possible alterantives about the way in which the scribe would execute the numerical calculations associated to the share-out process.*

Palabras clave: Matemáticas, Aritmética, Fracciones, Antiguo Egipto, Papiro de Rhind, Sistema de representación, Siglo XIX A.C.

«Se han discutido y debatido, por parte de historiadores de las matemáticas, muchas teorías acerca de cómo y por qué los escribas decidían las fracciones que aparecen en esas tablas. Si los valores de las tablas se obtuvieron por ensayo y error, o si se obtienen de una regla particular, debemos reconocer que el Egipto antiguo construyó un buen conocimiento de los cien primeros enteros, de la tabla de duplicación y de ciertas igualdades aritméticas» [GRATTAN-GUINNES, 1994, p. 38].

Con el conocimiento actual sobre los números racionales resulta llamativo que los egipcios utilizasen, de forma casi exclusiva, sumas de fracciones unitarias para representar cantidades no enteras y positivas. Y más sorprendente resulta que tal manera de simbolizar las fracciones fuese empleado por diferentes culturas occidentales durante 4.000 años. Desde nuestra perspectiva este sistema empleado por los escribas se nos antoja como complejo y escasamente eficaz; sin embargo, hemos de admitir la importancia que tuvo como lo demuestra el hecho de que fuese tenido en consideración por un matemático como Fibonacci (las fracciones unitarias las considera como un caso especial de la regla que establece para separar fracciones en fracciones parciales), o para que en manuscritos rusos del siglo XVII hablen de medio-medio-medio-medio-medio-tercio para referirse a la fracción 1/96 [SMITH, 1953, pp. 211-212].

Interpretar el origen de las fracciones egipcias significa evaluar sintáctica y semánticamente un sistema de representación de cantidades no enteras, como el utilizado por el escriba Ahmés, y tiene el interés de dotar de significado a unos entes numéricos de amplio y dilatado uso en distintas culturas, significado sobre el que no hay una interpretación unánime por parte de los historiadores de las matemáticas.

Con este artículo queremos participar en el debate aportando una nueva visión del significado que tuvieron las fracciones para los antiguos egipcios, así como sobre las razones que les impulsaron a crear un sistema de representación que se nos antoja peculiar. Para ello, y tomando como base de análisis el Recto del Papiro de Rhind (en el que figuran las fracciones de la forma 2/n con n impar y menor que 105), hemos estudiado las expresiones fraccionarias desde la perspectiva de trabajo de los escribas, desde la óptica de quienes tienen que resolver problemas cotidianos de reparto. Nuestra intención, por tanto, no es la de buscar relaciones algebráicas que justifiquen las igualdades que aparecen en el Recto sino que analizamos las decisiones que tomaron los escribas para obtener el resultado de hacer repartos igualitarios.

En la primera parte de este trabajo hacemos un juicio crítico sobre las propuestas que han hecho diferentes historiadores sobre las fracciones utilizadas por los egipcios, reseñando aquellos argumentos que se nos antojan discutibles. Seguidamente, y establecidas las premisas de nuestro trabajo, analizamos el procedimiento de reparto del escriba Ahmés analizando distintos resultados que figuran en el Recto. Finalmente, añadimos dos procedimientos que pudo utilizar el escriba para realizar los cálculos utilizando las técnicas matemáticas disponibles en la época.

## 1. Sobre el significado de las fracciones egipcias

Existe una abundante literatura acerca de la manera en que los egipcios representaban cantidades no enteras de magnitud con el empleo, casi exclusivo, de sumas de fracciones unitarias [BABINI-REY PASTOR, 1973; BENOIT, CHEMLA y RITTER, 1992; KLINE 1972; SMITH, 1953; ARGÜELLES, 1989; HAROLD, 1989; BUNT, JONES y BEDIENT, 1987; DAHAN-DALMENICO y PFEIFFER, 1986; CAMPBELL y HIGGINS, 1984; DHOMBRES et al, 1987]. En estos textos se contemplan referencias sobre la matemática egipcia, se incluyen descripciones más o menos detalladas de la escritura de las fracciones, y se realiza un análisis más o menos profundo sobre los procedimientos aritméticos que utilizaban los escribas egipcios.

Sin embargo, quedan por explicitar los aspectos conceptuales subyacentes acerca del significado de las fracciones para los egipcios y acerca del motivo de utilizar fracciones unitarias. Desde diferentes enfoques o premisas encontramos interpretaciones diferenciadas sobre las fracciones egipcias.

a) Interpretar la fracción con sentido ordinal, como denominación de una de las partes en que se fracciona la unidad; significado que encontramos en Fauvel y Gray [1987, p. 22]:

«El método más común de expresar fracciones en Egipto era el uso de la palabra r *parte*, seguida de el número que en inglés corresponde al denominador.

Para los egipcios el número seguido de la palabra r tenía un significado ordinal; *parte 5* significaba la quinta parte en que termina una fila de partes iguales que juntas constituyen un conjunto simple de cinco. Siendo la parte que completa la fila en una serie del número indicado, la r-fracción egipcia era necesariamente una fracción con, como nosotros diríamos, la unidad como numerador. Para la mente egipcia parecería sin sentido y contradictorio escribir r–7 4, o 4/7; en una serie de siete sólo una parte puede ser la séptima, la que ocupa el lugar séptimo en la fila de siete partes iguales bien distribuida. Ni podría esperase del punto de vista de los egipcios que escribiesen r–7 (+) r–7 (+) r–7 (+) r–7, una escritura que parecería asumir que podría haber más de un verdadero *séptimo.* Consecuentemente estaban limitados a expresar 4/7 como 1/2 (+) 1/14» [Sir Alan GARDINER: sobre el concepto egipcio de parte, p. 22].

En estas reflexiones de Gardiner se utiliza el argumento de que los egipcios solamente emplean fracciones unitarias. Pero en los documentos existentes se pone de manifiesto que los egipcios admiten y utilizan la fracción 2/3 con el mismo estatus que las fracciones unitarias; y para esta fracción ya no son sostenibles los criterios de valor ordinal de las fracciones egipcias, puesto que debería tener el significado de *entidad completa formada por las partes segunda y tercera en que termina una fila de partes iguales que en conjunto constituyen un unidad.* Y este hecho de hablar de dos partes conjuntas no se corresponde con la idea de hacer referencia a una única parte, la que ocupa el último lugar de una serie ordenada de partes iguales de la unidad.

Además, no se exponen razones para que, desde la concepción de la fracción como ordinal, se pueda justificar que los egipcios optasen, por ejemplo, por la expresión 4/7 = 1/2 + 1/14 y no por la expresión 4/7= 1/3 + 1/6 + 1/14.

b) Una segunda interpretación sobre el significado de las fracciones para los antiguos egipcios la aporta Ritter [BENOIT, et al, 1992, pp. 30-31], para quien la fracción aparece asociada a la medida en contextos muy concretos:

«Existen evidencias —superficiales, incompletas pero sin duda sugestivas— de la existencia de medidas *fraccionarias* en la primera mitad del tercer milenio tanto en Egipto como en Mesopotamia».

Pero en el texto de Ritter no se muestran estas evidencias; si acaso podemos reconocer la apreciación de Ritter en las fracciones del ojo de Horus que recogen divisiones de la medida de capacidad Hekat. Por tanto, entendemos que más que de fracciones de una unidad habría que hablar de divisores de una unidad de medida, de submúltiplos de la unidad; estas subunidades jugarían un papel similar al de las diferentes subdivisiones de la unidad que utilizamos en el Sistema Métrico

Decimal, y que más que la consideración de fracciones se les otorga el estatuto de unidades propias que facilitan la expresión de la medida de cantidades de magnitud con números enteros.

c) Para otros autores la noción de las fracciones egipcias está asociada a resultados numéricos alcanzados como consecuencia de la aplicación de los conocimientos operatorios disponibles:

• Neugebauer [1969, p. 74] utiliza el hecho de que la arimética egipcia se sustente en las técnicas de duplicación y partición en mitades para justificar la existencia de dos tipos de fracciones unitarias: las *fracciones «naturales»* o fracciones que tienen asignado desde el principio un signo especial, son unidades individuales consideradas como conceptos básicos en igual nivel que los enteros: 2/3, 1/3, 1/2 y 1/4; las restantes fracciones, las *fracciones «algorítmicas»*, surgen como consecuencia inevitable de operaciones numéricas, están mucho menos arraigadas en el concepto elemental de entidades numéricas y, por procedimientos de partición, se derivan de las fracciones naturales, así 2/3 da lugar a 1/3, 1/6 1/12, ...; 1/2 da lugar a 1/4, 1/8, 1/16,...

A partir de esta hipótesis, Neugebauer [1969, p. 75], hace una descomposición en fracciones unitarias en los términos que ejemplifica con la fracción 2/5.

*Para representar* $\frac{2}{5}$ *en forma de* $\frac{1}{m}+\frac{1}{x}$

*elegimos* $\frac{1}{m}$ *como una fracción natural de* $\frac{1}{5}$;

*en este caso* $\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$

*Para la fracción restante tenemos*

$$\frac{1}{x}=\left(1+\frac{2}{3}\right)\frac{1}{5}=\frac{5}{3}\bullet\frac{1}{5}=\frac{1}{3}$$

*De aquí tenemos la representación de la tabla que aparece en el Recto*

$\frac{2}{5}=\frac{1}{15}+\frac{1}{3}$ *y de la que se deduce un resultado general* $\frac{2}{n}=\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{n}+\frac{5}{3}\bullet\frac{1}{n}$

*que proporciona una fracción unitaria siempre y cuando* n *sea múltiplo de* 5.

Aunque admiramos el interés de las aportaciones de Neugebauer, no suscribimos el procedimiento reseñado por cuanto en el mismo quedan lagunas como la de aplicar la técnica a cantidades que sean la suma de tres o más fracciones unitarias (y de las que aparecen suficientes ejemplos en el Recto del Papiro de Rhind), y porque el método presentado llega al resultado en orden inverso a como nos lo presentan los egipcios: en la descomposición que presenta Neugebauer primero se calcula el valor de la segunda fracción 1/15 y, posteriormente, se obtiene la que constituye la primera fracción de los egipcios, 1/3.

En los trabajos de Neugebauer parece considerarse a los escribas como expertos en la manipulación de entes numéricos abstractos (él mismo indica que la elección de la fracción natural de 1/5 se realizaría por procedimientos de ensayo y error), y no considera a los escribas como expertos en la resolución de problemas cotidianos en los que los números están asociados a la medida de cantidades de magnitud.

• El significado de fracción que se traduce en los argumentos utilizados por Collette [1985, pp. 48-49], para justificar la escritura egipcia $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$

Según dicho autor, la descomposición de 2/5 en la suma de dos fracciones se basa en la técnica de división sobre fracciones naturales por medio del *desdoblamiento*, siendo una de ellas el producto de una fracción natural (1/3) por la fracción 1/5, que da lugar a la fracción 1/15; el otro sumando de la descomposición se encuentra como producto de la parte restante (2 – 1/3) por la fracción 1/5, que da como resultado 1/3.

Seguidamente Collette justifica la validez de su método recurriendo a la escritura que del resultado hace el escriba Ahmes:

$$
\begin{array}{cc}
1 & 5 \\
\frac{2}{3} & 3\frac{1}{3} \\
\frac{1}{3} & 1\frac{2}{3}/ \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{3}/ \\
\hdashline
\mathbf{\frac{1}{3}+\frac{1}{15}} & \mathbf{2}
\end{array}
$$

Tanto el procedimiento de descomposición de las fracciones que describe Collette como la justificación del mismo merecen algunas consideraciones:

— Collette toma la decisión de usar la fracción 1/3 de 1/5 porque la técnica que denomina del desdoblamiento no funciona. Sin embargo, esto no es así, pues mediante la técnica del desdoblamiento se tendría:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{5} &= \frac{1}{5}+\frac{1}{5}= \\
&= \frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}= \\
&= \frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}= \\
&= \frac{1}{40}+\frac{1}{40}+\frac{1}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}= \\
&= \frac{1}{40}+\left[\frac{1}{40}+\frac{1}{10}\right]+\left[\frac{1}{20}+\frac{1}{5}\right]= \\
&= \frac{1}{40}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Vemos, por tanto, que sí es posible llegar a la descomposición de la fracción 2/5 usando la técnica que Collette llama de desdoblamiento. Eso sí, mediante esta técnica hemos llegado a la descomposición en tres sumandos en lugar de los dos que se logra por medio del uso de la fracción 1/3.

En los resultados que aparecen en los textos del escriba no hay una justificación sobre las fracciones que utiliza. Esto unido a la forma precisa e inequívoca en que se presentan los resultados nos lleva a concluir que el escriba lo que hace es comprobar que la descomposición de 2/5 está bien hecha, pero no consideramos que allí se plasme el modo en que se ha encontrado. Es más, el resultado del escriba Ahmés muestra las fracciones unitarias en orden diferente a como se obtienen siguiendo la técnica de Collette.

• Tampoco Boyer encuentra razones para la existencia de fracciones egipcias desde un razonamiento de tipo aritmético:

> «No nos parece nada claro por qué de la descomposición $2/n = 1/n + 1/2n + 1/3n + 1/(2.3.n)$ es mejor que la $1/n + 1/n$. Quizá uno de los objetos de la descomposición de 2/n era el de llegar a fracciones unitarias menores que 1/n salvo una de ellas» [1986, p. 35].

Sin embargo, no profundiza en las razones por las que los escribas toman la decisión de que solamente una fracción sea de la forma 1/n; ni tampoco analiza otras formas de escritura de las fracciones, como el caso de $2/9 = 1/6 + 1/18$, en los que no se aplica la descomposición que menciona.

## 2. El punto de partida

En los significados de la fracción egipcia reseñados con anterioridad encontramos una importante presencia de justificaciones matemáticas, de argumentos sustentados en la interpretación de relaciones operatorias entre entes numéricos abstractos; interpretaciones que resultan vulnerables a la crítica. De aquí que intentemos buscar significados de las fracciones egipcias desde la perspectiva que ofrece Newman [1980, p. 99] de asociar estos entes numéricos a la realidad social en que aparecen:

> «Estamos obligados a darnos cuenta de cuán poco sabemos de las circunstancias del progreso cultural: por qué se desplazan las sociedades —aunque tal vez es que saltan— de una órbita de energía cultural a otra, por qué la ciencia de Egipto *recorrió su camino sobre renglones torcidos* y se adhirió de modo tan tenaz a sus primitivas reglas».

Desde este posicionamiento entendemos que las fracciones egipcias hay que contemplarlas con el significado y uso que tuvieron como conocimientos matemáticos en una época determinada, así como del papel reservado a la matemática en el contexto social y cultural de la época. Y es en ese contexto en el que asumimos que las fracciones egipcias constituyen un sistema de representación [RICO, CASTRO y ROMERO, 1997], un lenguaje de comunicación de las cantidades no enteras y positivas; y que como tal sistema de representación está sometido a unas normas sintácticas y puede evaluarse semánticamente [KAPUTT, 1987]. Es más, entendemos que este sistema de representación, al igual que otros, surge de las necesidades de comunicación de los resultados de las manipulaciones de objetos del mundo real, está asociado a la cuantificación de cantidades de magnitud que se obtienen al resolver problemas cotidianos.

Pero, ¿cuáles son esas necesidades cotidianas que dan lugar a la aparición de un nuevo sistema de representación? Aunque compartimos la opinión de Roero [GRATTAN-GUINNES, 1994, p. 43] acerca de la dificultad de dar una única y concluyente respuesta a cualquier tema de la matemática egipcia *dedido a la escasez de documentos en nuestro poder y a la pobreza de conceptos inherentes a ellos,* sí que se puede afirmar que la aparición de las fracciones tiene lugar al hacer tareas diferentes de las de contar, puesto que los resultados de las tareas de contar se comunican con el sistema de numeración aditivo de que ya disponen los egipcios.

Las tareas en las que los resultados no se pueden comunicar con el sistema de numeración son las que corresponden a la resolución de problemas de reparto, problemas que son habituales en el quehacer de los escribas: *los papiros de Rhind y de Moscú son manuales para los escribas, dando ejemplos de cómo hacer las cosas que forman parte de sus tareas cotidianas. [...]* [FAUVEL y GRAY, 1987, p.23]. *Los 110 problemas de los papiros de Rhind y de Moscú tienen un origen práctico relacionado con repartos de pan y de cerveza, con mezclas de comida para ganado y aves domésticas y con el almacenamiento de grano* [EVES, 1969, p. 37].

Después, y cuando ya se dispone de un sistema de representación, el espíritu científico lleva a ampliar su campo de aplicabilidad a contextos diferentes:

> « [...] hay también problemas que no conciernen a objetos específicos [...] se puede pensar que el Papiro de Rhind es un manual con ejercicios para jóvenes estudiantes. Detrás de problemas prácticos hay algunos problemas teóricos puestos en forma concreta, y a veces el escriba parece tener en la mente puzzles o recreaciones matemáticas» [GRATTAN-GUINNES, 1993, p. 38].

Estamos, por tanto, ante la aparición de unos entes numéricos que responden a la necesidad de dar respuesta a problemas concretos, soluciones que implican la creación de unos entes numéricos nuevos y diferentes de los conocidos para simbolizar a los números naturales [CROSSLEY, 1987; FLEGG, 1989; CAJORI, 1985]. Ahora bien, para que esos resultados sean comunicados, para que haya intercambio de informaciones comprensibles, se necesita que desaparezca la arbitrariedad en el uso de símbolos, que los símbolos resulten comprensibles para la sociedad; en suma, que se consolide un verdadero sistema de representación simbólico [KAPUTT, 1987; RICO, CASTRO y ROMERO, 1996], regido por normas sintácticas y semánticas muy precisas y asumidas por la colectividad.

Toda vez que los egipcios crean un sistema de representación de las cantidades no enteras, nos preguntamos ¿por qué necesita el escriba Ahmés construir una tabla de fracciones como la que se recoge en el Recto del Papiro de Rhind?, ¿no es suficiente con conocer las características sintácticas y semánticas del sistema de representación?

Desde nuestra perspectiva actual no tendría sentido disponer de una tabla con las fracciones de la forma 2/n para n impar y menor o igual que 103, puesto que disponemos de argumentos generales suficientes para comparar y operar fracciones ordinarias. Pero si el escriba Ahmés incluye dicha tabla entre sus escritos hay que reconocerle la utilidad de una tabla de resultados con una finalidad similar a la que han jugado las tablas en matemáticas, de las que las de logaritmos constituyen un ejemplo universal. Por ello hay que presuponer que dicha tabla contenía información valiosa de cómo obtener unas expresiones de uso frecuente y que, a buen seguro, resultaban costosas de alcanzar: las tablas permitían disponer de forma inmediata de resultados complejos de obtener.

Esta tabla, en opinión de Guillings (1972), se construye de acuerdo con 5 preceptos: 1) de las posibles igualdades se prefiere aquellas con los números más pequeños, sin que ninguno supere a 1000; 2) se prefiere una igualdad de 2 términos a una de 3, y una de 3 a una de 4 y no se utiliza ninguna igualdad con más de 4 términos; 3) las unidades fraccionarias figuran en orden de magnitud descendente, los primeros números son los más pequeños, y nunca aparece dos veces la misma fracción; 4) la pequeñez del primer término es la consideración principal, pero el escriba aceptará un ligero incremento del primer número si con ello consigue una importante reducción en el último número; 5) se prefiere a los números pares frente a los impares, aunque ello de lugar a números mayores y a que el número de términos resulte incrementado. El propio Guillings investiga, de manera sistemática, que estos criterios se cumplen al analizar todas las igualdades que pueden darse para cada fracción de la forma 2/n, con n impar.

Nuestro posición es la de tomar un punto de vista diferente al de Guillings: el escriba va construyendo la tabla de acuerdo con las necesidades de su trabajo y, por lo tanto, no establece criterios apriorísticos sobre los resultados que se incluyen en la tabla. Pensamos que el trabajo del escriba consiste en recoger resultados producidos como consecuencia de aplicar su concepto de fracción en casos de especial dificultad y utilidad. De hecho, no necesita una tabla para fracciones de la forma 2/2n, puesto que dichas fracciones pueden reducirse al caso 1/n; y el resultado de cualquier otra fracción de la forma a/n puede alcanzarlo, por duplicación, a partir de la fracción 2/n.

A la vista de estas consideraciones enunciamos dos premisas desde las que vamos a dar una interpretación de las fracciones egipcias y desde las que caracterizaremos el sistema de representación utilizado por los escribas para simbolizar cantidades no enteras y positivas:

1. Las fracciones egipcias constituyen un sistema de representación simbólico con el que se expresan las cantidades positivas no enteras; la complejidad de este sistema demanda del uso de tablas.

2. Este sistema de representación se construye desde la necesidad de resolver situaciones problemáticas cotidianas sobre repartos igualitarios.

## 3. El sistema de representación de cantidades no enteras en el antiguo Egipto

El Recto del Papiro de Rhind contiene suficientes ejemplos de fracciones egipcias como para hacer un estudio detallado del mismo en busca del significado que tuvieron las fracciones para los escribas. A través de distintos resultados de este Recto vamos a describir un concepto de fracción que resulta complejo porque, en nuestra opinión, está íntimamente relacionado con situaciones problemáticas de la vida cotidiana.

En lo sucesivo simbolizamos por a:b el resultado (lo que recibe cada participante) de un reparto igualitario de a unidades entre b participantes.

### *3. 1. La técnica de reparto*

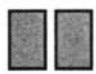
Tratamos de simular las condiciones de trabajo de los escribas para obtener información acerca del significado y representación de las fracciones, utilizando situaciones de reparto. En una primera aproximación vamos a resolver el siguiente problema:

***Se tienen que repartir dos bizcochos entre cinco personas de modo que cada una reciba la misma cantidad de bizcocho, ¿cuánto bizcocho le corresponde a cada persona?***

Una primera idea que aparece desde nuestro conocimiento actual de las fracciones nos impulsa a pensar en el reparto como división de cada bizcocho en 5 partes iguales y dar 2 de ellas a cada una de las personas; así alcanzamos la descomposición $2:5=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$.

TÉCNICA DE REPARTO

RESULTADO DEL REPARTO



Si ésta fuese la forma de efectuar el reparto entre los egipcios la noción de fracción sería similar a la nuestra actual, sin embargo no lo hacen así. Nuestro pensamiento es que toman la idea de reparto por medio de aproximaciones sucesivas, haciendo el reparto en varias fases: dar a cada uno de los asistentes una cierta cantidad de magnitud y si se queda alguna cantidad por repartir proceder de forma similar sobre las cantidades sobrantes hasta agotar las existencias. De este modo, el reparto 2:5 puede efectuarse así:

«Es evidente que a cada una de las 5 personas no podemos darle un bizcocho entero; tan sólo le corresponderá una parte de un bizcocho. Por tanto, hay que fraccionar cada uno de los bizcochos, hay que dividirlos en un número entero de partes iguales de modo que podamos dar una de esas partes a cada persona; así si los dividimos en 2 partes cada bizcocho tendremos 4 partes y no tenemos partes suficientes para los 5 participantes. Pero si dividimos en 3 partes iguales cada bizcocho obtenemos 6 partes con lo que ya podemos entregar a cada uno de los 5 participante una de esas partes y sobrará una de esas partes

Esta parte de bizcocho sobrante se puede dividir en 5 partes iguales y así podemos dar a cada participante una de estas partes y el reparto habrá terminado»[1].

TÉCNICA DE REPARTO

RESULTADO DEL REPARTO

Este procedimiento nos lleva a obtener el resultado del reparto de 2 unidades entre 5 personas en la forma $2:5=\frac{1}{3}+\frac{1/3}{5}=\mathbf{\frac{1}{3}}+\mathbf{\frac{1}{15}}$

Obsérvese que el modo en el que se ha expuesto esta forma de hacer repartos es concordante con los resultados que presentan las descomposiciones de fracciones en suma de fracciones unitarias que aparece en el Recto: la primera fracción representa una cantidad mayor que la segunda fracción; ésta representa una cantidad mayor que la tercera fracción; y así sucesivamente. Este procedimiento es el que ejemplifica la concepción que nosotros asociamos al origen y puesta en práctica de la descomposición de la fracción $\frac{a}{b}$ en suma de fracciones unitarias:

— Las fracciones unitarias egipcias están asociadas a la resolución de repartos igualitarios.

— La suma de las fracciones unitarias indica la cantidad de magnitud, medida con la unidad inicial, que corresponde a cada uno de los participantes en el reparto de a unidades entre b individuos (a : b).

— Los repartos se realizan por el procedimiento de dar inicialmente a cada participante unidades enteras; si ello no es posible se dividen las unidades en un número de partes iguales de modo que se pueda dar a cada participante una de las partes resultantes, y si con ello no se finaliza el reparto actuar de forma similar con la parte sobrante; es decir, el reparto se hace en fases sucesivas.

— Los egipcios utilizan las fracciones unitarias 1/a para expresar la cantidad de magnitud resultante de dividir la unidad en a partes iguales; siendo a el número de partes en que hay que dividir las unidades a repartir (o partes de esas unidades) para que se pueda entregar una de esas partes a cada uno de los participantes.

Hay que hacer una mención especial al caso de la fracción 2/3, que los egipcios utilizan con el mismo estatus que las fracciones unitarias. Pensamos que los escribas admiten el uso de la fracción 2/3 porque con ello se reduce el número de fases del reparto, así, por ejemplo, 11/12 se puede descomponer como 2/3 + 1/4, mientras que si tal descomposición se hace solamente con fracciones unitarias se precisan tres fases 1/2+1/3+1/12.

Cabe pensar que este criterio de economía podía aplicarse a otras fracciones como 3/4, 5/6, 7/8, ... que también acortarían las fases del reparto y, sin embargo, no lo hicieron los egipcios. Suponemos que entre las razones de limitarse al uso de 2/3 cabe citar el uso prioritario de las divisiones de la unidad (o de las partes de la unidad) en 2 y 3 partes iguales, que la fracción 2/3 conlleva el trabajo con partes de unidad de mayor tamaño que en el caso de las otras fracciones, y que no se considera la posibilidad de crear nuevos símbolos para representar fracciones que se obtienen fácilmente desde las unitarias naturales (3/4=1/2+1/4; 5/6=1/2+1/3; 7/8=1/2+1/4+1/8, ...).

### *3. 2. La descomposición en fracciones unitarias: procedimiento de «la parte mayor»*

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, podemos adelantar una primera concepción acerca de los procedimientos seguidos por los egipcios para realizar tareas de reparto, y que podemos sintetizar en los términos siguientes:

Se observa si el reparto permite dar a cada uno de los individuos una o más unidades completas. Si no resta ninguna unidad, el reparto ha concluido.

En el supuesto de que haya que repartir a unidades entre b individuos, con b>a, se aplica, de forma reiterada, el procedimiento que denominamos *como la parte mayor.*

*Si 3a >2b a cada individuo le corresponde 2/3 de unidad.*

*En caso contrario, cada individuo recibe 1/n de unidad, siendo n un número natural que cumple* $n.a \geq b > (n-1).a$.

Esta definición interpretada en el contexto de las fracciones egipcias significaría que *la parte mayor* es el mayor cantidad de magnitud que puede darse a cada uno de los b individuos entre los que hay que repartir igualmente a unidades.

El reparto de a unidades entre b individuos, con b>a, siguiendo el procedimiento de dar a cada individuo *la parte mayor* en cada una de las fases del proceso, se resume así:

$$a : b = \frac{1}{n} + \{(na - b) : b\}\left[\frac{1}{n}\right] \quad ;; na \geq b > (n-1)a$$

- a unidades a repartir;
- b individuos entre los que se reparten;
- 1/n la parte de unidad que corresponde a cada uno de los individuos en la primera fase del reparto;
- na–b las partes que han sobrado en la primera fase del reparto y que hay que repartir igualitariamente entre los b individuos;
- [1/n] indica el tamaño, respecto a la unidad inicial, que tienen las partes sobrantes en la primera fase del reparto.

• Si las unidades a repartir (na–b) son mayores de 1, hay que hacer un nuevo reparto de esas unidades entre los b individuos, siguiendo el procedimiento de *la parte mayor* y teniendo en cuenta que esas unidades a repartir son de tamaño de la unidad inicial.

• En el caso de ser (na–b)=1 se fracciona esa unidad en b partes iguales, se entrega a cada participantes una de esas partes y el reparto ha concluido.

Cubiertas las sucesivas fases el reparto tiene como resultado:

$$a:b=c+\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_1n_2}+\ldots+\frac{1}{n_1n_2\ldots n_p} \quad (n_i \in N \text{ y } n_i \neq 0)$$

Este proceso es finito por cuanto los numeradores de las sucesivas fracciones no unitarias son cada vez menores. Además, la propia construcción del proceso nos muestra que el procedimiento de descomposición en fracciones unitarias en cada uno de los repartos la opción representada por *la parte mayor* es único.

De acuerdo con este procedimiento, se encuentran resultados que aparecen en el Recto del Papiro de Rhind, como 2 : 5 = 1/3 + 1/15 „ 2 : 7 = 1/4 + 1/28 „ 2 : 23 = 1/12 + 1/276.

> La fracción egipcia, que venimos asociando a la idea de reparto, utiliza como procedimiento el de conceder, en cada una de las fases del proceso, una parte igual a cada uno de los individuos, siendo *la parte mayor* la que determina la cantidad de unidad que corresponde a cada uno de esos individuos.

### *3. 3. La realización física del reparto: variar el criterio de la mayor parte*

El procedimiento de descomposición de una fracción en fracciones unitarias aparece como algotimizable y único si se utiliza el procedimiento que venimos denominando *la parte mayor*. De hecho, todas las fracciones que aparecen en el Recto se pueden descomponer en la suma de dos fracciones unitarias:

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{p}+\frac{2p-n}{np}=\frac{1}{p}+\frac{1}{np} \quad \text{siendo } 2p \geq n > 2(p-1)$$

Sin embargo, la mayoría de los resultados que aparecen en dicho documento no se corresponden con este procedimiento; así que surgen preguntas como ¿por qué la fracción 2/9 no se escribe como 1/5 + 1/45 y sí que se hace como 1/6 + 1/18?, ¿qué razones hay para cambiar el procedimiento de *la parte mayor*?, ¿qué aportan otros procedimientos de reparto?

Nuestro posicionamiento es, como ya establecimos anteriormente, que la descomposición en fracciones unitarias debe ubicarse en el contexto de los repartos reales, no en el de los repartos como ejercicios teóricos; es decir, hay que situar los cálculos numéricos como resultados de problemas de la vida cotidiana, hay que considerar a las fracciones con el estatuto de cantidades de magnitud asociadas a repartos y no como entes numéricos abstractos.

Desde esta perspectiva encontramos, en el reparto de 2 unidades entre 9 individuos, justificación a razonamientos del escriba como el siguiente:

*«Si utilizo este procedimiento resulta que a cada individuo le tengo que dar inicialmente 1/5 de unidad; pero dividir la unidad en 5 partes iguales no es sencillo, así que voy a buscar otra manera, como la de dar una primera parte de tamaño 1/6 (resulta más sencilla la partición), y después ya veremos cómo reparto lo que sobre».*

Es en este sentido como resulta plausible que el escriba cambiase la solución, digamos teórica, de *la parte mayor* por otra solución que facilitase la realización física del reparto. Supuesto que reitera nuestro posicionamiento en el sentido de admitir que en la realización de los repartos entre los egipcios se concede prioridad a la aplicación práctica frente a resultados teóricos.

Es más, esta necesidad de utilizar los resultados en la vida real concede pleno significado las fracciones *naturales* de Neugebauer (2/3, 1/3, 1/2 y 1/4), puesto que son éstas las que permiten hacer particiones de la unidad de manera sencilla y que, a nuestro juicio, son las que determinan que el escriba sustituya el procedimiento de *la parte mayor* por otro procedimiento real de realización menos dificultosa. Desde esta perspectiva el escriba podría actuar del siguiente modo para el reparto 2 : 9, que teóricamente ofrecía la solución 1/5 + 1/45:

a) Divido en un número de partes inmediatamente superior al que ya tengo, en este caso habría que dividir en 6 partes, con lo que se obtiene $2 = 12\left[\frac{1}{6}\right]$ (se interpreta como 12 partes de tamaño 1/6 de unidad).
b) Dar una de esas partes a cada una de las 9 personas. Quedan 3 partes de tamaño 1/6.
c) 3 partes entre 9 personas hace corresponder $\frac{1}{3}$ de cada una de esas partes.
d) Cada persona recibe $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}\right]=\mathbf{\frac{1}{6}+\frac{1}{18}}$

Esta es la solución que aporta el escriba en el Recto. Obsérvese que, en este caso, la realización práctica de este reparto exige que a cada individuo hay que darle en el primer reparto la sexta parte de la unidad —la tercera parte de la mitad de una unidad—, y en el segundo reparto la dieciochoava parte de la unidad —la tercera parte de una sexta parte—. Este modo de repartir resulta más fácil de realizar físicamente que el que tendría que hacerse en la descomposición 1/5 + 1/45 pues en este caso se exige dividir la unidad en 5 partes iguales (primer reparto), así como dividir en 5 partes iguales la novena parte de la unidad (segundo reparto).

Se abandona el procedimiento de *la mayor parte* y se determina el tamaño de las partes disminuyendo ordenadamente el tamaño de las mismas hasta conseguir que las particiones resulten de más fácil puesta en práctica.

### *3. 4. La modificación de las partes*

Un nuevo ejemplo sacado del Recto nos permitirá avanzar en la construcción de las fracciones egipcias, contemplando situaciones diferentes de las tratadas con anterioridad. En concreto vamos a justificar la decisión del escriba de realizar el reparto de 2 unidades entre 13 individuos como 1/8 + 1/52 + 1/104.

De acuerdo con lo expuesto en los apartados 1, 2 y 3, el trabajo del escriba podemos pensar que sería similar al que exponemos:

***Decisión I.***— Aplicar el procedimiento de *la parte mayor* da como resultado $2:13=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}$

Al llevar este resultado a la práctica real del reparto observamos que debemos dividir una unidad en 7 partes iguales; después una de esas partes hay que dividirla en 13 partes iguales. Pero hacer estas particiones no es sencillo, por lo que buscamos otro procedimiento que facilite las particiones, sin olvidar que seguramente hay que hacer una partición en 13 partes iguales puesto que, salvo factores divisibles, $\frac{a}{b}=\frac{1}{p}+\frac{pa-b}{b}\left[\frac{1}{p}\right]$

En lo sucesivo, emplearemos las expresiones del tipo $(x:y)\left[\frac{1}{p}\right]$ para indicar el reparto de x partes de tamaño $\left[\frac{1}{p}\right]$ de unidad entre y individuos.

***Decisión II.***— Búsqueda de otras particiones iniciales.

Aumentar ordenadamente el tamaño de las partes, el número de partes iguales en que se divide inicialmente la unidad, y estudiar cómo se reparten las partes sobrantes.

a) Si divido en 8 partes iguales tendré 16 partes de $\left[\frac{1}{8}\right]$ tamaño de unidad.

b) Al repartir 16 partes entre 13 corresponde a cada persona una parte de tamaño $\left[\frac{1}{8}\right]$ de unidad y sobran 3 partes de tamaño $\left[\frac{1}{8}\right]$ de unidad.

c) Repartir 3 partes entre 13 personas, manteniendo el principio *de la parte mayor* daría como resultado $3:13=\frac{1}{5}+\frac{2\frac{1}{5}}{13}=\frac{1}{5}+\frac{2}{13}\left[\frac{1}{5}\right]$.

d) El reparto sería:

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{3}{13}\left[\frac{1}{8}\right]=\frac{1}{8}+\frac{1}{5}\left[\frac{1}{8}\right]+\left\{\frac{2}{13}\left[\frac{1}{5}\right]\right\}\left[\frac{1}{8}\right]=\frac{1}{8}+\frac{1}{40}+\frac{2}{13}\left[\frac{1}{40}\right]$$

Y esto nos lleva a un proceso repetitivo, ya que de nuevo hay que realizar el reparto de dos unidades (de tamaño $\left[\frac{1}{40}\right]$ de unidad), entre 13 personas.

En consecuencia, hay que abandonar este procedimiento y retomar la tarea del reparto desde el apartado c).

c') Se hacen intentos aumentando el número de partes en que se dividen los $3\left[\frac{1}{8}\right]$ entre 13 y he aquí los resultados que se obtienen:

$$3:13=\frac{1}{6}+\frac{5}{13}\left[\frac{1}{6}\right]$$

$$3:13=\frac{1}{7}+\frac{8}{13}\left[\frac{1}{7}\right]$$
$$3:13=\frac{1}{8}+\frac{11}{13}\left[\frac{1}{8}\right]$$
$$3:13=\frac{1}{9}+\frac{14}{13}\left[\frac{1}{9}\right]$$
$$3:13=\frac{1}{10}+\frac{17}{13}\left[\frac{1}{10}\right]$$

Es evidente que este proceso no va a permitir la descomposición (reparto) buscada puesto que cada vez aumenta el número de partes, lo que significa que cada una de ellas es de tamaño cada vez menor).

En esta tesitura, el escriba no tiene más opciones que intentar una nueva vía para descomponer la fracción 3/13. Es más, los intentos han de ir por un camino distinto al de disminuir *la parte mayor*, puesto que este principio ya ha sido roto desde el momento en que se optó por desechar un reparto en 7 partes iguales.

¿Qué variaciones se pueden incluir? A la vista de los resultados anteriores, parece claro que el reparto se va a ir complicando porque las partes en que se dividen las unidades son cada vez menores; por tanto, hay que intentar modificar el tamaño de las partes. Y así, cabe un razonamiento del siguiente tipo:

La tarea inicial de repartir 3 partes de tamaño $\left[\frac{1}{8}\right]$ de unidad entre 13 personas, se transforma en dos: repartir 2 partes entre 13 personas y una parte entre 13 personas. De este modo, quedaría la situación siguiente:

• 2 partes de tamaño $\frac{1}{8}$ se convierten en 1 parte de tamaño $\frac{1}{4}$, que distribuida entre 13 personas proporciona $\frac{1}{13}\left[\frac{1}{4}\right]=\mathbf{\frac{1}{52}}$ de unidad por persona.

• 1 parte de tamaño $\frac{1}{8}$ distribuida entre 13 personas proporciona $\frac{1}{13}\left[\frac{1}{8}\right]=\mathbf{\frac{1}{104}}$ de unidad por persona.

Después de este trabajo, que a buen seguro actualmente nos parece tan laborioso como inadecuado, encontramos la solución al problema propuesto y que podemos enunciar diciendo que cada una de las 13 personas recibe la cantidad de unidad indicada por la suma

$$2:13=\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}=\frac{1}{8}+\frac{1}{13}\left[\frac{1}{4}\right]+\frac{1}{13}\left[\frac{1}{8}\right]$$

Esta solución es la que aparece en el Recto y su puesta en práctica nos indica que las 2 unidades hay que dividirlas en 8 partes iguales (tarea más sencilla que la de hacerlo en 7 partes iguales); además, una cuarta parte de la unidad hay que dividirla en 13 partes iguales y una octava parte de la unidad hay que dividirla en 13 partes. Como la división en 13 partes no hemos podido evitarla, debemos concluir que esta forma de reparto sí que resulta más sencilla de llevar a la práctica que la propuesta por el procedimiento de *la parte mayor*.

A la vista de la complejidad del proceso resulta comprensible la existencia de tablas en las que los escribas recogían resultados de operaciones y que así evitaban repetir el proceso en situaciones similares. Por tanto, las tablas se configuran como herramientas de trabajo del escriba de una valía muy importante.

> Si al disminuir el tamaño de las partes no se facilita la tarea de las particiones, se efectuará una separación de las partes en dos o más sumandos de manera que puedan hacerse repartos más sencillos.

### *3. 5. La partición se efectúa sobre cantidades mayores*

Siguiendo el análisis de los resultados del Recto que no cubren la casuística estudiada hasta ahora, nos planteamos hacer el reparto de 2 unidades entre 15 personas, cuyo resultado aplicando el procedimiento *de la parte mayor* sería 1/8 + 1/120, mientras que el que propone el escriba Ahmés es 1/10 + 1/30. Esta propuesta resulta, en principio, sorprendente por cuanto el resultado 1/8 + 1/120 no plantea dificultades para ponerlo en práctica. Así que volveremos a simular las decisiones del escriba.

***Decisión I.***— Procedimiento de *la parte mayor*.

Para alcanzar el resultado $\frac{1}{8}+\frac{1}{120}$ se necesitan dar los pasos siguientes:

*Paso 1)* Dividir las unidades en 8 partes iguales, que se hace por divisiones sucesivas en dos partes. Cada una de las personas recibe 1/8 de unidad y sobra 1/8 de unidad.

*Paso 2)* Sobre una parte de tamaño 1/8 hay que hacer la partición en 3 partes iguales y, después, volver a subdividir cada una de esas partes en 5 partes iguales. De este modo se presume que las últimas particiones serán complejas por la *pequeñez* de los trozos.

***Decisión II.***— Procedimiento alternativo.

Reduciendo el tamaño de las partes se llega al resultado 1/10 + 1/30, resultado que para ponerlo en práctica requiere los siguientes trabajos:

*Paso 1)* Dividir la primera unidad en 10 partes iguales, es decir dividirla en dos partes y cada una de ellas subdividirla en 5 partes iguales.

*Paso 2)* Dividir la segunda unidad en dos mitades, y una de ellas volverla a subdividir en 5 partes iguales. Ya se puede dar a cada persona 1/10 de unidad.

*Paso 3)* La mitad de unidad que queda dividirla en 15 partes iguales: primero en 3 partes y, después, cada una de ellas en 5 partes.

Con estas descripciones resulta más claro entender la elección del escriba, por cuanto la segunda opción permite realizar las particiones en mejores condiciones: en ambos procesos hay que hacer divisiones en cinco partes iguales; sin embargo, en el segundo procedimiento las cantidades de unidad que hay que dividir en cinco partes iguales son de mayor tamaño y, en consecuencia, permiten realizar la tarea con mayor facilidad.

Otro ejemplo: en el reparto de 2 unidades entre 29 personas se pone de manifiesto que el escriba tiene que tomar una decisión como la comentada. En efecto, después de utilizar el procedimiento de *la parte mayor*, de reducir el tamaño de las partes y de modificar el tamaño de las mismas, llegamos a dos propuestas que se muestran adecuadas y sobre las que habría que decidir.

$$\text{A) } 2:29=\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{232}+\frac{1}{464}$$

$$\text{B) } 2:29=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}$$

En principio, hacemos notar que para llegar a cualquiera de las dos opciones hay que dividir inicialmente en 24 partes. Es más, en las dos opciones aparecen divisiones en 29 partes de alguna cantidad de unidad. Resulta, por tanto, oportuna la pregunta ¿por qué el escriba opta por la descomposición B? La respuesta la encontraremos al detallar el proceso de reparto:

Los resultados se logran del siguiente modo (señalamos con : la condiciones del reparto y entre corchetes el tamaño de las partes):

$$\text{A) } 2:29[1]=\frac{1}{24}+(19:29)\left[\frac{1}{24}\right]=\text{reiterando el proceso}=$$

$$=\frac{1}{24}+\left\{\frac{1}{2}+(9:29)\left[\frac{1}{2}\right]\right\}\left[\frac{1}{24}\right]=\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+(9:29)\left[\frac{1}{48}\right]=$$

$$=\text{descomposición en sumas}=$$

$$=\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\{(6:29)+(3:29)\}\left[\frac{1}{48}\right]=\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+(1:29)\left[\frac{1}{8}\right]+(1:29)\left[\frac{1}{16}\right]$$

$$\text{B) } 2:29[1]=\frac{1}{24}+(19:29)\left[\frac{1}{24}\right]=\text{descomposición en sumas}=$$

$$=\frac{1}{24}+\{(12:29)+(4:29)+(3:29)\}\left[\frac{1}{24}\right]=$$

$$=\frac{1}{24}+(1:29)\left[\frac{1}{2}\right]+(1:29)\left[\frac{1}{6}\right]+(1:29)\left[\frac{1}{8}\right]$$

De la comparación de los resultados es clara la opción del escriba Ahmés por el caso B puesto que las divisiones en 29 partes, que son inevitables en ambos casos, se realizan sobre partes de la unidad de tamaño mayor, pues en el caso A tal división hay que efectuarla sobre una parte de tamaño 1/16 de unidad, mientras que en el caso B la división sobre la parte más pequeña es sobre 1/8 de unidad.

Ante dos resultados que necesiten de trabajos similares para llevarlos a la práctica se elige aquel que permita hacer las particiones sobre trozos de unidad de tamaño más grande.

### *3. 6. El momento de realizar el reparto*

Guillings (1972) señala como anómalo el resultado que ofrece el Recto de la descomposición 2/95. Este autor indica que el resultado del Recto (1/60 + 1/380 + 1/570) podía haberse mejorado poniendo 1/60 + 1/228, alternativa que resulta de considerar que 1/380 + 1/570 = 1/228. Sin embargo, algunas razones debieron provocar esta elección de Ahmés y que vamos a justificar a través del proceso real de efectuar un reparto de 2 unidades entre 95 individuos.

Damos por supuesto que el escriba ya conoce la parte que corresponde entregar a cada individuo en la primera fase (1/60 de unidad). Y comienza a efectuar tales entregas para lo cual divide la primera unidad en 60 partes iguales las entrega a 60 individuos y quedan 35 por recibir su parte que debe salir de la división de la segunda unidad. Para ello, va dividiendo en partes iguales (primero en 2, después en 2, luego en 3 y, finalmente, en 5 partes), tal y como se resume en el esquema siguiente:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1/2 | 1/4 | 1/12 | .........Entrega a 5 individuos 1/60 de unidad |
| | | 1/12 | .........Entrega a 5 individuos 1/60 de unidad |
| | | 1/12 | .........Entrega a 5 individuos 1/60 de unidad |
| | 1/4 | 1/12 | .........Entrega a 5 individuos 1/60 de unidad |
| | | 1/12 | .........Entrega a 5 individuos 1/60 de unidad |
| | | 1/12 | .........Entrega a 5 individuos 1/60 de unidad |
| 1/2 | 1/4 | 1/12 | .........Entrega a 5 individuos 1/60 de unidad |
| | | 1/12 | ......... |
| | | 1/12 | ......... |
| | 1/4 | 1/12 | ......... |

Después de entregar su parte (de tamaño 1/60 de unidad), a cada uno de los 35 individuos restantes, los 95 individuos han recibido una parte igual y quedan por repartir una parte de tamaño 1/4 de unidad y 2 partes de tamaño 1/12 de unidad.

Este reparto se efectúa repartiendo primero la parte de mayor tamaño, 1/4 de unidad, entre los 95 individuos, con lo que cada uno recibe 1/380 de unidad. Después se observa que las dos partes restantes, de tamaño 1/12 de unidad, equivalen a una parte de tamaño 1/6 de unidad, que al repartirla entre los 95 individuos concede a cada uno 1/570 de unidad y el reparto ha concluido. Es evidente que el escriba podría haber unido las 5 partes de tamaño 1/12 que sobran en la primera fase y considerar que 95 es divisible por 5; de este modo podría haber obtenido el resultado del reparto 5:95 (1/12) como 1:19 (1/12) = 1/288.

Estas reflexiones nos vienen a confirmar los supuestos iniciales sobre la estrecha relación entre resultados matemáticos y resolución de problemas reales. Para el escriba ha sido su práctica cotidiana la que le impulsa a actuar como lo hizo otras veces y observar que el reparto del resto de la primera fase se debe completar tal y como él lo hizo en ocasiones precedentes; por tanto, la actuación del escriba no es imputable a sus errores o desconocimientos aritméticos sino a su fidelidad al procedimiento de reparto que ha ideado.

## *A modo de síntesis*

La forma en que los egipcios llevaban a la práctica el reparto de a unidades entre b individuos se efectuaba del siguiente modo:

1. El procedimiento inicialmente utilizado es el de *la parte mayor*, lo que lleva a un reparto en la forma $a:b=\frac{1}{p}+\frac{c}{b}\left[\frac{1}{p}\right]$

2. Si el procedimiento de *la parte mayor* se considera dificultoso para ponerlo en práctica, se analizan otras opciones incrementando de forma ordenada el valor de p, lo que significa disminuir el tamaño de las partes que se dan en la primera fase del reparto. Es previsible que se eliminen, inicialmente, algunas opciones: que p sea impar, que p sea múltiplo de 7, de 11, .... Estas opciones se reconsideran en el caso de que no se encuentre una solución satisfactoria.

3. En cada una de las opciones que aparezcan al aumentar el valor de p, se estudia la viabilidad del reparto que representa la expresión $(c:d)\left[\frac{1}{p}\right]$ y ello se puede hacer por dos vías:

- Reiterar el proceso de división c : b.

- Modificar el tamaño de las partes, es decir, buscar la descomposición de $c\left[\frac{1}{p}\right]$ en suma de fracciones con denominador menor que p.

4. La elección entre dos resultados $\frac{a}{b}=\frac{1}{p'}+\frac{c'}{b}\left[\frac{1}{p'}\right]$ y $\frac{a}{b}=\frac{1}{p''}+\frac{c''}{b}\left[\frac{1}{p}\right]$ viene determinada por dos factores:

• Se elige de entre los valores p' y p'' aquel que permita hacer las particiones de la forma menos dificultosa.

• Se prefiere aquel de los repartos $\frac{c'}{b}\left[\frac{1}{p'}\right]$ y $\frac{c''}{b}\left[\frac{1}{p}\right]$ que conlleve divisiones sobre partes de unidad de mayor tamaño.

## 4. La obtención del resultado

Hemos indicado en el apartado anterior un procedimiento de reparto que, a nuestro entender, era plausible entre los escribas egipcios. En cuanto a la técnica del reparto, como ya hemos señalado, se hacía por fases, lo que significa que cada uno de los individuos recibe una cantidad total que es la suma de las cantidades recibidas en cada fase del reparto; la primera cantidad $\frac{1}{p}$ viene determinada por la relación $u:n=\frac{1}{p}+(a:n)\left[\frac{1}{p}\right]$ y el proceso de reparto prosigue mientras quede alguna cantidad de magnitud sobrante. En consecuencia, el reparto se compone de dos tareas.

*Tarea I.*— Determinar la parte que corresponde a cada individuo en el primer reparto.

*Tarea II.*— Estudiar el modo en que se reparte la cantidad sobrante.

Ahora bien, al llevar a la práctica estas tareas se puede seguir una doble estrategia metodológica que seguidamente detallamos:

*Método 1*— Controlar el número de partes que se necesitan para repartir entre los individuos.

*Método 2.*— Controlar el tamaño de la parte que recibe inicialmente cada individuo.

### *Método 1*

#### *Tarea I*

Consiste en hacer divisiones sucesivas a partir de la unidad hasta conseguir que el número de partes que se obtienen con las u unidades sea igual o superior al número de individuos. Es decir, si tras una serie de divisiones sucesivas la unidad contiene p partes, se debe cumplir que $p.u \geq n$. Para hacer las divisiones sucesivas tendremos en cuenta los siguientes criterios:

- Si n es primo las divisiones serán preferentemente en mitades y tercios, aunque se admiten divisiones en 5, 7, 11, .. partes iguales, y en ese orden, si de esa manera se reducen sensiblemente las fases del proceso.

- Si n es compuesto, las divisiones sucesivas serán en mitades, tercios y partes que se correspondan con los divisores propios de n.

La puesta en práctica del método consiste en utilizar la técnica de duplicación y formar una serie de equivalencia de la siguiente forma:

| | |
|---|---|
| 1 | p |
| 2 | 2p |
| ... | ... |
| u | up |

En esta serie, u es el número de unidades a repartir, n el número de individuos entre los que se hace el reparto, y p se obtiene por medio de productos de la forma a.a'.a''... que se van construyendo con el objetivo de que se cumpla que $u.p \geq n$, y teniendo en cuenta que los valores de a, a', a'', .. se ajustan a los criterios indicados anteriormente.

Una vez cumplida la desigualdad $u.p \geq n$, ya conocemos el tamaño de la parte que, en la primera fase del reparto, corresponde a cada uno de los individuos, y ello permite expresar la primera parte del resultado de este reparto como $u:n = \frac{1}{p} + ((up-n):n)\left[\frac{1}{p}\right]$

Veamos cómo se aplica este método en el caso del reparto 2:89, cuya solución ya conocemos a través del Recto del Papiro de Rhind, lo que nos permite tener información sobre la validez de este método de trabajo.

Partiendo de que el número de unidades es u=2 y que el número de individuos es n=89, nuestra *Tarea I* es la de determinar las partes en que hay que dividir cada unidad para que haya partes suficientes para los 89 individuos.

- Puesto que 89 es primo, buscaremos divisiones en productos de potencias de 2, 3, 5, ...

- Hagamos diferentes ensayos:

| | | |
|---|---|---|
| p=2 | 1 | 2 |
| | u=2 | $4<n=89$. Duplicamos el número de partes |
| p=4 | 1 | 4 |
| | u=2 | $8<n=89$. Triplicamos el número de partes |
| P=12 | 1 | 12 |
| | u=2 | $24<n=89$. Quintuplicamos el número de partes |
| P=60 | 1 | 60 |
| | u=2 | $120>n=89$ |

Puesto que tenemos 120 partes de tamaño [1/60] de unidad, daremos una parte a cada uno de los 89 individuos y sobrarán 31 partes para proseguir el reparto. En forma simbólica $2:89=\frac{1}{60}+(31:89)\left[\frac{1}{60}\right]$

En este método no hay evidencias de cómo hacer las sucesivas divisiones para alcanzar el objetivo previsto. Presumiblemente sería un proceso de ensayo y error que llevase la elección de uno de los resultados obtenidos, por la brevedad o la facilidad de su aplicación a la práctica. Para ello, el escriba podría llevar un control similar al que se recoge en el siguiente cuadro para el caso de que el reparto se haga con dos unidades.

| Partes en que se divide la unidad | 2 | 4 | 8 | 16 |
|---|---|---|---|---|
| Tamaño de las partes | 1/2 | 1/4 | 1/8 | 1/16 |
| Número de partes | **4** | **8** | **16** | **32** |

En todo caso, el proceso de descomposición no termina en esta tarea I sino que se completa (y ello influirá notablemente en la elección), con la siguiente

*Tarea II*

Para llevar a cabo esta tarea se toma como punto de partida los resultados de la Tarea I, que nos proporcionan el tamaño de las partes sobrantes en la primera fase del reparto, 1/p, así como el número de partes que han sobrado y sobre las que hay que realizar el segundo reparto, s = u.p – n.

El trabajo que se requiere en esta fase del reparto es el de lograr que las s partes sobrantes se repartan entre los n individuos. Para ello, se toma el criterio de que las partes sucesivas del reparto sean lo más grandes posible, lo que exige hacer una reconversión del tamaño de las partes sobrantes del primer reparto.

Y en este camino el escriba podía confeccionar una tabla sobre el número de partes que hay en una o más unidades, así como las partes que corresponden a fracciones de unidad. Por ejemplo, podía disponer de una tabla como la siguiente:

| | |
|---|---|
| 4 | 4p |
| 2 | 2p |
| **1** | **p** |
| 1/2 | p/2 |
| 1/3 | p/3 |
| ... | ... |
| 1/b | p/b |
| 1/c | p/c |
| 1/d | p/d |

Puesto que el número de partes es un número natural la tabla anterior hay que hacerla usando exclusivamente los divisores de p.

A partir de la tabla la tarea se reduce a elegir de entre los valores de la columna derecha aquellos que sumen el número de partes sobrantes del primer reparto y que hemos llamado s. De entre las posibles opciones que se presenten, se elegirá la que contenga los valores más grandes (se corresponden con los valores de la columna de la izquierda que son mayores), y que hagan las divisiones más fáciles (son preferibles los valores que proceden de potencias de 2 y de 3, después los que contengan como divisor a 5, y así sucesivamente).

De este modo, y una vez realizada la elección, si, por ejemplo s = p/b + p/c+ p/d, el reparto ha terminado y su resultado se puede expresar como:

$$\mathbf{u:n} = \frac{1}{p} + \{(up-n):n\}\left[\frac{1}{p}\right] =$$
$$= \frac{1}{p} + (s:n)\left[\frac{1}{p}\right] 0$$
$$= \frac{1}{p} + \frac{s}{p}\left[\frac{1}{n}\right] =$$
$$= \frac{1}{p} + \left\{\frac{p/b}{p} + \frac{p/c}{p} + \frac{p/d}{p}\right\}\left[\frac{1}{n}\right] =$$
$$= \frac{1}{p} + \left\{\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right\}\left[\frac{1}{n}\right] =$$
$$= \mathbf{\frac{1}{p} + \frac{1}{bn} + \frac{1}{cn} + \frac{1}{dn}}$$

Retomamos el ejemplos anterior y aplicamos el proceso que hemos descrito en esta tarea II, recordando que en la tarea I se había llegado a entregar partes de tamaño 1/60 de unidad y que habían sobrado 31 de esas partes $2:89 = \frac{1}{60} + (31:89)\left[\frac{1}{60}\right]$.

Hacemos la tabla de relaciones indicada anteriormente

| | |
|---|---|
| **1** | **60** |
| 1/2 | 30 |
| 1/3 | 20 |
| 1/4 | 15/ |
| 1/5 | 12 |
| 1/6 | 10/ |
| 1/10 | 6/ |
| 1/12 | 5 |
| 1/15 | 4 |
| 1/20 | 3 |
| 1/30 | 2 |
| 16/0 | 1 |
| | 31 |

Los valores de la columna que suman 31 y que responden a las características indicadas anteriormente son 15, 10 y 6 (señalados con una barra inclinada) y que se corresponden con 1/4, 1/6 y 1/10. Por tanto, el reparto queda concluido en los términos siguientes:

$$\frac{2}{89}=\frac{1}{60}+\left\{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\right\}\left[\frac{1}{89}\right]=\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}.$$

*Método 2*

*Tarea I*

Para realizar el reparto de u unidades entre n individuos se parte de la relación $1 \rightarrow n$, y mediante divisiones sucesivas de la unidad de la izquierda hay que conseguir que la cantidad correspondiente sea menor o igual que el número de unidades a repartir, u. Es decir, si tras una serie de divisiones sucesivas la unidad contiene p partes, se debe cumplir que $n/p \leq u$.

Para hacer las divisiones sucesivas tendremos en cuenta los siguientes criterios:

- Si n es primo las divisiones serán preferentemente en mitades y tercios, aunque si admiten divisiones en 5, 7, 11, .. partes iguales, y en ese orden, si de esa manera se reduce sensiblemente las fases del proceso.

- Si n es compuesto, las divisiones sucesivas serán en mitades, tercios y partes que se correspondan con los divisores propios de n.

Por tanto, el trabajo a realizar inicialmente es el de utilizar la técnica de partición para formar una serie de equivalencia de la siguiente forma

$$\begin{array}{ll} 1 & n \\ 1/2 & n/2 \\ \ldots & \ldots \\ 1/p & n/p \leq u \end{array}$$

En esta serie, u es el número de unidades a repartir, n el número de individuos entre los que se hace el reparto, y p se obtiene por medio de productos de la forma a.a'.a''... que se van construyendo de acuerdo con el objetivo de que se cumpla que

$n/p \leq u$, y teniendo en cuenta que los valores de a, a', a'', .. se ajustan a los criterios indicados anteriormente.

Una vez cumplida la desigualdad $n/p \leq u$, ya conocemos el tamaño de la parte que, en el primer reparto, corresponde a cada uno de los individuos, y ello permite expresar el resultado de este reparto como: $\frac{u}{n} = \frac{1}{p} + ((up - n) : n)\left[\frac{1}{p}\right]$

Veamos cómo se aplica este método en el caso de la división 2/89, es decir, que partiendo de que el número de unidades es u=2 y que el número de individuos es n=89, nuestra *Tarea I* es la de determinar el tamaño de las partes para conseguir que $n/p \leq u$.

— Puesto que 89 es primo, buscaremos divisiones en productos de potencias de 2, 3, 5, ..

$$\begin{array}{ll} 1 & 89 \\ \frac{1}{2} & 44+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 22+\frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & 7+\frac{1}{3}+\frac{1}{12} \\ \frac{1}{60} & 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{60} \\ & 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60} \end{array}$$

En consecuencia, si a cada uno de los 89 individuos les corresponde una parte de tamaño [1/60] de unidad, se habrán consumido $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}$ unidades y quedará por repartir una cantidad $d = 2 - \left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}\right]$

Después de este primer reparto se tiene,

$$2:89 = \frac{1}{60} + (d:89)$$

Sobre las decisiones que toma el escriba en orden a determinar las divisiones sucesivas suponemos que sería un proceso de ensayo y error que llevase la elección de uno de los resultados elegidos, bien sea por la brevedad de su apliacción, bien sea por la facilidad de su aplicación a la práctica. En todo caso, el proceso de descomposición no termina en esta tarea I, sino que se completa (y ello influirá notablemente en la elección), con la siguiente

*Tarea II*

Con los resultados de la Tarea I ya se conocen el tamaño de la primera parte del reparto, 1/p, así como la cantidad que queda por repartir, que hemos llamado d. Queda, por tanto, el trabajo de repartir una cantidad d entre n individuos.

Teniendo en cuenta las relaciones

| | |
|---|---|
| **1** | **m** |
| $\frac{1}{1mn}$ | $\frac{1}{m}$ |

la tarea a realizar será la de encontrar valores de m, m', ... tales que $d = \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} + \ldots$

Los valores de m, m', ... podían encontrase mediante ensayo y error, es decir, dar a cada uno de los n individuo una parte de tamaño $\left[\frac{1}{mn}\right]$ con lo que se consumen $\frac{1}{m}$ unidades, y observar en qué modo se puede repartir la parte sobrante $d' = d - \frac{1}{m}$

Retomando el ejemplo del cociente 2/89, recordemos que a cada uno de los 89 individuos se les ha dado una parte de tamaño 1/60 y se han consumido $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60}$ unidades.

El proceso podría continuar de la siguiente forma:

- Dar a cada individuo una parte de tamaño $\frac{1}{2,89}$

Se consumen $\frac{1}{2}$ unidad y queda un resto $d' = 2 - \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60}\right] = \frac{1}{60}$

Ese resto es muy pequeño para dividirlo entre 89 individuos.

• Dar a cada individuo una parte de tamaño $\frac{1}{3,89}$

Se consumen $\frac{1}{3}$ unidad y queda un resto $d'=2-\left[1+\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}\right]=\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$

• Dar a cada individuo una parte de tamaño $\frac{1}{4,89}$

Se consumen $\frac{1}{4}$ unidad y queda un resto $d'=2-\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}\right]=\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$

Este resto es el que contiene partes mayores para repartir entre los 89 individuos.

De este modo se obtiene el resultado:

$$\mathbf{\frac{2}{89}}=\frac{1}{60}+\frac{1}{4,89}+\frac{1}{6,89}+\frac{1}{10,89}=\mathbf{\frac{1}{60}}+\mathbf{\frac{1}{356}}+\mathbf{\frac{1}{534}}+\mathbf{\frac{1}{890}}$$

Hemos presentado el modelo de trabajo que pensamos utilizaban los escribas egipcios. Este modelo encierra dos métodos de trabajo claramente diferenciados: en el método I el trabajo se hace con números naturales, mientras que en el modelo II el trabajo hay que hacerlo con fracciones unitarias. En nuestra intuición, el *Método I* se perfila como más cómodo para trabajar por parte de los escribas, aunque esta opinión no tenga una base documental que la sustente. Es más, esa intuición viene condicionada porque encontramos dificultades operatorias con las fracciones unitarias; es posible que los escribas egipcios, con una mayor destreza en el uso de estas fracciones, contradijeran nuestras suposiciones.

## NOTAS

1 Esta técnica de reparto es usual en el caso de unidades enteras puesto que permite efectuar el reparto sin necesidad de conocer algún algoritmo de la división, basta con recurrir el recuento; y de hecho, en la actualidad tanto adultos como niños emplean alguna vez esta técnica que permite hacer el reparto sin conocer a priori el número total de unidades a repartir. Esto nos hace presuponer que el reparto por fases era una técnica utilizada habitualmente por los egipcios en el caso de que los resultados sean cantidades enteras y que, posteriormente, trasladaron a los repartos en los que los resultados no son cantidades enteras.

## BIBLIOGRAFÍA

ARGUELLES, J. (1989) *Historia de la Matemática*. Madrid, Akal.

BABINI, P. y REY PASTOR, J. (1973) *Historia suscinta de la matemática*. Madrid, Espasa.

BENOIT, P.; CHEMLA, K y RITTER, J. (Eds.) (1992) *Histoire de fractions, fractions d'historie*. Berlin, Birkhäusern Verlang.

BOYER, C.B. (1986) *Historia de la Matemática*. Madrid, Alianza Editorial.

BUNT, L.N.; JONES, P.S. y BEDIENT, J.D. (1987) *Le radice storiche delle matematiche elementari*. Bologna, CM4-Zanichelli.

CAJORI, F. (1985) *A history of Mathematical notations*. Illinois, Open Court Press, 2 vols.

CAMPBELL, D.M. y HIGGINS, J. (Eds.) (1984) *Mathematics. People. Problems. Results*. Belmont (California), Wadworth international.

COLLETTE, J.P. (1985) *Historia de las matemáticas*. Madrid, Siglo XXI de España.

CROSSLEY, J.N. (1987) *The emergence of number*. Singapore, World Scientific.

DAHAN-DALMENICO, A. y PEIFFER, J. (1986). *Une histoire des mathématiques*. París, Editions du Seuil.

DHOMBRES et al. (1987) *Mathématiques au fil des ages. I.R.E.M.* Groupe Epistemologie et Historie, París, Gauthier-Villars.

EVES, H. (1969) *History of mathematics*. New York, Holt, Rinehart y Winston, 3ª ed.

FAUVEL, J. y GRAY, J. (Eds.) (1992) *The History of Mathematics. A reader.* London, Macmillan Press - The Open University, 3ª ed.

FLEGG, G. (1989) *Numbers through the ages*. London, Macmillan-The Open University.

GILLINGS, R.J. (1982) *Mathematics in the time of the pharaohs*. New York, Dover Publications.

GRATTAN-GUINNES (Eds.) (1994) *Companion enciclopedia of the history and fhilosophy of the mathematical sciences*. London, Routledge, vol. 1.

HAROLD, T.D. (1989) «The history of computation». En: National Council of teachers of Mathematics, *Historical topics for the Mathematics Classroom*. Reston (Virginia, N.C.T.M.).

IFRAH, G. (1987) *Las cifras*. Madrid, Alianza Editorial.

KAPUT, J.J. (1987) «Representation Systems and Mathematics». En: Janvier, C. (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of matematics*. Hillsdale (New York). Lawrence Erlbaum Associates, publishers.

KLINE, M. (1992) *El pensamiento matemático de la Antiguedad a nuestros dias*, I. Madrid, Alianza Universidad.

NEUGEBAUER, O. (1969) *The Exact sciences in antiquity*. New Yok, Dover Publications, 2ª ed.

NEWMAN, J.R. (1980). *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Barcelona, Grijalbo, vol. 1.

RICO, L.; CASTRO, E. y ROMERO, I. (1996) «The role of representation systems in the learning of numerical structures». En: L. Puig y A. Gutiérrez (Ed.), *Proceedings of the 20th*

*Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Valencia (Spain), Universidad de Valencia.

SMITH, D.E. (1953) *History of Mathematics*. New York, Dover, vol. II.